

Corrigé : CCP MP 2017 Maths 2

Thomas CHEN

Partie I – Un exemple de chaîne de Markov

1. On a $X_1(\Omega) \subset \{1, 2\}$. Puisque $(X_0 = 1) \sqcup (X_0 = 2) = \Omega$, par la formule des probabilités totales,

$$\forall k \in \{1, 2\}, \mathbb{P}(X_1 = k) = \mathbb{P}(X_1 = k \mid X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = k \mid X_0 = 2)\mathbb{P}(X_0 = 2).$$

Pour $k = 1$, on a donc

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

et pour $k = 2$, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

Remarque. Comme $X_1(\Omega) \subset \{1, 2\}$, nécessairement $\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2) = 1$ donc $\mathbb{P}(X_1 = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{5}{8}$.

Ainsi,

$$\boxed{X_1(\Omega) = \{1, 2\} ; \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{3}{8} ; \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{5}{8} .}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $(X_n = 1) \sqcup (X_n = 2) = \Omega$, par la formule des probabilités totales,

$$\forall k \in \{1, 2\}, \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = 2)\mathbb{P}(X_n = 2)$$

donc on a

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = 2) \\ \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{3}{4}\mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}$$

donc

$$\mu_{n+1}^T = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}}_{=A^T} \mu_n^T.$$

On a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mu_{n+1} = \mu_n A.}$$

3. Puisque $A^0 = I_2$, on a $\mu_0 = \mu_0 A^0$. Ensuite, si on a $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_n = \mu_0 A^n$, on a

$$\mu_{n+1} = \mu_n A = \mu_0 A^n A = \mu_0 A^{n+1}.$$

On en déduit, par principe de récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n = \mu_0 A^n$.

Pour obtenir μ_5 , on calcule A^5 . On a, avec la calculatrice

$$A^5 = \begin{pmatrix} \frac{171}{1024} & \frac{341}{1024} \\ \frac{512}{1024} & \frac{512}{1024} \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{\mu_5 = \mu_0 A^5 = \begin{pmatrix} \frac{683}{2048} & \frac{1365}{2048} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.33 & 0.67 \end{pmatrix} .}$$

4. On a

$$(T = 1) = (X_1 = 1) \cap (X_0 = 2)$$

donc

$$\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_0 = 2)) = \mathbb{P}(X_0 = 2)\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 2) = \frac{1}{2} \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on a

$$(T = k) = (X_k = 1) \cap \bigcap_{i=0}^{k-1} (X_i = 2).$$

Ainsi, par la formule des probabilités composées¹, on a

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(X_0 = 2) \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\left(X_i = 2 \mid \bigcap_{j=0}^{i-1} (X_j = 2)\right) \times \mathbb{P}\left(X_k = 1 \mid \bigcap_{j=0}^{k-1} (X_j = 2)\right).$$

Or, la connaissance de X_i ne dépend que de la connaissance de X_{i-1} pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ donc

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(X_0 = 2) \times \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_i = 2 \mid X_{i-1} = 2) \times \mathbb{P}(X_k = 1 \mid X_{k-1} = 2) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

5. On remarque que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc 1 est valeur propre de A , et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1.

Remarque. Lorsqu'on dispose d'une matrice dont la somme des coefficients de chaque ligne est constante, disons $c \in \mathbb{R}$, alors c est automatiquement une valeur propre et un vecteur propre associée est le vecteur colonne composée que de 1. Par exemple, la matrice $n \times n$ composée que de 1 n'a que deux valeurs propres : 0 de multiplicité $n - 1$ ² donc il manque une dernière racine qu'est n . On peut aussi trouver n par la trace.

Ensuite, on a $\text{tr}(A) = \frac{5}{4} = 1 + \lambda$ où λ est la deuxième valeur propre complexe de A . On a donc $\lambda = \frac{1}{4}$ donc

$$\chi_A = (X - 1) \left(X - \frac{1}{4}\right).$$

χ_A est donc scindé à racines simples donc A est diagonalisable. Cherchons un vecteur propre de A pour la valeur propre $\frac{1}{4}$. On a

$$A - \frac{1}{4}I_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\left(A - \frac{1}{4}I_2\right) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

1. que l'on rappelle ici : en se donnant $A_1, \dots, A_k$ des événements,

$$\mathbb{P}(A_k \cap \dots \cap A_1) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \times \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_k \mid A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

ce qui s'écrit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{i=2}^k \mathbb{P}\left(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right)$$

2. son rang est 1 donc par le théorème du rang, la dimension du noyau est $n - 1$

Avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

6. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors en notant $\varphi : M \mapsto QMQ^{-1}$ et $\psi : M \mapsto \mu_0 M$, on a

$$\varphi(\lambda M + \mu N) = Q(\lambda M + \mu N)Q^{-1} = \lambda QMQ^{-1} + \mu QNQ^{-1} = \lambda\varphi(M) + \mu\varphi(N)$$

et

$$\psi(\lambda M + \mu N) = \mu_0(\lambda M + \mu N) = \lambda\mu_0 M + \mu\mu_0 N = \lambda\psi(M) + \mu\psi(N).$$

φ et ψ sont donc dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, φ et ψ sont continues.

