

Corrigé : Mines MP 2014 Maths 1

Thomas CHEN

1 Préliminaire sur la représentation de ze^z dans $\mathbb{C}$

1. On a

$$\begin{aligned} ze^z = w &\iff Re^{i\theta} \exp(Re^{i\theta}) = re^{i\alpha} \\ &\iff Re^{i\theta} \exp(R \cos(\theta)) \exp(iR \sin(\theta)) = re^{i\alpha} \\ &\iff \underbrace{R \exp(R \cos(\theta))}_{>0} \exp(i(\theta + R \sin(\theta))) = re^{i\alpha} \\ &\iff \begin{cases} R \exp(R \cos(\theta)) &= r \\ \theta + R \sin(\theta) &\equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$ze^z = w \iff \begin{cases} R \exp(R \cos(\theta)) &= r \\ R \sin(\theta) &\equiv \alpha - \theta \pmod{2\pi} \end{cases}$$

2. On a

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} = +\infty$$

donc

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} = \exp\left((\alpha - \theta) \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) = +\infty.$$

De même, comme $\alpha \geq 2\pi$, on a, avec $\cos(\pi) = -1$,

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} \cos(\theta) = -\infty.$$

Ainsi, par composition de limites, vu que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$,

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{1}{\cos(\theta)} \cos(\theta) \frac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} = \exp\left((\alpha - \theta) \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) = 0.$$

On a donc

$$\left[\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \varphi(\theta) = +\infty ; \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \varphi(\theta) = 0 \right].$$

Comme φ est continue sur $]0, \pi[$ par théorèmes généraux, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation

$$\varphi(\theta) = r$$

admet une solution dans $]0, \pi[$ pour tout $r > 0$.

3. Soit $w \in \mathbb{C}$. Si $w = 0$, alors $g(0) = w$. Sinon, il existe $r > 0$ et $\alpha \in [2\pi, 4\pi[$ tel que $w = re^{i\alpha}$.

Par la question A.2, il existe $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\varphi(\theta) = r$. Alors en posant $R = \frac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)}$ et $z = Re^{i\theta}$, on a

$$\begin{cases} R \exp(R \cos(\theta)) &= \varphi(\theta) = r \\ R &= \frac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} \end{cases}$$

donc par la question A.1, on a $ze^z = w$ i.e. $g(z) = w$. Ainsi, $\boxed{g \text{ est surjective}}$.

2 Représentation Ae^A d'un bloc de Jordan

4. Comme N est nilpotente d'indice n , $N^{n-1} \neq 0_n$ et $N^n = 0_n$. Ainsi, $\ker(N^{n-1}) \neq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Prenons $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \ker(N^{n-1})$. Montrons donc que $(X, NX, \dots, N^{n-1}X)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i N^i X = 0$. Soit $I = \{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : \lambda_i \neq 0\}$. Supposons par l'absurde que $I \neq \emptyset$. Comme I est une partie de $\mathbb{N}$, étant non vide, elle admet donc un plus petit élément, disons i_0 .

Alors $\forall i \in \llbracket 0, i_0 - 1 \rrbracket, \lambda_i = 0$. On en déduit que

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i N^i X = \sum_{i=i_0}^{n-1} \lambda_i N^i X.$$

Ainsi,

$$0 = N^{n-i_0-1} 0 = \sum_{i=i_0}^{n-1} \lambda_i N^{n-i_0-1+i} X = \lambda_{i_0} N^{n-1} X + \underbrace{\sum_{i=i_0+1}^{n-1} \lambda_i \overbrace{N^{n-i_0-1+i}}^{\geq n}}_{=0_n} X$$

donc

$$0 = \lambda_{i_0} \underbrace{N^{n-1} X}_{\neq 0}$$

donc

$$\lambda_{i_0} = 0$$

i.e.

$$i_0 \notin I.$$

Contradiction. Ainsi, $I = \emptyset$ donc $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_i = 0$. Ainsi,

$$(X, NX, \dots, N^{n-1}X) \text{ est une famille libre.}$$

5. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à N . Déjà, en notant $\mathcal{B} = (N^{n-1}X, \dots, NX, X)$, $\mathcal{B}$ est une famille libre de taille $n = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$ donc c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = J_n(0)$$

donc $J_n(0)$ et N sont les représentations matricielles dans deux bases différentes de u :

$$J_n(0) \text{ et } N \text{ sont donc semblables.}$$

Dans toute la suite, si A est une matrice carrée, on notera parfois $\exp(A)$ au lieu de e^A .

