Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 9

Exercice 1. [Convergence en loi de variables discrètes] Soit $X, X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que les trois énoncés suivants sont équivalents[1] :

(i) $X_n \xrightarrow{(loi)} X$
(ii) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$
(iii) $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X = k)| \to 0$

Exercice 2. [Loi des petits nombres] Soit $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$, et $X \sim \text{Po}(\lambda)$. On suppose que $np_n \to \lambda \in]0, +\infty[$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k), \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Exercice 3. [Convergence uniforme des fonctions de répartition] Soit $X, X_1, X_2, \dots$ des v.a. réelles de fonctions de répartition $F, F_1, F_2, \dots$. que $X_n \xrightarrow{(loi)} X$ et F continue.

1. On suppose d'abord que, pour tout $n \geq 1$, $F_n(0) = F(0) = 0$ et $F_n(1) = F(1) = 1$.
   (a) Soit $0 \leq k < m$ des entiers. Pour $k/m \leq x \leq (k+1)/m$, montrer que :
   $$|F_n(x) - F(x)| \leq \max\left\{\left|F_n(\frac{k}{m}) - F(\frac{k}{m})\right|, \left|F_n(\frac{k+1}{m}) - F(\frac{k+1}{m})\right|\right\} + F(\frac{k+1}{m}) - F(\frac{k}{m})$$
   (b) Conclure que $\sup_{x\in[0,1]} |F_n(x) - F(x)| \to 0$.
2. Montrer, dans le cas général[2] : $\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0$

Exercice 4. [Convergence en loi et en probabilité] Soit $X, X_1, X_2, \dots$ des v.a. réelles.

1. (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$:
   $$\mathbb{P}(X_n \leq t) - \mathbb{P}(X \leq t) \leq \mathbb{P}(t < X \leq t + \varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$$
   et que
   $$\mathbb{P}(X \leq t) - \mathbb{P}(X_n \leq t) \leq \mathbb{P}(t - \varepsilon < X \leq t) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon).$$
   (b) On suppose que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = t) = 0$,
   $$\lim_n |\mathbb{P}(X \leq t) - \mathbb{P}(X_n \leq t)| = 0.$$
2. Réciproquement, montrer que si $X_n \xrightarrow{(loi)} c$ une constante, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.

Exercice 5. [Convexité et convergence en probabilité] Soit $X_1, X_2, \dots$ des v.a. positives. On suppose qu'il existe $0 < \alpha < \beta$ tels que $\mathbb{E}[X_n^\alpha] \to 1$ et $\mathbb{E}[X_n^\beta] \to 1$.

1. Soit $\varepsilon > 0$, et $\gamma > 1$. Montrer qu'il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $x \geq 0$,
   $$x^\gamma \geq 1 + \gamma(x - 1) + \delta \mathbf{1}_{|x-1|>\varepsilon}.$$
2. En déduire : $\mathbb{E}[X_n^\beta] \geq 1 + \frac{\beta}{\alpha}(\mathbb{E}[X_n^\alpha] - 1) + \delta\mathbb{P}(|X_n^\alpha - 1| > \varepsilon)$
3. Conclure que $X_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} 1$.

Exercice 6. [Lemme de Slutsky] Soit $(X_n, Y_n)_{n\geq 1}$ suite de couples de variables aléatoires. On suppose $X_n \xrightarrow{(loi)} X$ et $Y_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} c$ constante.

1. $(ii) \Rightarrow (iii)$ est le lemme de Scheffé : commencer par noter $\sum_k (\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(X_n = k))\mathbf{1}_{\mathbb{P}(X=k)\geq\mathbb{P}(X_n=k)} \to 0$.
2. On pourra utiliser un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$

1. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer que, pour tout entier n et tout réel v, $|e^{iY_n v} - e^{icv}| \leq |v|\varepsilon + 2\,\mathbf{1}_{\{|Y_n - c| > \varepsilon\}}$.
2. En déduire[3] que pour tous réels u et v, $\Phi_{(X_n,Y_n)}(u,v) \to \Phi_X(u)e^{icv}$.
3. Conclure que $(X_n, Y_n) \xrightarrow{(loi)} (X, c)$.

Exercice 7. [Équicontinuité des fonctions caractéristiques de suites tendues de v.a.] Soit $X_1, X_2, \dots$ des v.a. réelles de fonctions caractéristiques $\Phi_{X_1}, \Phi_{X_2}, \dots$ On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue, c'est-à-dire :

$$\sup_n \mathbb{P}(|X_n| > M) \to 0, \qquad \text{quand } M \to \infty.$$

1. Montrer que
$$|\mathbb{E}[e^{i(t+h)X_n} - e^{itX_n}]| \leq 2\mathbb{P}(|X_n| > M) + \mathbb{E}[|e^{ihX_n} - 1|, |X_n| \leq M],$$
2. Soit $\varepsilon > 0$. En déduire qu'on peut trouver $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que pour tout $|h| \leq \delta$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|\mathbb{E}[e^{i(t+h)X_n} - e^{itX_n}]| \leq \varepsilon.$$
3. Conclure que la famille $(\Phi_{X_n})_{n\geq 1}$ est uniformément équicontinue
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{s,t:|t-s|\leq\varepsilon} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\Phi_{X_n}(t) - \Phi_{X_n}(s)| = 0$$