7. On a $A^0 = I_2 = QQ^{-1} = QD^0Q^{-1}$ et si on a un $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = QD^nQ^{-1}$, alors

$$A^{n+1} = A^n A = QD^nQ^{-1}QDQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}.$$

Par le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = QD^nQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^{-n} \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Par continuité de φ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(D^n) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} D^n\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = \mu_0 A^n$ donc par continuité de ψ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(A^n) = \psi\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n\right) = \mu_0 Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Calculons cette limite.

$$Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc

$$Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mu_0 Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Partie II – Spectre d'une matrice stochastique

8. Soit X le vecteur colonne ne contenant que des 1. On a

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, [AX]_i = \underbrace{\sum_{j=1}^p [A]_{i,j} \underbrace{[X]_j}_{=1}}_{=1} = 1 \times [X]_i.$$

Ainsi, $AX = X$ donc $\boxed{1 \in \text{Sp}(A)}$.

9. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Alors

$$|[AX]_i| = \left| \sum_{j=1}^p [A]_{i,j} [X]_j \right| \leq \sum_{j=1}^p [A]_{i,j} \underbrace{|[X]_j|}_{\leq \|X\|_\infty} \leq \|X\|_\infty \underbrace{\sum_{j=1}^p [A]_{i,j}}_{=1}.$$

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $|[AX]_i| \leq \|X\|_\infty$ donc l'inégalité passe au supremum en

$$\boxed{\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty}.$$

10. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Soit X tel que $AX = \lambda X$, $X \neq 0$. On a

$$\|AX\|_\infty = \|\lambda X\|_\infty = |\lambda| \|X\|_\infty \stackrel{Q9}{\leq} \|X\|_\infty.$$

Or $\|X\|_\infty > 0$ donc $\boxed{|\lambda| \leq 1}$.

11. Soit $x_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $Ax_0 = \lambda x_0$. Soit $x = \frac{1}{\|x_0\|_\infty} x_0$, possible car $\|x_0\|_\infty \neq 0$. Alors $\|x\|_\infty = 1$ et $\mathcal{E}_\lambda(A)$ étant un espace vectoriel, $x \in \mathcal{E}_\lambda(A)$ donc $\boxed{Ax = \lambda x \text{ avec } \|x\|_\infty = 1}$.

12. On a $(A - \lambda I_p)x = 0$ donc

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, [(A - \lambda I_p)x]_i = \sum_{k=1}^p (a_{k,i} - \lambda \delta_{k,i}) x_k = \sum_{k=1, k \neq i}^p a_{k,i} x_k + (a_{i,i} - \lambda) x_i = 0.$$

Ainsi, si $|x_i| = 1$,

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{i,i}| &= |\lambda - a_{i,i}| |x_i| = |(\lambda - a_{i,i}) x_i| \\ &= \left| \sum_{k=1, k \neq i}^p a_{k,i} x_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1, k \neq i}^p a_{k,i} \underbrace{|x_k|}_{\leq \|x\|_\infty = 1} \\ &\leq \underbrace{\sum_{k=1}^p a_{k,i}}_{=1} - a_{i,i} \\ &= 1 - a_{i,i} \end{aligned}$$

donc on a bien

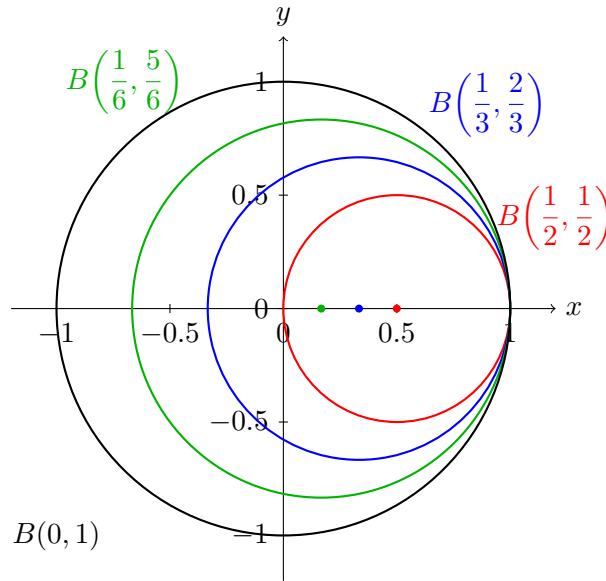
$$\boxed{|\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}}.$$

Remarque. Le lecteur curieux pourra consulter le théorème d'inversibilité d'Hadamard et les disques de Gerschgorin comme fait ici.

