PARTIEL. 2024 LDD.

Exercice 1

1) A, B, C, D sont 4 séries entières de rayon de convergence 1, obtenues par dérivations successives.

critère de d'Alembert par exemple

$$A(z) = \sum_{k\geq 0} z^k = 1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1-z}$$

$$B(z) = \sum_{k\geq 0} k z^{k-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$C(z) = \sum_{k\geq 0} k(k-1) z^{k-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$$

$$D(z) = \sum k(k-1)(k-2) z^{k-3} = \frac{6}{(1-z)^4}$$

$\forall \ |z|<1$

(2) $$\mathbb{P}[X=k] = p(1-p)^{k-1}, \quad k \geq 1$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\geq 1} k \cdot p(1-p)^{k-1} = p \, B(1-p) = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

(3) $$\mathbb{P}[Y=k] = \alpha\,(k-1)\,p(1-p)^{k-1}$$

$$1 = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[Y=k] = \alpha\left(\sum_{k\geq 1} k\,p(1-p)^{k-1} - \sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1}\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{1}{p} - 1\right)$$

$$\Longleftrightarrow \alpha = \frac{p}{1-p} \quad \text{or} \quad \mathbb{P}[Y=k] = \boxed{(k-1)\,p^2(1-p)^{k-2}} \quad (\sim \mathrm{NegBin}(2,p)).$$

(4) $$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k\geq 1} k(k-1)\,p^2(1-p)^{k-2} = p^2\, C(1-p) = p^2 \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \boxed{\frac{2}{p}}$$

(5) $$\mathbb{P}[Z=k] = \beta\,(k-1)(k-2)\,p(1-p)^{k-1}$$

$$1 = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[Z=k] = \beta \sum_{k\geq \cancel{1}2} \overset{j=k-1}{(k-1)}(k-2)\,p(1-p)^{k-1} = \beta\,p(1-p)^2 \sum_{j\geq 1} j(j-1)(1-p)^{j-2}$$

$$= \mathbb{P}\, p(1-p)^2 \quad C(1-p) = \mathbb{P} \quad p(1-p)^2 \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \mathbb{P}\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbb{P} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[Z=k] = \boxed{\frac{(k-1)(k-2)}{2} \quad p^3 (1-p)^{k-3}}$$

6

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k\geq 1} k \frac{(k-1)(k-2)}{2} p^3 (1-p)^{k-3}$$

$$= \frac{1}{2} p^3 \; D(1-p) = \frac{1}{2} p^3 \frac{6}{(1-(1-p))^4} = \boxed{\frac{3}{p}}.$$

Exercice 2

1 . $X \overset{loi}{=} X+c$. Notons F la FdR de X.

$$F(t) = \mathbb{P}[X \leq t] = \mathbb{P}[X+c \leq t] = \mathbb{P}[X \leq t-c] = F(t-c)$$

donc $F(t) = F(t-nc) = F(-\infty) = 0$ absurde!

PAS DE SOLUTION.

2. $X = cX$ avec $(c>0$ et $c \neq 1)$

$F(t) = F\left(t/c\right)$

donc $\forall\, t \geq 0$, $F(t) = F(0)$ (par continuité à droite de F en 0)

$\forall\, t<0$, $F(t) = F(0_-)$

Ainsi $F(0-) = F(-\infty) = 0$, et $F(0) = F(\infty) = 1$

d'où $\mathbb{P}(X=0) = 1$, càd $X \sim \delta_0$.

3. $X = X^4$. Notons que $\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X^4 \geq 0) = 1$.

$t \geq 0$ $F(t) = F(t^{1/4})$ ou encore $F(t) = F(t^4) = \boxed{F(t^{4^n})}$

or, $t^{4^n} \longrightarrow 0$ si $0 \leq t < 1$

$$\begin{cases} = 1 & \text{si } t = 1 \\ \longrightarrow +\infty & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Ainsi $F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ F(0), & 0 \leq t < 1 \\ F(1), & t = 1 \\ F(\infty), & t > 1 \end{cases}$

par continuité à droite en 1, $F(1) = F(\infty)$
$\underline{\underline{= 1}}$

donc $X \sim$ Ber ($\underline{\underline{\text{paramètre bien}}}$)

on compose :

$X \overset{p.s.}{=} \varphi(X)$

$\overset{p.s.}{=} \varphi(\varphi(X))$

4. $X \overset{(loi)}{=} \dfrac{1}{X^2} \Rightarrow \boxed{X \overset{(loi)}{=} \dfrac{1}{\left(\frac{1}{X^2}\right)^2} = X^4}$

de plus, $\underline{P(X \neq 0) = 1}$ sinon l'équation n'a pas de sens donc X solution de l'équation précédente avec $P(X\neq 0)=1$, ie

$P(X=1)=1$ ie $X\sim\delta_1$.