6. On a

$$e^{0_n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} 0_n^k}_{=I_n} = I_n.$$

Par ailleurs, $J_n(0)$ et $-J_n(0)$ commutent donc

$$I_n = \exp(0_n) = \exp(J_n(0) + (-J_n(0))) = \exp(J_n(0)) \exp(-J_n(0)).$$

Ainsi, $\boxed{\exp(J_n(0)) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})}$ (et $\exp(J_n(0))^{-1} = \exp(-J_n(0))$). Par continuité du produit matriciel,

$$J_n(0) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_n(0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_n(0)^{k+1} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_n(0)^k \right) J_n(0)$$

donc $J_n(0)$ et $\exp(J_n(0))$ commutent. Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, (J_n(0) \exp(J_n(0)))^k = J_n(0)^k \exp(J_n(0))^k.$$

Comme $\exp(J_n(0))$ est inversible, ses itérés aussi donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, (J_n(0) \exp(J_n(0)))^k = 0_n \iff J_n(0)^k = 0_n.$$

Ainsi,

$$\boxed{J_n(0) \exp(J_n(0)) \text{ est nilpotente et son indice est celui de } J_n(0), \text{ à savoir } n}.$$

7. Par continuité du produit matriciel, on a

$$\begin{aligned} P \exp(J_n(0)) P^{-1} &= P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_n(0)^k \right) P^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{P J_n(0)^k P^{-1}}_{=(P J_n(0) P^{-1})^k}. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{P \exp(J_n(0)) P^{-1} = \exp(P J_n(0) P^{-1})}.$$

Comme $J_n(0) \exp(J_n(0))$ est nilpotente, par la question B.5, elle est semblable à $J_n(0)$: il existe donc $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P J_n(0) \exp(J_n(0)) P^{-1} = J_n(0)$$

i.e.

$$P J_n(0) P^{-1} P \exp(J_n(0)) P^{-1} = J_n(0).$$

En notant $\tilde{N} = P J_n(0) P^{-1}$, par le point précédent,

$$\boxed{\tilde{N} \exp(\tilde{N}) = J_n(0)}.$$

8. Par la question A.3, il existe $\mu \in D$ tel que $g(\mu) = \lambda$ *i.e.* $\mu e^\mu = \lambda$. Comme $-1 = 1e^{i\pi} \notin D$, $\mu \neq -1$. On a donc $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ tel que $\mu e^\mu = \lambda$.

Ensuite,

$$\begin{aligned} J_n(\mu) \exp(J_n(\mu)) &= (\mu I_n + J_n(0)) \exp(\mu I_n + J_n(0)) \\ &= (\mu I_n + J_n(0)) \exp(\mu I_n) \exp(J_n(0)) \\ &= (\mu I_n + J_n(0)) e^\mu \exp(J_n(0)). \end{aligned}$$

Or, pour tout $N > n$,

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} J_n(0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} J_n(0)^k = P(J_n(0))$$

avec $P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k$. On en déduit que

$$\exp(J_n(0)) = P(J_n(0)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} J_n(\mu) \exp(J_n(\mu)) &= \mu e^\mu P(J_n(0)) + e^\mu J_n(0) P(J_n(0)) \\ &= \mu e^\mu \left(I_n + J_n(0) + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} J_n(0)^k \right) + e^\mu J_n(0) \left(I_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} J_n(0)^k \right) \\ &= \mu e^\mu + (\mu + 1) e^\mu J_n(0) + J_n(0)^2 \left(\mu e^\mu \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{(k+2)!} J_n(0)^k + e^\mu \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} J_n(0)^k \right). \end{aligned}$$

En notant $p(X) = e^\mu \left(\sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{e^\mu}{(k+2)!} + \frac{1}{(k+1)!} \right) X^k + \frac{e^\mu}{(n-1)!} X^{n-1} \right)$, on a

$$J_n(\mu) \exp(J_n(\mu)) = \mu e^\mu + (\mu + 1) e^\mu J_n(0) + J_n(0)^2 p(J_n(0)).$$