13. Par la question 11 et 12, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$, il existe $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ tel que $\lambda \in B(a_{i,i}, 1 - a_{i,i})$. Ainsi

$$\boxed{\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \lambda \in \textcolor{red}{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \textcolor{blue}{B}\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) \cup \textcolor{green}{B}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}.$$

($B(z, r)$ désigne la boule de centre z dans $\mathbb{C}$ de rayon r : c'est la représentation de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}^2$.) On fait le dessin suivant :



λ est donc dans $B\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$ qui est bien incluse dans $B(0,1)$ puisqu'on a $|\lambda| \leq 1$ par la question 10.

14. Si $\lambda = 0$ est valeur propre, alors

$$|0 - (a_{i,i} - 1)| = |1 - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i} - a_{i,p}$$

i.e. $|x| \leq x - \alpha$ avec $\alpha > 0$ et $x = 1 - a_{i,i}$. Ceci est absurde. Ainsi, $0 \notin \text{Sp}(B')$ donc B' est inversible.

15. Par la question 8, $1 \in \text{Sp}(A)$ donc $\dim(\ker(A - I_p)) \geq 1$. Par ailleurs, B' est inversible et étant une matrice extraite de B de taille $(p-1) \times (p-1)$, on a $\text{rg}(B) \geq p-1$ i.e. $\dim(\ker(B)) \leq 1$ par le théorème du rang. Ainsi,

$$\dim(\ker(B)) = 1.$$

Partie III – Itérées d'une matrice stochastique

16. En notant (e_1, e_2) base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a donc $s(e_1) = e_2$ et $s(e_2) = e_1$ donc

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2)}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

17. S est stochastique et $S^2 = I_2$ par produit matriciel (ou alors $s^2 = \text{Id}$). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S^{2n} = I_2$ et $S^{2n+1} = S$. On en déduit que $(S^n)_n$ ne converge pas : par exemple, parce que $[S^{2n}]_{1,1} = 1$ et $[S^{2n+1}]_{1,1} = 0$. Ainsi, $([S^n]_{1,1})_n$ ne converge pas.

Ainsi, la **Proposition 2** est fausse sans l'hypothèse de stricte positivité.

18. Il existe une multitude de preuve. En voici une. Comme N est nilpotente d'indice k , $N^k = 0$ et $N^{k-1} \neq 0$ donc $\mu_n = X^k$. Or, $\deg(\mu_N) \leq p$ donc $k \leq p$ donc $N^p = N^k N^{p-k} = 0$.

19. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = \frac{n^k}{k!} \underbrace{\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{1}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{1} \frac{n^k}{k!}.$$

Ainsi,

$$\left(\binom{n}{k} \lambda^{n-k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k \lambda^{n-k}}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \right)$$

par croissances comparées et $|\lambda| < 1$.

20. Soit $n \geq p$. Comme I_p et N commutent, par la formule du binôme, on a

$$(\lambda I_p + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{p-1} \underbrace{\binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0_p.$$

21. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \text{diag}(1, \lambda I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_r I_{p_r} + N_r).$$

Alors $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En notant $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ (qui est continue car linéaire), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(D^n) = \varphi \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} D^n \right).$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D^n = \text{diag} \left(1, \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_1 I_{p_1} + N_1)^n}_{=0_{p_1}}, \dots, \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_r I_{p_r} + N_r)^n}_{=0_{p_r}} \right) = \text{diag}(1, 0, \dots, 0).$$

Ainsi, $(A^n)_n$ converge.

Partie IV – Probabilité invariante par une matrice stochastique

22. Soit $(\mu_n)_n$ une suite de vecteurs stochastiques qui converge, disons vers μ_∞ . Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^p \underbrace{\overbrace{[\mu_n]_i}^{\geq 0}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} [\mu_\infty]_i \geq 0} = 1.$$

par passage à la limite des inégalités larges. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^p [\mu_\infty]_i = 1.$$

μ_∞ est donc stochastique. On en déduit, par caractérisation séquentielle, que

$$\boxed{\text{l'ensemble des vecteurs stochastiques est un fermé de } \mathbb{R}^n}.$$

