Corrigé : Mines PC 2019 Maths 2

Thomas Chen

I. Préliminaires

1. Notons, dans toute la suite, $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f_n(x) \in O_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, puisque par le critère de Riemann, la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, par comparaison de série à terme général positif, $\sum f_n(x)$ converge absolument donc converge.

   $$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } R \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
   $$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$
   donc
   $$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}.$$
   La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \|f_n\|_\infty$ converge : cela signifie donc que $\sum f_n$ converge normalement.

   Par le théorème de continuité des séries de fonctions, $\sum f_n$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

   $$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } R \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. - La fonction $x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ est continue.
   - Par ailleurs, elle est prolongeable par continuité en 0 puisque
   $$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1.$$
   - Enfin, $\dfrac{\sin(x^2)}{x^2} \in O_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par comparaison, $x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

   On en déduit que $x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc

   $$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \mathrm{d}x \text{ converge.}}$$

3. Notons
   $$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ (t,x) & \mapsto & f(t)e^{-ixt} \end{array}.$$

- $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, |\varphi(t,x)| \leq |f(t)|$ et f est intégrable. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}, \varphi(\cdot, x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et de surcroît, φ est **dominée**.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\cdot, x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- En particulier, $\boxed{\widehat{f} \text{ est bien définie.}}$
- $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t, \cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On peut donc appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres qui assure que $\widehat{f}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

II. Etude de la dérivabilité de R en 0

4. Soit $h > 0$. Alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(nh)| \leq \frac{C}{(nh)^2+1} = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Ainsi, par comparaison, la série $\sum_{n\geq 0} f(nh)$ est absolument convergente donc $\boxed{S(h) \text{ converge}}$.

5. φ_h est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et on dispose de la majoration
$$\forall t \geq 0, |\phi_h(t)| = \left|f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)\right| \leq \frac{C}{\left(\lfloor \frac{t}{h} \rfloor h\right)^2 + 1} = O_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$
On en déduit que ϕ_h est intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \phi_h(t)\mathrm{d}t$ existe.
En particulier, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{nh} \phi_h(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \phi_h(t)\mathrm{d}t.$
Fixons $N \in \mathbb{N}$. Alors
$$\int_0^{Nh} \phi_h(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \phi_h(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kh}^{(k+1)h} f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kh}^{(k+1)h} f(kh)\mathrm{d}t = h \sum_{k=0}^{N-1} f(kh).$$
L'égalité passe donc à la limite en
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \phi_h(t)\mathrm{d}t = h \sum_{k=0}^{+\infty} f(kh) = S(h)}.$$

6. On a
$$\frac{t}{h} - 1 \leq \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor \leq \frac{t}{h}.$$
Ainsi, on en déduit que
$$0 \leq t - 1 \leq t - h \leq h \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor \leq t$$
La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc
$$0 \leq (t-1)^2 \leq \left(h \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor\right)^2$$
i.e.
$$\frac{C}{1 + \left(h \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor\right)^2} \leq \frac{C^2}{1 + (t-1)^2}.$$
Ainsi,
$$\boxed{\forall h \in]0,1], \forall t \in [1, +\infty[, |\phi_h(t)| = \left|f\left(h \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor\right)\right| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}}.$$

7. On souhaite appliquer le théorème de convergence dominée. On part de l'égalité
$$S(h) = \int_0^{+\infty} \phi_h(t)\mathrm{d}t.$$
Alors
   - ϕ_h est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$,
   - pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{h\to 0} \phi_h(t) = f(t)$ par continuité de f puisque $\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} t$,
   - si $t \in [0,1]$, alors comme $\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq \dfrac{C}{t^2+1} \leq C$, f est bornée par C donc $|\phi_h(t)| \leq C$. On a donc la **domination** :
$$\forall h \in]0,1], \forall t \in \mathbb{R}^+, |\phi_h(t)| \leq \begin{cases} \dfrac{C}{1+(t-1)^2} & \text{si } t \geq 1 \\ C & \text{si } t \in [0,1[\end{cases} =: \phi(t)$$
   ϕ est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ intégrable au voisinage de $+\infty$ puisque $\phi(t) = O_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que ϕ est intégrable donc $(t,h) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1] \mapsto \phi_h(t) \in \mathbb{C}$ est dominée.

   Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on a
$$\int_0^{+\infty} \phi_h(t)\mathrm{d}t \underset{h\to 0, h\neq 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$
   ce qui donne bien que
$$\boxed{S(h) \underset{h\to 0, h\neq 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t}.$$

8. Posons $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ lorsque $x \neq 0$ et 0 sinon. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et en 0, $\lim_{x\to 0, x\neq 0} f(x) = 0$ donc f est bien continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs,
$$\forall t \in \mathbb{R}, (t^2+1)|f(t)| = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)|\sin(t^2)| \leq 2 & \text{si} \quad |t| \geq 1 \\ (t^2+1)\dfrac{|\sin(t^2)|}{t^2} \leq (t^2+1) \leq 2 & \text{si} \quad t \leq 1 \end{cases}$$
   donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}.$$
   On peut donc utiliser la partie 2 pour obtenir, par la question 7,
$$h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) = h + h\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2h^2)}{n^2h^2} = h + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2h^2)}{n^2h} = h + \frac{1}{h}R(h^2) \underset{h\to 0, h\neq 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
   On en déduit que
$$hR(h^2) \underset{h\to 0, h\neq 0}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
   donc
$$R(h^2) \sim_{h\to 0} h\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
   donc
$$\boxed{R(x) \sim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\pi x}{2}}}.$$
   On a alors
$$\frac{R(x)-R(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{\pi x}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$
   donc $\boxed{R \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

III. Formule sommatoire de Poisson

Dans la suite, on considère des séries indexées sur $\mathbb{Z}$. On rappelle que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ converge lorsque $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} u_{-n}$ converge et dans ce cas, on note $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ sa limite définie par

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}.$$

On fait cette distinction que l'énoncé ne fait pas ...

9. **??**

- Notons pour $n \in \mathbb{Z}$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x+2n\pi) \in \mathbb{C}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq \frac{C_1}{(x+2n\pi)^2+1}.$$

Alors $|f_n(x)| = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $|f_{-n}(x)| = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi,

$$\sum_{n\geq 0} f_n(x) \text{ et } \sum_{n\geq 1} f_{-n}(x)$$

sont deux séries convergentes par comparaison donc $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2n\pi) \text{ converge}}$.

- Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
F(x+2\pi) \underset{p,q\to+\infty}{\longleftarrow} \sum_{n=0}^{p} f_n(x+2\pi) + \sum_{n=1}^{q} f_{-n}(x+2\pi) &= \sum_{n=0}^{p} f(x+2\pi+2n\pi) + \sum_{n=1}^{q} f(x+2\pi-2n\pi) \\
&= \sum_{n=1}^{p+1} f(x+2n\pi) + \sum_{n=0}^{q-1} f(x-2n\pi) \\
&= \sum_{n=0}^{p+1} f_n(x) + \sum_{n=1}^{q-1} f_{-n}(x) \underset{p,q\to+\infty}{\longrightarrow} F(x)
\end{aligned}$$

donc par unicité de la limite, $\boxed{F(x) = F(x+2\pi)}$.

-
  - Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
  - On a

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 2\pi], |f_n(x)| \leq \frac{C_1}{(x+2n\pi)^2+1} \leq \frac{C_1}{(2n\pi)^2+1}$$

  donc par passage au supremum,

  $$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, \|f_n\|_{\infty,[0,2\pi]} \leq \frac{C_1}{(2n\pi)^2+1} = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

  Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge normalement sur } [0,2\pi].}$

  On passe aux indices négatifs. On a

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 2\pi], |f_{-n}(x)| \leq \frac{C_1}{(x-2n\pi)^2+1} \leq \frac{C_1}{(2n\pi-2\pi)^2+1}$$

  donc de même, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} f_{-n} \text{ converge normalement sur } [-A, A].}$

- Par le théorème de continuité des séries de fonctions, $\sum_{n\geq 0} f_n$ et $\sum_{n\geq 1} f_{-n}$ sont continues sur $[0, 2\pi]$ et par périodicité, elles sont donc continues sur $\mathbb{R}$.

