Quotients de Rayleigh

Thomas Chen

L'étude des quotients de Rayleigh est classique au concours. Intimement liée au théorème spectral, elle permet de fournir une preuve de ce dernier.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On définit l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \dfrac{\langle AX, X\rangle}{\|X\|^2} \end{array}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne associée.

1. A l'aide du théorème spectral, montrer que f est bornée et atteint ses bornes.
2. Sans utiliser le théorème spectral, montrer le même résultat.
3. On donne ici deux preuves du théorème spectral. La deuxième utilise le calcul différentiel.
   (a) On note $\lambda = \sup\limits_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}} f(X)$. Montrer que $\lambda I_n - A$ est symétrique positive. En déduire que λ est une valeur propre de A puis démontrer le théorème spectral.
   (b) Montrer que f est différentiable sur $E\backslash\{0\}$ et calculer sa différentielle en tout point de $E\backslash\{0\}$ et en déduire une preuve du théorème spectral.

Corrigé :

1. Par le théorème spectral, il existe $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ valeurs propres de A et $e_1, \cdots, e_n$ vecteurs propres associées aux valeurs propres respectivement telle que $(e_1, \cdots, e_n)$ forment une base orthogonale. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0$ et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ des réels tels que
$$X = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k.$$
Alors
$$\langle AX, X\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \mu_i A e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mu_i \mu_j \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i^2.$$
Ainsi,
$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2.$$
Puisque $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i^2 = \langle X, X\rangle$, on a finalement
$$\lambda_1 \leq f(X) \leq \lambda_n.$$
f est donc bornée. f atteint ses bornes puisque $f(e_1) = \lambda_1$ et $f(e_n) = \lambda_n$.
2. Par bilinéarité du produit scalaire, on a
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}, f(X) = \left\langle A\frac{1}{\|X\|}X, \frac{1}{\|X\|}X \right\rangle.$$

Ainsi, en notant $S = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \|X\| = 1\}$, puisque $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}, \dfrac{1}{\|X\|}X \in S$, on a

$$\inf_{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}} f(X) = \inf_{Y\in S} f(Y)\ , \quad \sup_{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}} f(X) = \sup_{Y\in S} f(Y).$$

S est bornée et $S = \|\cdot\|^{-1}(\{1\})$ donc est fermé car $\|\cdot\|$ est continue – par exemple, par la deuxième inégalité triangulaire, elle est 1-lipschitzienne – et $\{1\}$ est un fermé : S était donc l'image réciproque d'un fermé par une application continue. S étant inclus dans E de dimension finie, S est compact.

$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto AX$ est continue car linéaire en dimension finie. $X \mapsto \langle AX, X\rangle$ est continue puisque par Cauchy-Schwarz, $|\langle AX, X\rangle| \leq \|AX\|\|X\| \leq \|\!|A|\!\|\|X\|^2$. [1] Ainsi, en particulier, $X \in S \mapsto \langle AX, X\rangle$ et continue et atteint ses bornes par le théorème des bornes atteintes : il existe donc $a, b \in S$ tel que

$$\inf_{x\in E\backslash\{0\}} f(x) = \inf_{y\in S} f(y) = f(a)\ , \quad \sup_{x\in E\backslash\{0\}} f(x) = \sup_{y\in S} f(y) = f(b).$$

Ainsi, f est bornée sur $E\backslash\{0\}$ et atteint ses bornes.

3. (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$. Alors

$$\langle(\lambda I_n - A)X, X\rangle = \lambda\langle X, X\rangle - \langle AX, X\rangle = \lambda\|X\|^2 - \|X\|^2 f(X) = (\lambda - f(X))\|X\|^2 \geq 0.$$

Ainsi, $\lambda I_n - A$ est symétrique (car A l'est) positive. Notons B cette matrice. Alors

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle BX, Y\rangle^2 \leq \langle BX, X\rangle\langle BY, Y\rangle.$$

Ceci est vrai pour toute matrice symétrique positive. Je présente deux preuves.

i. On redémontre Cauchy-Schwarz et c'est la même méthode. Par contre, on n'a pas le cas d'égalité car lui nécessite le caractère défini du produit scalaire ! $X, Y \mapsto \langle BX, Y\rangle$ est symétrique si B l'est, positif si B l'est.

ii. On écrit C racine carrée de B (c'est classique). C est donc symétrique. On a alors, pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle BX, Y\rangle^2 &= \langle C^T CX, Y\rangle^2 \\ &= \langle CX, CY\rangle^2 \\ &\underset{C.S.}{\leq} \|CX\|^2\|CY\|^2 \\ &= \langle CX, CX\rangle\langle CY, CY\rangle \\ &= \langle BX, X\rangle\langle BY, Y\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $X_0 \in S$ tel que $f(X_0) = \lambda$, on a $\langle BX_0, X_0\rangle = 0$ et donc

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle BX_0, Y\rangle^2 \leq 0.$$

Ainsi, $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}, \langle BX_0, Y\rangle = 0$ donc $BX_0 = 0$. Ainsi, $\lambda X_0 - AX_0 = 0$ donc λ est valeur propre de A et X_0 est un vecteur propre.

On peut passer maintenant à la preuve du théorème spectral. On conclut par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le résultat est clair. Supposons que l'on puisse trouver une base orthonormale de diagonalisation pour A lorsque $A \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$ pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et u endomorphisme canoniquement associée (on rappelle que la base canonique est orthonormée). Par la question précédente, il existe un couple valeur propre/vecteur propre (λ, x_0) [2] dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tel que $u(x_0) = \lambda x_0$.