⑤ $X \overset{(loi)}{=} \dfrac{1}{X}$

(a) $P[Y>1]=1$

$Z := \dfrac{1}{BY+(1-B)Y} = \begin{cases} \dfrac{1}{Y} & \text{si } B=1 \\ Y & \text{si } B=0 \end{cases}$ avec proba $1/2$ — $1/2$ (ind de Y)

$= (1/Y)\,B + Y\,(1-B)$

OU

(or B a m loi que $1-B$ est encore indépendant de Y)

montrer que $Z \overset{loi}{=} \dfrac{1}{Z}$

(b) Maintenant, si X est solution,

$$X \overset{\text{loi}}{=} \frac{1}{X}$$

$$X = \begin{cases} y & \text{avec proba } p \\ 1 & \text{———— } q \\ z & \text{———— } r \end{cases}$$

$y = (X \mid X<1)$

$z = (X \mid X>1)$

$$\frac{1}{X} = \begin{cases} 1/z & \text{—— } r \\ 1 & \text{—— } q \\ \frac{1}{y} & \text{—— } p \end{cases}$$

donc $\left(y = \frac{1}{z} \text{ et } p = r \right)$

ainsi $X = \begin{cases} y & \text{—— } p \\ \boxed{1 \quad \text{—— } \quad 1-2p>0} \\ 1/y & \text{—— } p \end{cases}$ $(p \leq 1/2)$.

seule différence avec avant (question (a)).

est la solution générale.

Exercice 3

1. $X \sim \mathrm{Unif}(0,1)$. $0 \leq a \leq 1$

$$\mathbb{E}[|X-a|] = \int_0^1 |x-a|\,dx = \int_0^a (a-x)\,dx + \int_a^1 (x-a)\,dx$$

$$= \frac{a^2}{2} + \frac{(1-a)^2}{2} \quad \left(\text{d'où } \alpha = 1/2 \text{ et } \beta = 1/2\right).$$

$$= \frac{1}{2}\big(\underbrace{a^2+(1-a)^2}_{2a^2-2a+1}\big) = a^2 - a + \frac{1}{2} = \underbrace{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}_{\geq 1/4 \text{ avec égalité si } a = 1/2}$$

2

3. $\mathbb{E}[|X-a| \wedge |X-b|] = \int_0^1 (|x-a| \wedge |x-b|)\,dx$

$$= \int_0^a (a-x)\,dx + \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)\,dx + \int_b^1 (x-b)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2 + \frac{1}{2}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(1-b)^2}{2}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}}}_{\alpha} a^2 + \underbrace{\boxed{\frac{1}{4}}}_{\beta}(b-a)^2 + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}}}_{\gamma}(1-b)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(2a^2 + (b-a)^2 + 2(1-b)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\underbrace{3a^2 + 3b^2 - 2ab - 4b}_{\phi} + 2\right).$$

4. Maintenant, $2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(b-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\left(a-\frac{1}{4}\right)-\left(b-\frac{3}{4}\right)\right)^2 \geq 0$

avec égalité ssi $a = 1/4$ et $b = 3/4$

$$= 2\left(a^2 - \cancel{\frac{1}{2}}a + \frac{1}{16}\right) + 2\left(b^2 - \frac{3}{2}b + \frac{9}{16}\right)$$

$$\left(a-b+\frac{1}{2}\right)^2 \qquad + \left(a^2+b^2-2ab\right) + \left(\cancel{a}-b\right) + \frac{1}{4}$$

$$= 3a^2 + 3b^2 - 4b - 2ab + \frac{3}{2}$$

5. donc $*\left(3a^2+3b^2-2ab-4b+2\right) \geq 1/2$ avec égalité si $\left(a = 1/4 \text{ et } b = 3/4\right)$

ce qui résout la minimisation de $(a,b) \longmapsto E[|X-a| \wedge |X-b|]$.

6. $(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto E[|X-a_1| \wedge \ldots \wedge |X-a_n|]$.

$$= \frac{1}{4}\left(\underbrace{2a_1^2 + (a_2-a_1)^2 + \ldots (a_n-a_{n-1})^2}_{\varphi(a_1, \ldots, a_n)} + 2(1-a_n)^2\right).$$

BONUS

$2a_1^2 + (a_2-a_1)^2$

$4a_1 = 2(a_2-a_1)$

$6a_1 = 2a_2$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = 4a_1 - 2(a_2-a_1) = 0 \text{ si } \boxed{a_2 = 3a_1}$$

$2 \leq i \leq n-1$: $$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 2(a_i - a_{i-1}) - 2(a_{i+1} - a_i) = \underbrace{-2a_{i-1} + 4a_i - 2a_{i+1}}_{} = 0$$

si $\boxed{a_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = 2(a_n - a_{n-1}) - 4(1-a_n).$$

si $\boxed{3(1-a_n) = 1 - a_{n-1}}$

$$\Leftarrow \left(a_i = \frac{2i-1}{2n} \right)$$

$1 \leq i \leq n.$

$1 \cdot 3 \cdot$

4