Par somme de fonctions continues, F est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

10. **??**

- Notons pour $n \in \mathbb{Z}$, $g_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \widehat{f}(n)e^{inx} \in \mathbb{C}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |g_n(x)| \leq \frac{C_2}{n^2+1}.$$

Alors $|g_n(x)| = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $|g_{-n}(x)| = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi,

$$\sum_{n\geq 0} g_n(x) \text{ et } \sum_{n\geq 1} g_{-n}(x)$$

sont deux séries convergentes par comparaison donc $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx} \text{ converge}}$.

- Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} G(x+2\pi) \underset{p,q\to+\infty}{\longleftarrow} \sum_{n=0}^{p} g_n(x+2\pi) + \sum_{n=1}^{q} g_{-n}(x+2\pi) &= \sum_{n=0}^{p} \widehat{f}(n)e^{inx}e^{2in\pi} + \sum_{n=1}^{q} \widehat{f}(-n)e^{-inx}e^{-2in\pi} \\ &= \sum_{n=0}^{p} \widehat{f}(n)e^{inx} + \sum_{n=1}^{q} \widehat{f}(-n)e^{-inx} \underset{p,q\to+\infty}{\longrightarrow} G(x) \end{aligned}$$

donc par unicité de la limite, $\boxed{G(x) = G(x+2\pi)}$.

-
  - Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, g_n est continue sur $\mathbb{R}$.
  - Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{n^2+1}$$

donc $\|g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2+1} = O_{|n|\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi,

$$\boxed{\text{les série } \sum_{n\geq 0} g_n \text{ et } \sum_{n\geq 1} g_{-n} \text{ convergent normalement sur } \mathbb{R}.}$$

  - Par le théorème de continuité des séries de fonctions, $\sum_{n\geq 0} g_n$ et $\sum_{n\geq 1} g_{-n}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Par somme de fonctions continues, G est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

11. On va utiliser le résultat admis puisque G et $2\pi F$ sont deux éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$. Soit $p \in \mathbb{Z}$. On reprend les notations de la question **??** et **??** et on introduit localement des notations :

- $F^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n, F^- = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}$
- $G^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n, F^- = \sum_{n=1}^{+\infty} g_{-n}$

de sorte que $F = F^+ + F^-, G = G^+ + G^-$. Les fonctions $F^\pm$ et $G^\pm$ sont des sommes de séries de fonctions normalement convergentes sur $[0, 2\pi]$. On peut donc intervertir série et intégrale. c_p est linéaire donc

$$\begin{aligned}
2\pi c_p(F) &= 2\pi c_p(F^+) + 2\pi c_p(F^-) \\
&= \int_0^{2\pi} F^+(t)e^{-ipt}\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} F^-(t)e^{-ipt}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} f(t+2n\pi)e^{-ipt}\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} f(t-2n\pi)e^{-ipt}\mathrm{d}t \\
&\underset{(\star)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(t+2n\pi)e^{-ipt}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(t-2n\pi)e^{-ipt}\mathrm{d}t \\
&\underset{(\star\star)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)e^{-ipt}\underbrace{e^{2in\pi p}}_{=1}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} f(t)e^{-ipt}\underbrace{e^{-2in\pi p}}_{=1}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)e^{-ipt}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} f(t)e^{-ipt}\mathrm{d}t \\
&\underset{(\star\star\star)}{=} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ipt}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-ipt}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ipt}\mathrm{d}t = \widehat{f}(p)
\end{aligned}$$

où $(\star)$ vient de l'interversion série-intégrale, $(\star\star)$ vient du changement de variable affine $u = t + 2n\pi$ pour la première intégrale et $u = t - 2n\pi$ pour la deuxième, et $(\star\star\star)$ vient de la relation de Chasles.
Ensuite, on a de même

$$\begin{aligned}
c_p(G) &= c_p(G^+) + c_p(G^-) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{int}e^{-ipt}\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(-n)e^{-int}e^{-ipt}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(-n)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(n+p)t}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)\delta_{n,p} + \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(-n)\delta_{-n,p} \\
&= \widehat{f}(p)
\end{aligned}$$

puisque $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}\mathrm{d}x = \delta_{n,0}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ ($\delta_{p,q}$ est le symbole de Kronecker).
Ainsi, $\forall p \in \mathbb{Z}, c_p(2\pi F) = c_p(G)$ donc $2\pi F = G$.

