

# Densité des matrices diagonalisables

Thomas CHEN

On présente ici un exercice pas si facile. Quelle est l'adhérence des matrices diagonalisables ?

**Exercice 1.** Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Corrigé : Il suffit d'utiliser le lemme suivant :

$$\forall (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{C}^k, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall i \neq j, a_i + \frac{i}{n} \neq a_j + \frac{j}{n}.$$

*Démonstration.* Considérons  $a_i, a_j$  quelconque,  $i \neq j$ . Si  $a_i = a_j$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_i + \frac{i}{n} \neq a_j + \frac{j}{n}$ . Si  $a_i \neq a_j$ , puisque  $\mathbb{R}$  est séparé, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(a_i, \varepsilon) \cap B(a_j, \varepsilon) = \emptyset$ . Puisqu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  vérifiant  $\forall n \geq n_0, i/n \leq \varepsilon \wedge j/n \leq \varepsilon$ , alors  $\forall n \geq n_0 + 1, a_i + \frac{i}{n} \neq a_j + \frac{j}{n}$ . Le  $n_0$  dépend de  $i, j$ . Puisqu'il y a un nombre fini de  $i, j$ , il y a un nombre fini de  $n_0$  candidats : on prend le plus grand.  $\square$

Maintenant, considérons  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Alors il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  vérifiant  $A = PTP^{-1}$  avec  $T$ , une matrice triangulaire supérieure de la diagonale  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}_{p \geq n_0}$ , on note  $T_p = T + \text{diag}(1/p, 2/p, \dots, n/p)$ . Alors  $T_p$  est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples par le lemme. Donc  $A_p = PT_pP^{-1}$  est diagonalisable, et ce, pour tout  $p \geq n_0$ . Puisque  $M \mapsto PMP^{-1}$  est continue et que  $T_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} T$ , on en déduit que  $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$ . Donc  $A$  est bien limite de matrices diagonalisables.