9. Comme $\mu \neq -1$, $(\mu + 1)e^\mu J_n(0)$ est nilpotente d'indice n . Posons $N = (\mu + 1)e^\mu J_n(0)$ et remarquons que N et $J_n(0)$ commutent. Ainsi, si $n \geq 2$ (si $n = 1$, il n'y a rien à faire),

$$\begin{aligned} (N + J_n(0)^2 p(J_n(0)))^{n-1} &= N^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} N^k J_n(0)^{2n-2k} p(J_n(0))^{n-k} \\ &= N^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} (\mu + 1)^k e^{\mu k} J_n(0)^k J_n(0)^{2n-2k} p(J_n(0))^{n-k} \\ &= N^{n-1} + \underbrace{J_n(0)^n}_{=0_n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k} (\mu + 1)^k e^{\mu k} J_n(0)^{n-k} p(J_n(0))^{n-k} \\ &= N^{n-1} \neq 0_n \end{aligned}$$

et

$$(N + J_n(0)^2 p(J_n(0)))^n = J_n(0)^n ((\mu + 1)e^\mu I_n + J_n(0) p(J_n(0)))^n = 0_n$$

donc $(\mu + 1)e^\mu J_n(0) + J_n(0)^2 p(J_n(0))$ est nilpotente d'indice n . Il existe donc, par la question B.5, $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$(\mu + 1)e^\mu J_n(0) + J_n(0)^2 p(J_n(0)) = Q J_n(0) Q^{-1}.$$

Ainsi,

$$J_n(\mu) \exp(J_n(\mu)) = \lambda I_n + Q J_n(0) Q^{-1} = Q(\lambda I_n + J_n(0)) Q^{-1} = Q J_n(\lambda) Q^{-1}.$$

Ainsi,

$$Q^{-1} J_n(\mu) Q Q^{-1} \exp(J_n(\mu)) Q = J_n(\lambda)$$

et en notant $M = Q^{-1} J_n(\mu) Q$, par la question B.7, on a

$$Q^{-1} e^{J_n(\mu)} Q = e^M$$

donc

$$M e^M = J_n(\lambda).$$

3 Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

10. Par la question B.4, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $(X, NX, \dots, N^{p-1}X)$ soit libre. Par le théorème de la base incomplète, il existe $Y_{p+1}, \dots, Y_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que

$$\hat{\mathcal{B}} := (N^{p-1}X, \dots, NX, X, Y_{p+1}, \dots, Y_n)$$

soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En reprenant les notations de la question B.4,

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\hat{\mathcal{B}}}(u) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & B \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \\ & & 0_{n-p,p} & & & C \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_p(0) & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\text{Mat}_{\hat{\mathcal{B}}}(u) = \begin{pmatrix} J_p(0) & B \\ 0 & C \end{pmatrix}}.$$

11. Par produit matriciel par blocs,

$$\begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & -X \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix} = I_n$$

donc $\boxed{T_X \text{ est inversible et } T_X^{-1} = T_{-X}}$. On a alors par produit matriciel par blocs,

$$\begin{aligned} T_X A T_X^{-1} &= \begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_p(0) & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & -X \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_p(0) & B + XC \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & -X \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_p(0) & -J_p(0)X + B + XC \\ 0 & C \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_p(0) & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $\boxed{Y = -J_p(0)X + B + XC \text{ et } Z = C}$. Ainsi, on a bien

$$\boxed{T_X A T_X^{-1} = \begin{pmatrix} J_p(0) & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}}.$$

12. Soit $L_1 \in \mathcal{M}_{1,n-p}(\mathbb{C})$ et $L_i = B_{i-1} + \tilde{C}_{i-1}$ où

$$[\tilde{C}_i]_j = \sum_{k=1}^{n-p} [L_i]_k [C]_{k,j} ; [B_i]_j = [B]_{i,j}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix}$. Alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \times \llbracket 1, n-p \rrbracket$,

$$\begin{aligned} [Y]_{i,j} &= - \sum_{k=1}^p \overbrace{[J_p(0)]_{i,k}}^{=\delta_{k,i+1}} [X]_{k,j} + [B]_{i,j} + \sum_{k=1}^{n-p} [X]_{i,k} [C]_{k,j} \\ &= -[X]_{i+1,j} + [B]_{i,j} + \sum_{k=1}^{n-p} [X]_{i,k} [C]_{k,j} \\ &= -[L_{i+1}]_j + [B]_{i,j} + \sum_{k=1}^{n-p} [X]_{i,k} [C]_{k,j} \\ &= 0 \end{aligned}$$

par construction. Ainsi,

$$\boxed{Y \text{ a ses } (p-1) \text{ premières lignes nulles avec ce choix de } X}.$$

