Soutenance de mémoire

Théorie spectrale d'opérateurs périodiques

Thomas Chen

11 septembre 2025

Introduction au problème

Énoncé

Soit $V \in \mathcal{C}^0_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π-périodique. On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$-y''(x) + V(x)y(x) = \lambda y(x) \tag{1}$$

avec les conditions aux bords

$$(y(2\pi), y'(2\pi)) = e^{i\theta}(y(0), y'(0)) \tag{2}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi[$.

Lorsque $\theta = 0$, on parle de problème périodique et lorsque $\theta = \pi$, on parle de problème semipériodique.

Discriminant et matrice de monodromie

La théorie de Floquet introduit la matrice $M(\lambda)$ dite de monodromie définie par $M(\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(2\pi, \lambda) & \varphi_2(2\pi, \lambda) \\ \varphi_1'(2\pi, \lambda) & \varphi_2'(2\pi, \lambda) \end{pmatrix}$ ainsi que la quantité $\Delta(\lambda) = \mathrm{tr}(M)$ dite discriminant où $(\varphi_1(\cdot, \lambda), \varphi_2(\cdot, \lambda))$ est une base de solutions de (1).

La valeur de Δ détermine les propriétés qualitatives des fonctions propres de l'opérateur.

Discriminant

Théorème

- (1) est instable si, et seulement si, $|D(\lambda)| > 2$
- (1) est stable si, et seulement si, $|D| < 2$ ou ($|D(\lambda)| = 2$ et $M = \pm I_2$).
- (1) est conditionnellement stable si, et seulement si, $|D(\lambda)| = 2$ et $M \neq I_2$.

Si $D(\lambda) = 2$ (resp $D(\lambda) = -2$), alors (1) admet une solution 2π-périodique (resp. 2π-antipériodique) non triviale. Si de plus $M(\lambda) = I_2$ (resp. $M(\lambda) = -I_2$)), alors (1) n'a que des solutions périodiques (resp. antipériodiques).

Théorème

On note $(\lambda_n)_n$ (resp. $(\mu_n)_n$) les valeurs propres du problème périodique (resp. antipériodique) associé à (1). Alors

1. $\lambda_0 < \mu_0 \leq \mu_1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_2 \leq \mu_3 < \lambda_3 \leq \cdots$
2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, D décroît strictement sur $[\lambda_{2k}, \mu_{2k}]$, croît strictement sur $[\mu_{2k+1}, \lambda_{2k+1}]$.*
3. *Pour tout $\lambda \in]-\infty, \lambda_0[\cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]\lambda_{2k+1}, \lambda_{2k+2}[$, on a $D(\lambda) > 2$.*
4. *Pour tout $\lambda \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]\mu_{2k}, \mu_{2k+1}[$, $D(\lambda) < -2$.*

Illustration numérique d'un discriminant

En $1D$, on regarde $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V$ avec $V(x) = \cos(x)$ (équation de Mathieu).

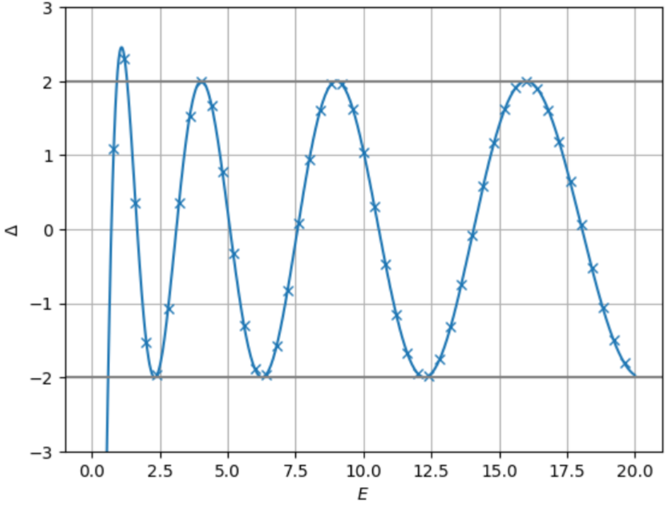
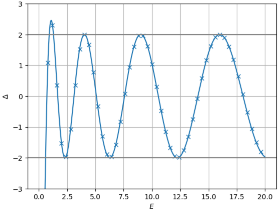