12. Posons $g(t) = f\left(\dfrac{at}{2\pi}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, (t^2+1)g(t) = t^2g(t) + g(t) &= \frac{4\pi^2}{a^2}\left(\frac{at}{2\pi}\right)^2 f\left(\frac{at}{2\pi}\right) + f\left(\frac{at}{2\pi}\right) \\
&\le \left(\frac{4\pi^2}{a^2}+1\right)\left(\left(\frac{at}{2\pi}\right)^2 f\left(\frac{at}{2\pi}\right) + f\left(\frac{at}{2\pi}\right)\right) \\
&= \left(\frac{4\pi^2}{a^2}+1\right)C_1 =: D_1.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on eput calculer $\widehat{g}$ d'après la question 3 car g est continue par morceaux et intégrable

$$\forall t \in \mathbb{R}, \widehat{g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-itx}\mathrm{d}x \underset{u=ax/2\pi}{=} \frac{2\pi}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-itu\frac{2\pi}{a}}\mathrm{d}u = \frac{2\pi}{a}\widehat{f}\left(\frac{2\pi t}{a}\right).$$

En reprenant le calcul de « $(t^2+1)g(t)$ » précédent, on constate qu'avec $D_2 = \frac{2\pi}{a}\left(\frac{a^2}{4\pi^2}+1\right)C_2$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\widehat{g}(t)| \leq \frac{D_2}{t^2+1}.$$

Ainsi, on peut utiliser les résultats de cette partie :dis

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(2n\pi)$$

i.e.

$$\frac{2\pi}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2\pi n}{a}\right) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na).$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2\pi n}{a}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na).}$$

IV. Étude de la dérivabilité de R en π

13. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{e^{it^2}-1}{t^2} = \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(it^2)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{i^k t^{2(k-1)}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i^{k+1}}{(k+1)!}t^{2k} = f(t).$$

Ainsi, la série entière définie sur $\mathbb{R}$ $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i^{k+1}}{(k+1)!}t^{2k}$ coïncide avec f sur $\mathbb{R}$: f est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc en particulier $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

14. Soit $t \neq 0$. Alors

$$f'(t) = \frac{2ite^{it^2}}{t^2} - \frac{2}{t^3}(e^{it^2}-1) = \frac{1}{t}(2ie^{it^2}) - \frac{2}{t^3}(e^{it^2}-1)$$

donc

$$|f'(t)| \leq \frac{2}{t} + \frac{2}{t^3}(1+1) = O_{t\to\pm\infty}\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\boxed{f'(t) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0}$. Ensuite,

$$f''(t) = -4e^{it^2} - \frac{1}{t^2}(2ie^{it^2}) - \frac{2}{t}f'(t) + \frac{2}{t^2}f(t).$$

On a

$$\left|\frac{1}{t^2}(2ie^{it^2})\right| \leq \frac{2}{t^2} \ ; \ \left|\frac{2}{t}f'(t)\right| = O_{t\to\pm\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right) \ ; \ \frac{2}{t^2}f(t) = O_{t\to\pm\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

puisque f est bornée : en effet, $|f(t)| \leq \frac{2}{t^2} \leq 2$ lorsque $t \geq 1$ et est bornée sur $[-1,1]$ par le théorème des bornes atteintes. Ainsi,

$$\boxed{f''(t) = -4e^{it^2} + O_{t\to\pm\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)}.$$

15. Puisque l'intégrande est paire, il suffit de montrer que $\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x$ converge.