1. On peut aussi dire que $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto \langle AX, Y\rangle$ est bilinéaire donc continue car on est en dimension finie et que $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto (X, X)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ est continue : on conclut par composition.
2. et x_0 est de norme 1

Soit $H = (x_0)^\perp$. Alors u stabilise $\mathrm{Vect}(x_0)$ donc $u = u^*$ stabilise H. Ainsi, u_H, l'induit de u sur H est bien défini et est un endomorphisme de H qui est de dimension $n-1$. Ainsi, il existe une base de H orthonormale qui diagonalise u_H. On concatène cette base avec $\{x_0\}$ et on obtient une base orthonormale (puisque $x_0 \perp H$) qui diagonalise u.

Par le principe de récurrence, le théorème spectral est démontré.

(b) *On rappelle que le calcul différentiel dans un autre espace que $\mathbb{R}^n$ amène à des délicatesses. Dans $\mathbb{R}^n$, on dispose d'une base canonique où la plupart des calculs sont faits dans cette base. Ici, E est de dimension finie donc on pourrait plonger dans $\mathbb{R}^n$ mais cela serait maladroit. Contentons-nous de la définition de la différentielle, à savoir un développement limité.*

Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire, en notant $B(x) = \langle u(x), x\rangle$

$\forall h \in E, B(x+h) = \langle u(x+h), x+h\rangle = \langle u(x)+u(h), x+h\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(h), x\rangle + \langle u(x), h\rangle + \langle u(h), h\rangle.$

u étant symétrique, $\langle u(x), h\rangle = \langle u(h), x\rangle$ pour tout $x, h \in E$. De plus, par Cauchy-Schwarz, $|\langle u(h), h\rangle| \leq \|u(h)\|\|h\| \leq \|\!|u|\!\|\|h\|^2 = o_{h\to 0}(\|h\|)$[3]. Finalement,

$$\forall h \in E, B(x+h) = B(x) + 2\langle u(x), h\rangle + o_{h\to 0}(\|h\|).$$

De plus,

$$\forall h \in E, \|x+h\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, h\rangle + o_{h\to 0}(\|h\|).$$

Ainsi, par quotient,

$$\forall h \in E, \frac{1}{\|x+h\|^2} = \frac{1}{\|x\|^2}\frac{1}{1+\frac{2\langle x,h\rangle}{\|x\|^2} + o_{h\to 0}(\|h\|)} = \frac{1}{\|x\|^2}\left(1 - \frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^2} + o_{h\to 0}(\|h\|)\right).$$

Ainsi, par produit,

$$\forall h \in E, f(x+h) = \frac{1}{\|x\|^2}\left(\langle u(x), x\rangle + 2\langle u(x), h\rangle - \frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^2}\langle u(x), x\rangle + o_{h\to 0}(\|h\|)\right) = f(x) + a_x(h) + o_{h\to 0}(\|h\|)$$

avec

$$a_x(h) = \frac{2}{\|x\|^2}\left(\langle u(x), h\rangle - \langle x, h\rangle f(x)\right) = \left\langle \frac{2(u(x) - f(x)x)}{\|x\|^2}, h\right\rangle.$$

Ainsi, f est différentiable en x pour tout $x \in E\backslash\{0\}$ et

$$df_x(h) = \left\langle \frac{2(u(x) - xf(x))}{\|x\|^2}, h\right\rangle \text{ et } \nabla f(x) = \frac{2(u(x) - f(x)x)}{\|x\|^2}.$$

On peut passer maintenant à la preuve du théorème spectral. Montrons donc le théorème spectral par récurrence sur la dimension de E.

- Si $n = 1$, c'est clair.
- Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$. La question 1 nous a donné $a \in S$ tel que $\inf\limits_{x \in E\backslash\{0\}} f(x) = f(a)$. Puisque $\{0\}$ est un fermé, $E\backslash\{0\}$ est un ouvert donc tout extremum de f dans $E\backslash\{0\}$ est point critique de f car f y est différentiable. Ainsi, $\nabla f(a) = 0$ donc $u(a) - f(a)a = 0$ et $u(a) = f(a)a$: a est non nul donc a est vecteur propre pour u pour la valeur propre $f(a)$.
  - Si $\mathcal{E}_{f(a)}(u) = E$, alors $u = f(a)\mathrm{Id}_E$ donc u est diagonalisable en base orthonormée.
  - Si ce n'est pas le cas, comme $\mathcal{E}_{f(a)}(u)$ est stable par u et u est symétrique, l'orthogonal $\left(\mathcal{E}_{f(a)}(u)\right)^\perp$ est stable par $u^* = u$. Ainsi, on peut définir $\widetilde{u}$ l'induit par u sur $\left(\mathcal{E}_{f(a)}(u)\right)^\perp$. Par hypothèse de récurrence, comme $\dim\left(\left(\mathcal{E}_{f(a)}(u)\right)^\perp\right) \in [\![1, n-1]\!]$, on dispose d'une base de $\left(\mathcal{E}_{f(a)}(u)\right)^\perp$ de diagonalisation orthonormée pour $\widetilde{u}$.

  En concaténant une base de $\mathcal{E}_{f(a)}(u)$ et la base précédente, on obtient une base de diagonalisation orthonormée de u. Le théorème spectral est démontré pour la dimension n.

Par principe de récurrence, le théorème spectral est démontré.

3. On n'a pas besoin d'être si précis. u étant continue et $u(0) = 0$, la première estimée donnait déjà le $o(|h|)$ souhaité.