Figure – $E \mapsto \Delta(E)$ sur $[0, 20]$

Illustration numérique d'un discriminant



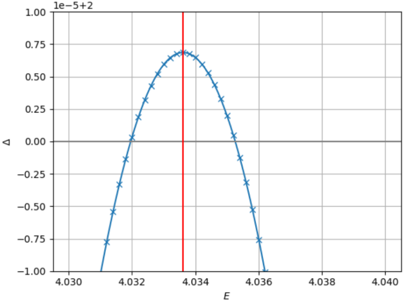


Figure – $E \mapsto \Delta(E)$ sur $[4.03, 4.04]$, précision en y à 10^{-5}

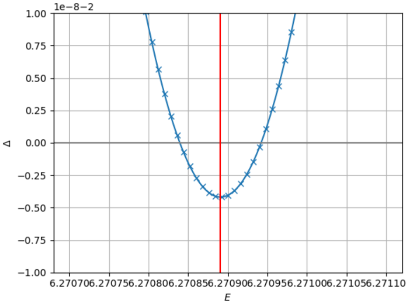
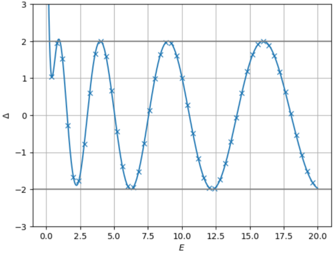


Figure – $E \mapsto \Delta(E)$ sur $[6.2709, 6.2711]$, précision en y à 10^{-8}

Très rapide détour dans $\mathbb{C}$ avec $V(x) = i\sin^5(x)$



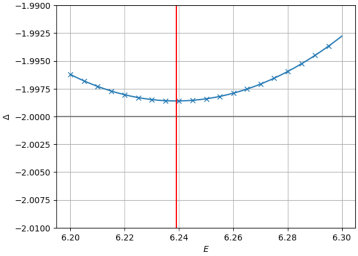
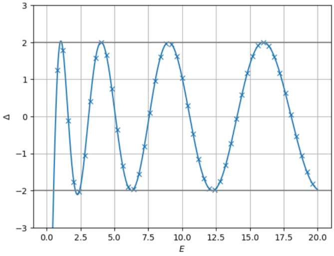
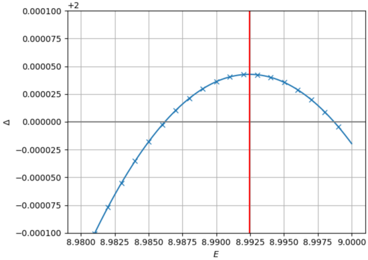


Figure – ↑ : Δ sur $[0, 20]$
↓ : Δ sur $[0, 20]$ avec $V(x) = \sin^5(x)$

Figure – ↑ :Δ au voisinage du 2ᵉ min
↓ : Δ sur $[8.98, 9]$, précision en y à 10^{-4}.





Point de départ de l'étude

Intégrale directe

On note $\mathrm{OA}(X, \mathcal{H}')$ l'ensemble des opérateurs autoajdoints non bornés de X dans $\mathcal{H}'$. Une fonction A de $\mathrm{OA}(X, \mathcal{H}')$ est dite mesurable lorsque $(A(\cdot) + i)^{-1}$ est mesurable.

Dans ce cas, on peut définir l'opérateur $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{H} = \displaystyle\int_X^{\oplus} \mathcal{H}' \mathrm{d}\mu$ de domaine

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \forall \mu - \mathrm{pp}\ x \in X, \psi(x) \in D(A(x)), \int_X \|A(x)\psi(x)\|_{\mathcal{H}'}^2 \mathrm{d}\mu(x) < +\infty \right\}$$

par

$$\forall \psi \in D(\mathcal{A}), \mathcal{A}\psi = x \mapsto A(x)\psi(x).$$

On note alors $\mathcal{A} = \displaystyle\int_X^{\oplus} A(x) \mathrm{d}\mu(x)$.

Théoreme

Soit $A \in \mathrm{OA}(X, \mathcal{H}')$. On suppose que A est mesurable. Soit $\mathcal{A} = \int_X^{\oplus} A(x) \mathrm{d}\mu(x)$.

1. Alors $\mathcal{A}$ est autoadjointe.
2. Si F une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $F(\mathcal{A}) = \int_X^{\oplus} F(A(x)) \mathrm{d}\mu(x)$.
3. $\lambda \in \sigma(A)$ si, et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0, \mu\left(\{x \in X : \sigma(A(x)) \cap]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[= \emptyset\}\right) > 0.$$
4. λ est une valeur propre de $\mathcal{A}$ si, et seulement si,
$$\mu(\{x \in X : \lambda \text{ est une valeur propre de } A(x)\}) > 0.$$
5. Si pour tout $x \in X$, $A(x)$ a un spectre absolument continu, alors $\mathcal{A}$ a un spectre absolument continu.
6. Soit $\mathcal{B} = \int_X^{\oplus} B(x) \mathrm{d}\mu(x)$ où $B \in \mathrm{OA}(X, \mathcal{H}')$ est mesurable. Si $\mathcal{B}$ est $\mathcal{A}$-bornée de borne a, alors pour presque tout $x \in X$, $B(x)$ est $A(x)$-bornée par une borne $a(x) \leq a$. Si $a < 1$, alors $A + B = \int_X^{\oplus} (A(x) + B(x)) \mathrm{d}\mu(x)$ est autoadjointe.