23. De « $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_{n+1} = \mu_n A$ », on tire « $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n = \mu_0 A^n$ ». Par la question 21, $(A^n)_n$ converge donc par continuité de $M \mapsto \mu_0 M$, $(\mu_n)_n$ converge ; notons μ_∞ sa limite. Alors

$$\mu_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \mu_\infty ; \mu_n A \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \mu_\infty A.$$

Donc l'égalité $\mu_{n+1} = \mu_n A$ passe à la limite en

$$\boxed{\mu_\infty = \mu_\infty A}.$$

24. On veut calculer

$$\sum_{i=1}^p [\mu A]_i = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p m_j [A]_{j,i} = \sum_{j=1}^p m_j \underbrace{\sum_{i=1}^p [A]_{j,i}}_{=1} = \sum_{j=1}^p m_j = 1.$$

Ainsi, μA est stochastique.

25. μ_0 est stochastique, et si μ_n est stochastique pour un certain n , alors $\mu_n A$ l'est aussi par la question 24 donc μ_{n+1} l'est : par principe de récurrence, $(\mu_n)_n$ est une suite de vecteurs stochastiques. Maintenant, l'ensemble des vecteurs stochastiques étant fermé par la question 22, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n$ est stochastique, c'est-à-dire, μ_∞ est stochastique. Or $\mu_\infty = \mu_\infty A$ donc μ_∞ est une probabilité invariante.

26. Comme μ est stochastique (donc en particulier non nul), il suffit de montrer que $\mu = \mu A$ est équivalent à $\mu^T \in \mathcal{E}_1(A^T)$: cela vient de

$$\mu = \mu A \iff \mu^T = A^T \mu^T \iff \mu^T \in \mathcal{E}_1(A^T)$$

ce qui conclut.

27. On a

$$\dim(\ker(A - I_p)) = 1$$

donc par le théorème du rang, $\text{rg}(A - I_p) = p - 1$. Or, le rang est invariant par transposée donc $\text{rg}(A^T - I_p) = p - 1$. Par le théorème du rang,

$$\dim(\ker(A^T - I_p)) = 1.$$

28. Soit $\hat{\mu}$ une probabilité invariante de A . Par la question 26, $\hat{\mu}^T$ et μ_∞^T sont dans $\ker(A^T - I_p)$ qui est de dimension 1 : ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\hat{\mu}^T = \alpha \mu_\infty^T$. Ainsi,

$$1 = \sum_{i=1}^p [\hat{\mu}]_i = \alpha \sum_{i=1}^p [\mu_\infty]_i = \alpha$$

donc $\alpha = 1$ et $\hat{\mu} = \mu_\infty$. On a donc l'unicité souhaitée.

Partie V – Informatique : calcul effectif de la probabilité invariante d'une matrice stochastique strictement positive

- 29.
- `len(A)` renvoie la longueur de la liste `A` : la liste `A` contient 4 éléments donc `len(A)` renvoie 4.
 - `A[1]` renvoie le deuxième élément de la liste `A` : on a donc `A[1]` renvoie `[4,5,6]`.
 - `A[2][1]` renvoie le deuxième élément de la liste `A[2]` qui est la troisième liste de `A` : on a donc `A[2][1]` renvoie 8.

30. On écrit la fonction suivante :

```
def difference(x,y) :
    p=len(x)
    res=[]          # on cree la liste qui contiendra le resultat
    for i in range(p) :
        res.append(x[i]-y[i])    # on rajoute dans res la difference
    return res
```

31. On écrit la fonction suivante :

```
def norme(x) :
    p=len(x)
    res=abs(x[0])    # res sera le maximum de la liste tout au long du parcours de x
    for i in range(p) :
        if res<abs(x[i]) :        # si on tombe sur un nombre plus grand
            res=abs(x[i])        # on change res en ce nombre
    return res
```

32. On écrit la fonction suivante :

```
def itere(x,A) :
    p=len(x)
    res=[]           # on cree la liste qui contiendra le resultat
    for i in range(p) :
        prod=0
        for j in range(p) :        # on calcule une coordonnée du produit matriciel
            prod+=x[j]*A[j][i]
        res.append(prod)           # on rajoute le resultat du calcul dans la liste
    return res
```

33. On écrit la fonction suivante :

```
def probaInvariante(A,eps) :
    p=len(x)
    mu_i = [1/p for i in range(p)]
    mu_iter = itere(mu_i,A)        # on calcule mu_0 et mu_1
    N=norme(difference(mu_i,mu_iter))
    while N>eps :                  # tant que l ecart entre 2 termes >eps
        mu_i,mu_iter = mu_iter,itere(mu_iter,A)        # on continue d iterer
        N=norme(difference(mu_i,mu_iter))
    return mu_iter
```

FIN DU SUJET