    - La fonction $x \in [0,+\infty[\mapsto e^{ix^2} \in \mathbb{C}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

- Soit $A \geq 1$. On a

$$\int_1^A e^{ix^2}\mathrm{d}x = \int_1^A \frac{1}{2ix} 2ixe^{ix^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{ix^2}}{2ix}\right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{2ix^2}e^{ix^2}\mathrm{d}x$$

On a

$$\left[\frac{e^{ix^2}}{2ix}\right]_1^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^i}{2i}$$

puisque $x \mapsto e^{ix^2}$ est bornée et $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

- La fonction $x \in [1, +\infty[\mapsto \dfrac{1}{x^2}e^{ix^2} \in \mathbb{C}$ est continue et vérifie $\dfrac{1}{x^2}e^{ix^2} = O_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2ix^2}e^{ix^2}\mathrm{d}x \text{ existe.}$$

Ainsi, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x$ converge. Par parité,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x \text{ converge}}.$$

16. f est clairement continue par morceaux et elle est intégrable au voisinage de $\pm\infty$ puisque $f(t) = O_{t\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On peut donc calculer sa transformée de Fourier $\widehat{f}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t.$$

Soit $A \leq B$ deux réels. Soit $|x| \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_A^B f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{1}{-ix}e^{-ixt}\right]_A^B + \frac{1}{ix}\int_A^B f'(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t \\
&= \left[f(t)\frac{1}{-ix}e^{-ixt}\right]_A^B + \frac{1}{ix}\left[f'(t)\frac{1}{-ix}e^{-ixt}\right]_A^B - \frac{1}{x^2}\int_A^B f''(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Comme $f(t) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ tout comme $f'(t)$ et que $t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{-ix}e^{-ixt} \in \mathbb{C}$ est bornée, les deux crochets convergent vers 0 quand $A \to -\infty, B \to +\infty$.

La question 3 assure que $\displaystyle\int_A^B f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t$ converge quand $A \to -\infty, B \to +\infty$ donc l'égalité passe à la limite en

$$\widehat{f}(x) = -\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t.$$

Notons $r(t) = f''(t) + 4e^{it^2}$. Alors r est continue et vérifie, par la question 14, $r(t) = O_{t\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc r est intégrable au voisinage de $\pm\infty$ donc intégrable sur $\mathbb{R}$. On calcule

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x) &= -\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (-4e^{it^2} + r(t))e^{-ixt}\mathrm{d}t \\
&\underset{\star}{=} -\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} -4e^{it^2-ixt}\mathrm{d}t - \frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{x^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-x/2)^2}\mathrm{d}t}_{=I \text{ avec } u=t-x/2}\, e^{-ix^2/4} - \frac{1}{x^2}\widehat{r}(x).
\end{aligned}$$

Comme I converge par la question 15 et que $|\widehat{r}(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |r(t)| \mathrm{d}t < +\infty$, on a

$$|\widehat{f}(x)| = \left| \frac{4}{x^2} I e^{-ix^2/4} - \frac{1}{x^2} \widehat{r}(x) \right| = O_{x \to \pm\infty}\left(\frac{1}{x^2} \right).$$

17. On sait que f est continue et vérifie $f(t) = O_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t^2} \right)$. Il existe donc une fonction bornée η telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{\eta(t)}{t^2}.$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, (t^2+1) f(t) = t^2 f(t) + f(t) = \eta(t) + f(t)$$

et $\eta + f$ est bornée, disons par C_1, puisque f l'est (vu à la question 14). Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq C_1 \frac{1}{t^2+1}$
Puisque $\widehat{f}(x) = O_{x \to \pm\infty}\left(\frac{1}{x^2} \right)$ par la question 16, et puisque $\widehat{f}$ est bornée (vu à la question 14 : r est bornée par $\int_{-\infty}^{+\infty} |r|$), on a de même l'existence de $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\widehat{f}(x)| \leq \frac{C_2}{1+x^2}.$$

On peut donc appliquer la formule sommatoire de Poisson. Remarquons déjà que f est paire donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f}(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ixt} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t) e^{-ixt} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} \mathrm{d}t = \widehat{f}(x)$$

par le changement de variable affine $t \to -t$. Ainsi, $\widehat{f}$ est paire. Appliquons maintenant la formuel sommatoire de Poisson

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a} \right)$$

i.e., par parité de f et de $\widehat{f}$,

$$i + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} f(na) = \frac{1}{a} \left(\widehat{f}(0) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a} \right) \right).$$