Exercice 8. [Convergence des paramètres] On suppose $X_n \xrightarrow{(loi)} X$ et :

1. $X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda_n)$, pour $\lambda_n \in]0, +\infty[$. Montrer que $\lambda_n \to \lambda \in]0, +\infty]$.
2. $X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, pour $\sigma_n^2 \in]0, +\infty[$. Montrer que $\sigma_n^2 \to \sigma^2 \in [0, +\infty[$.

Exercice 9. [Décomposition dyadique de la loi uniforme]

1. Soit X de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Calculer la fonction caractéristique Φ_X.
2. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, et $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i/2^i$. Calculer Φ_{X_n}.
3. Montrer[4] que $X_n \xrightarrow{(loi)} X$.

Exercice 10. [Une construction originale de la Gaussienne]

1. Soit $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Calculer la fonction caractéristique Φ_W.
2. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, et $W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{2i}Y_i$. Calculer $\log \Phi_{W_n}$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 2 à l'origine de la fonction $x \in] - \pi/2, \pi/2[\to \log(\cos(x))$, et en déduire que $W_n \xrightarrow{(loi)} W$.

Exercice 11. [Fonction caractéristique et une équation en loi]

1. Montrer que $2(1 - \cos(hx))/h^2 \to x^2$ quand $h \to 0$.
2. Soit X variable aléatoire de fonction caractéristique Φ_X. En déduire :
$$\mathbb{E}[X^2] \leq -\limsup_{h\to 0} \frac{\Phi_X(h) - 2\Phi_X(0) + \Phi_X(-h)}{h^2}$$
3. Applications :
   (a) On suppose $\Phi_X(t) = 1 + o(t^2)$. Montrer que $X = 0$ p.s.
   (b) On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X + Y \overset{(loi)}{=} X$. En déduire que $Y = 0$ p.s.

3. On pourra écrire $e^{i(uX_n+vY_n)} - e^{i(uX+vc)} = (e^{iuX_n} - e^{iuX})e^{ivc} + (e^{ivY_n} - e^{ivc})e^{iuX_n}$
4. On utilisera de façon répétée l'identité trigonométrique $\sin(t) = 2\sin(t/2)\cos(t/2)$

Exercice 12. [Estimation Poissonienne de sommes.]

1. Soit $a, b > 0$, et $X \sim \mathrm{Po}(a)$ et $Y \sim \mathrm{Po}(b)$ deux variables aléatoires indépendantes. Quelle est la loi de $X + Y$?
2. Pour n entier, on pose $X_n \sim \mathrm{Po}(n)$. Montrer que, quand $n \to \infty$,
$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0,1).$$
3. En déduire
$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2} \text{ quand } n \to \infty$$

Exercice 13. [Une construction originale de la Gaussienne, 2] Soit $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_1 \geq 0) = 1$, $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[X_1] = 1$. On pose $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Montrer [5] que
$$\frac{2}{\sigma}\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} X_j} - \sqrt{n}\right) \xrightarrow{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0,1).$$

Exercice 14. [Somme auto-normalisée] Soit $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. avec $0 < \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[X_1] = 0$. Montrer que
$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} X_j^2}} \xrightarrow{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0,1).$$

Exercice 15. [Somme auto-normalisée 2] Soit $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. de loi $\mathrm{Unif}(-1,1)$. On pose
$$Y_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{\sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} X_j^3}$$

Montrer que $\sqrt{n} Y_n \xrightarrow{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0,3)$.

Exercice 16. [Loi des grands nombres L^1] Soit $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. avec $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X_1] = 0$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. On suppose de plus $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Montrer que $S_n/n \xrightarrow{L^2} 0$.
2. On revient au cas général (avec seulement $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$). Pour $R \geq 0$ arbitraire, on introduit les quantités tronquées suivantes :
$$X^{(R)} = X\mathbf{1}_{|X| \leq R} - \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{|X| \leq R}] \quad \text{et} \quad S_n^{(R)} = \sum_{i=1}^{n} X_i^{(R)}.$$
   (a) Montrer que
$$\mathbb{E}[|\frac{S_n^{(R)}}{n}|] \leq \frac{R}{\sqrt{n}}.$$
   (b) Montrer que
$$\mathbb{E}[|\frac{S_n - S_n^{(R)}}{n}|] \leq 2\mathbb{E}[|X|\mathbf{1}_{|X|>R}].$$
   (c) En déduire que $S_n/n \xrightarrow{L^1} 0$.

5. On pourra multiplier par la quantité conjuguée