13. A' est semblable à A qui est semblable à N . Comme N est nilpotente d'indice p , A' l'est aussi. On choisit X comme à la question précédente. Alors A' est de ma forme

$$\begin{pmatrix} J_p(0) & \begin{matrix} 0_{p-1,n-p} \\ y \end{matrix} \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

où $y = (y_{p+1}, \dots, y_n)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A'$. Alors u est nilpotente et en notant $F_j = \text{Vect}(e_{j+1}, \dots, e_n)$, on a

$$\forall i \geq p+1, u(e_i) - y_i e_p \in F_p.$$

On en déduit que $u(F_p) \subset F_{p-1}$ et du fait que $\forall i \in \llbracket 2, p \rrbracket, u(e_i) = e_{i-1}$, on en déduit par récurrence immédiate que

$$\forall j \in \llbracket 0, p \rrbracket, u^j(F_p) \subset F_{p-j}.$$

Soit maintenant $I = \{i \in \llbracket p+1, n \rrbracket : y_i \neq 0\}$. Supposons par l'absurde que $I \neq \emptyset$. Soit donc i_0 le plus petit élément de I . Soit $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ tels que $u(e_{i_0}) = y_{i_0} e_p + \sum_{k=p+1}^n \lambda_k e_k$. Alors

$$u^p(e_{i_0}) = 0 = y_{i_0} u^{p-1}(e_p) + \sum_{k=p+1}^n \lambda_k u^{p-1}(e_k) = y_{i_0} e_1 + \underbrace{\sum_{k=p+1}^n \lambda_k u^{p-1} \left(\underbrace{e_k}_{\in F_p} \right)}_{\in F_1}.$$

Comme $\mathbb{C}e_1 \oplus F_1 = \mathbb{C}^n$, on en déduit que $y_{i_0} = 0$ i.e. $u_0 \notin I$. Contradiction. Ainsi, $I = \emptyset$ et

$$\boxed{y_{p+1} = \dots = y_n = 0}.$$

14. On fait une récurrence forte sur la taille de la matrice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P_n la proposition suivante.

Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'indice p . Alors il existe $p_1, \dots, p_k$ des entiers et $(e_1, \dots, e_n) =: \mathcal{B}$ une base de E tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & \\ & \ddots & & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & J_{p_k}(0) \end{pmatrix}$$

- Pour $n = 1$, il n'y a rien à faire.
- Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Supposons que $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, P_k . Par la question C.10, C.12 et C.13, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_p(0) & 0_{p, n-p} \\ 0_{n-p, p} & Z \end{pmatrix}$$

où $Z \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C})$. Si $p = n$, il n'y a rien à faire. Sinon, en notant $F = \text{Vect}(\underbrace{e_{p+1}, \dots, e_n}_{=: \mathcal{B}'})$, on a $Z = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_F)$.

- Comme pour tout $x \in F$, $u_F^x(x) = u^p(x) = 0$, u_F est nilpotente.
- F est de dimension $n-p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Il existe alors $p_1, \dots, p_k$ des entiers et $(f_{p+1}, \dots, f_n)$ une base de F tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_F) = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & \\ & \ddots & & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & J_{p_k}(0) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_p) \uplus \mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} J_p(0) & 0_{p, n-p} \\ 0_{n-p, p} & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_p(0) & & & & \\ & J_{p_1}(0) & & & \\ & & \ddots & & (0) \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & J_{p_k}(0) \end{pmatrix}.$$

On a donc P_n .

- Par le principe de récurrence, on a le résultat souhaité.