Posons $a = \sqrt{x}$ pour $x > 0$. Alors

$$f(na) = f(n\sqrt{x}) = \frac{e^{in^2 x} - 1}{n^2 x}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(na) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2 x} - 1}{n^2 x} = \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2 x}}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{x}(F(x) - F(0)).$$

Notons $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}} \right)$. Alors on a

$$i + \frac{2}{x}(F(x) - F(0)) = \frac{1}{\sqrt{x}} \widehat{f}(0) + \frac{2}{\sqrt{x}} S(x)$$

ce qui s'écrit

$$F(x) = F(0) + \frac{\widehat{f}(0)}{2} \sqrt{x} - \frac{i}{2} x + \sqrt{x} S(x).$$

Il suffit, pour conclure, de montrer que $S(x) = O_{x\to 0^+}(x)$. On a

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq \frac{C_2}{\frac{4n^2\pi^2}{x} + 1} = \frac{C_2 x}{4n^2\pi^2 + x} \leq x\frac{C_2}{4\pi^2}\frac{1}{n^2}.$$

Ainsi,

$$\forall x > 0, |S(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq x\,\frac{C_2}{4\pi^2}\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}}_{<+\infty}$$

donc $S(x) = O_{x\to 0^+}(x)$. On a donc

$$F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx + O_{x\to 0^+}(x^{3/2})$$

avec $a = \dfrac{\widehat{f}(0)}{2}$ et $b = -\dfrac{i}{2}$. On va calculer a.

$$a = \frac{1}{2}\widehat{f}(0) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it^2}-1}{t^2}\mathrm{d}t$$

Pour faire apparaître I, on réalise une intégration par parties en dérivant le numérateur. Soit $A < B$ deux réels. On a

$$\int_A^B \frac{e^{it^2}-1}{t^2}\mathrm{d}t = \underbrace{\left[-\frac{e^{it^2}-1}{t}\right]_A^B}_{\underset{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}{\longrightarrow} 0} + 2i\int_A^B e^{it^2}\mathrm{d}t$$

donc l'égalité passe à la limite quand $A \to -\infty$ et $B \to +\infty$ en

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it^2}-1}{t^2}\mathrm{d}t = 0 + i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t = iI.$$

On a donc

$$F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx + O_{x\to 0^+}(x^{3/2})$$

$\boxed{\text{avec } a = iI \text{ et } b = -\dfrac{i}{2}}$.

18. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$F(\pi + x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in^2\pi}e^{in^2x}}{n^2}.$$

Comme $\left(\dfrac{e^{in^2\pi}e^{in^2x}}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ est sommable (puisque $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge), on a

$$F(\pi + x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in^2\pi}e^{in^2x}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i(2n+1)^2\pi}e^{i(2n+1)^2x}}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i4n^2\pi}e^{i4n^2x}}{4n^2}.$$

On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i4n^2\pi}e^{i4n^2x}}{4n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i4n^2x}}{4n^2} = \frac{1}{4}F(4x)$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i(2n+1)^2\pi}e^{i(2n+1)^2x}}{(2n+1)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i(2n+1)^2x}}{(2n+1)^2}.$$

Or, comme $\left(\dfrac{e^{in^2x}}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ est sommable

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i(2n+1)^2x}}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i4n^2x}}{4n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i(2n+1)^2x}}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4}F(4x).$$

Ainsi,

$$\boxed{F(\pi + x) = \left(\frac{1}{4}F(4x) - F(x)\right) + \frac{1}{4}F(4x) = \frac{1}{2}F(4x) - F(x)}.$$

19. On a

$$F(4x) = F(0) + 2a\sqrt{x} + 4bx + O_{x\to 0^+}(x^{3/2})$$

donc

$$F(\pi + x) = \frac{1}{2}F(4x) - F(x) = -\frac{1}{2}F(0) + bx + O_{x\to 0^+}(x^{3/2}).$$

Or,

$$R(\pi + x) = \Im(F(\pi + x)) = \Im(b)x + O_{x\to 0^+}(x^{3/2}) = \Im(b)x + o_{x\to 0^+}(x).$$

Ainsi, R admet un DL_1 en π donc

$$\boxed{R \text{ est dérivable en } \pi \text{ et on a } R'(\pi) = \Im(b) = \frac{-1}{2}}.$$