

Ce document est constitué de trois problèmes : une étude sur **l'intégrale de WALLIS**

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta) d\theta$$

et deux applications. Premièrement, le calcul de **l'intégrale de GAUSS**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}$$

et deuxièmement, la **formule de STIRLING**

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

PROBLÈME : INTÉGRALES DE WALLIS

On pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta) d\theta$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta) d\theta.$$

2. Calculer W_0, W_1 et W_2 .

3. Montrer que $(W_n)_n$ décroît et est positive.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $W_n > 0$.

5. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

6. En déduire les valeurs de W_{2n} et W_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Montrer que $((n+1)W_{n+1}W_n)_n$ est une suite constante. Déterminer cette valeur.

8. En déduire un encadrement de la suite $(nW_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ puis montrer que cette suite converge vers $\frac{\pi}{2}$.

9. Dans la suite, x est dans $]0, 1[$.

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n W_k x^k = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos(\theta)} d\theta - R_n$$

$$\text{avec } R_n := \int_0^{\pi/2} \frac{(x \cos(\theta))^{n+1}}{1 - x \cos(\theta)} d\theta \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Montrer que $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n W_k x^k$.

(c) (Question de cours) Soit θ un réel et $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Montrer que

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} ; \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} ; \tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

(d) A l'aide du théorème de changement de variables, montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos(\theta)} d\theta = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

PROBLÈME : INTÉGRALES DE GAUSS

Ce problème utilise un résultat sur l'intégrale de Wallis ! Il s'agit de la limite trouvée en question 8.

L'objectif de ce problème est d'établir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\pi/2}.$$

On définit alors

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \end{aligned}$$

1. (Question de cours). Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.
2. Montrer que F est croissante.
3. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$. En déduire que F converge en $+\infty$. On note C cette limite.
4. Justifier pourquoi $(F(\sqrt{n}))_n$ converge et donner sa limite.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Montrer que

$$W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(\theta))^{n/2} \sin'(\theta) d\theta = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{n/2} dt.$$

- (b) Montrer que

$$F(\sqrt{n}) \geq \sqrt{n} W_{n+1}.$$

En déduire que $C \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $V_n = \int_0^{\pi/4} \cos^n(\theta) d\theta$ et $A_n = W_n - V_n$.
 - (a) Justifier pourquoi $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq V_n \leq W_n$.
 - (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, V_{n-2} = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{1 + \tan^2(\theta)}\right)^{n/2} \tan'(\theta) d\theta = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{n}}\right)^{n/2} dt.$$

- (c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, F(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} V_{n-2}.$$

En déduire que $C \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

7. Conclure.

PROBLÈME : FORMULE DE STIRLING

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_n définie par

$$u_n = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{n!}.$$

Remarque 2. On peut faire l'exercice avec $v_n = \frac{1}{u_n}$ en guise d'entraînement.

1. Déterminer un équivalent simple de $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$.
2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note ℓ la limite. En déduire un équivalent en fonction de ℓ de $n!$.
3. Avec l'étude des intégrales de Wallis, montrer que $\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.