4 Représentation Ae^A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

15. Avec les notations de l'énoncé, on en déduit que

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{\alpha_i}.$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton,

$$\mathbb{C}^n = \ker(\{0_n\}) = \ker(\chi_A(A)) = \ker\left(\prod_{i=1}^s (A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}\right).$$

Comme pour tout $i \neq j$, $(X - \lambda_i)^{\alpha_i} \wedge (X - \lambda_j)^{\alpha_j} = 1$, par le lemme des noyaux, on a

$$\ker\left(\prod_{i=1}^s (A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}\right) = \bigoplus_{i=1}^s \ker((A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}) = \bigoplus_{i=1}^s F_i.$$

On a donc $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^s F_i$. Soit maintenant u l'endomorphisme canoniquement associé à A . Alors chaque F_i est stable par u puisque $F_i = \ker((X - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}(u))$. Soit $\mathcal{B}_i$ base de F_i pour chaque i . Alors en notant

$$\mathcal{B} = \bigsqcup_{i=1}^s \mathcal{B}_i,$$

on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_{F_1}) & & & \\ & \ddots & & (0) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & \ddots \\ & & & & \text{Mat}_{\mathcal{B}_s}(u_{F_s}) \end{pmatrix}.$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $u_{F_i} - \lambda_i \text{Id}_{F_i}$ est nilpotente sur F_i : en effet, pour tout $x \in F_i$,

$$0 = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}(u)(x) = (u_{F_i} - \lambda_i \text{Id}_{F_i})^{\alpha_i}(x).$$

Notons $N_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u_{F_i} - \lambda_i \text{Id}_{F_i})$. N_i est donc nilpotente et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & & & \\ & \ddots & & (0) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & \ddots \\ & & & & \lambda_s I_{\alpha_s} + N_s \end{pmatrix}.$$

16. D'après la question C.14, pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, il existe $P_i \in \text{GL}_{\alpha_i}(\mathbb{C})$, $r_i \in \mathbb{N}^*$ et $p_1^i, \dots, p_{r_i}^i \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$N_i = P_i \begin{pmatrix} J_{p_1^i}(0) & & & \\ & \ddots & & (0) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & \ddots \\ & & & & J_{p_{r_i}^i}(0) \end{pmatrix} P_i^{-1}.$$

On a donc

$$\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i = P_i \underbrace{\begin{pmatrix} J_{p_1^i}(\lambda_i) & & & \\ & \ddots & & (0) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & \ddots \\ & & & & J_{p_{r_i}^i}(\lambda_i) \end{pmatrix}}_{=: C_i} P_i^{-1}.$$

Notons $P = \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & P_s \end{pmatrix}$ d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & & \\ & \ddots & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & P_s^{-1} \end{pmatrix}$. On remarque alors que

$$P \begin{pmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & C_s \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} P_1 C_1 P_1^{-1} & & \\ & \ddots & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & P_s C_s P_s^{-1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & & \\ & \ddots & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & \lambda_s I_{\alpha_s} + N_s \end{pmatrix}$$

donc A est semblable à $\begin{pmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & C_s \end{pmatrix} =: B$ par la question D.15. Or, par la question B.9, il existe, pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket, j \in \llbracket 1, r_i \rrbracket, M_{i,j}$ tel que

$$J_{p_j^i}(\lambda_i) = M_{i,j} e^{M_{i,j}}.$$

On en déduit que

$$\lambda_i I_{p_j^i} + J_{p_j^i}(0) = J_{p_j^i}(\lambda_i) = M_{i,j} e^{M_{i,j}}.$$

Ainsi,

$$C_i = \begin{pmatrix} M_{i,1} e^{M_{i,1}} & & \\ & \ddots & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & M_{i,r_i} e^{M_{i,r_i}} \end{pmatrix}.$$

On pose

$$M_i = \begin{pmatrix} M_{i,1} & & \\ & \ddots & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & M_{i,r_i} \end{pmatrix}.$$

Alors il est immédiat que $M_i e^{M_i} = C_i$. On pose alors

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & \ddots & & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & M_s \end{pmatrix}$$

et on a alors

$$\widetilde{M} e^{\widetilde{M}} = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & \ddots & & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & C_s \end{pmatrix} = B.$$

Or, $A = PBP^{-1}$ où $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ donc avec $M = P\widetilde{M}P^{-1}$, on a $\boxed{A = Me^M}$.

FIN DU SUJET