Décomposition en intégrale directe du laplacien

Théorème

Soit $X = [0, 2\pi]$ et $\mathcal{H}' = \mathrm{L}^2(X, \mathrm{d}x)$. Soit $\mathcal{H} = \displaystyle\int_X^{\oplus} \mathcal{H}' \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$. Soit $U : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}$ défini par

$$\forall \theta \in X, \forall \text{pp} x \in X, (Uf)(\theta)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\theta} f(x + 2\pi n).$$

Alors U est une isométrie de $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^2})$ dans $\mathcal{H}$ et admet un unique prolongement continu sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$ que l'on note encore U. Par les injections de Sobolev, $H^2(X) \hookrightarrow \mathcal{C}^1(X)$. On peut donc définir, pour tout $\theta \in X$, $\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)_\theta =: -\Delta_\theta$ opérateur sur $\mathrm{L}^2([0, 2\pi], \mathrm{d}x)$ de domaine $D(\theta)$

$$D(\theta) = \{\psi \in H^2([0, 2\pi]) : \psi(2\pi) = e^{i\theta}\psi(0), \partial\psi(2\pi) = e^{i\theta}\partial\psi(0)\}.$$

Alors $U(-\Delta)U^{-1} = \displaystyle\int_X^{\oplus} \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)_\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$ où $(\Delta, H^2(\mathbb{R}))$ est le laplacien.

Décomposition en intégrale directe de l'opérateur $-\Delta + V =: H$

Proposition

Soit $X = [0, 2\pi]$ et $\mathcal{H}' = \mathrm{L}^2(X, \mathrm{d}x)$. Soit $\mathcal{H} = \displaystyle\int_X^{\oplus} \mathcal{H}' \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$. Soit V une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}$ 2π-périodique. Pour $\theta \in X$, on note $H(\theta) = -\Delta_\theta + V$ qui est un opérateur sur $\mathrm{L}^2(X)$ où $-\Delta_\theta$ désigne l'opérateur $-\Delta$ de domaine $D(\theta)$

$$D(\theta) = \{\psi \in H^2([0, 2\pi]) : \psi(2\pi) = e^{i\theta}\psi(0), \partial\psi(2\pi) = e^{i\theta}\partial\psi(0)\}.$$

Soit $U : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}$ défini par

$$\forall \theta \in X, \forall \text{pp} x \in X, (Uf)(\theta)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\theta} f(x + 2\pi n).$$

Alors $U(-\Delta + V)U^{-1} = \displaystyle\int_X^{\oplus} H(\theta) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$.

Étude de $H(\theta)$

Proposition

1. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, l'opérateur $\left(\dfrac{-\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)_\theta$ est à résolvante compacte.
2. Pour $\theta = 0$, $(\exp(t[-\Delta_\theta]_{\theta=0}))_{t>0}$ est un semigroupe strictement positif.
3. Pour tout $a > 0$, $\left[\left(\dfrac{-\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)_\theta + a\right]^{-1}$ est un opérateur analytique à valeurs dans un espace de fonctions au voisinage de $[0, 2\pi[$.

Proposition

On suppose que V est continue par morceaux et $2\pi-$périodique. Alors

1. $H(\theta)$ a un spectre purement discret. L'opérateur $H(\theta)$ est de plus analytique en θ.
2. $H(\theta)$ et $H(2\pi - \theta)$ sont antiunitairement équivalent par la conjugaison. En particulier, ils ont les mêmes valeurs propres et leurs fonctions propres sont conjuguées.
3. Pour tout $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$, $H(\theta)$ n'a que des valeurs propres non dégénérées.
4. Soit $n \in \mathbb{N}, \theta \in]0, \pi[$ et $E_n(\theta)$ la n-ème valeur propre de $H(\theta)$. Alors la famille $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de fonctions analytiques sur $]0, \pi[$, continues en 0 et en π.

Illustration : les valeurs propres

Résultat final

Théorème

Soit V une fonction continue par morceaux 2π-périodique. Soit $H = -\Delta + V$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, $(E_n(0))_n$ les valeurs propres du problème périodique et $(E_n(\pi))_n$ les valeurs propres du problème antipériodique. Notons

$$\alpha_{2n} = E_{2n}(\pi), \alpha_{2n+1} = E_{2n+1}(0) \ ; \ \beta_{2n} = E_{2n}(0), \beta_{2n+1} = E_{2n+1}(\pi).$$

Alors

1. $\sigma(H)$ est constitué de bandes : $\sigma(H) = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n, \beta_n]$. On appelle gap les intervalles $]\beta_n, \alpha_{n+1}[$ pour $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, tous les gaps pour V le potentiel de Mathieu sont non vides.
2. H n'a pas de valeurs propres et n'est constitué que de spectre essentiel.
3. S'il n'y a pas de gap, alors le potentiel est constant.
4. S'il n'y en a qu'un seul, alors V est une fonction elliptique de Weierstrass.
5. S'il y a un nombre fini de gap, alors V est réelle analytique.