# Programme L1  (Partie Math de L1 MI et L1 MPC spécialité MP)

**MEU101 Math 1 - Calculus – S1.** Volume horaire :  24h CM + 36h TD.

Présentation générale : nombres réels, nombres complexes, suites, étude des fonctions, fonctions usuelles.

Contenus enseignés

- Consolidation des acquis et renforcement (en particulier : calcul algébrique en écriture fractionnaire, puissances, racines carrées, résolution d'équations et d'inéquations).
- Logique (équivalence, connecteurs logiques, quantificateurs, négation), ensembles et opérations sur les ensembles.
- Ensemble des nombres réels (ordre naturel sur R, majorants, minorants, plus grand élément, plus petit élément, valeur absolue, introduction des notions de bornes supérieures et de bornes inférieures, droite réelle achevée, intervalles).
- Ensemble des nombres complexes (forme algébrique, opérations sur C, lien avec le plan R^2, conjugaison, module, nombres complexes de module 1, argument, forme trigonométrique, trinôme du second degré, racines n-ièmes).
- Suites numériques (suites majorées, minorées, bornées, variations d'une suite, limite réelle, suite convergente, suite divergente, limite infinie, opérations sur les limites, limite et ordre, théorème des gendarmes, théorème de convergence monotone, suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques, suites récurrentes linéaires d'ordre deux).
- Fonctions (graphe, restriction, prolongement, image directe, image réciproque, opérations sur les fonctions, fonctions majorées, minorées, bornées, monotonie, parité, périodicité, limites, opérations sur les limites, caractérisation séquentielle de la limite, limites directionnelles, asymptotes horizontales, verticales et obliques, continuité en un point, opérations sur les fonctions continues, prolongement par continuité, caractérisation séquentielle de la continuité, théorème des valeurs intermédiaires et ses corollaires, théorème de Weierstrass, dérivabilité, tangente, classes de fonctions, opérations sur les dérivées, Formule de Leibniz, extrema locaux, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis et ses corollaires).
- Fonctions usuelles (fonction valeur absolue, fonction racine carrée, fonctions polynomiales, fonctions rationnelles, fonctions homographiques, fonctions logarithmes, fonctions exponentielles, fonctions puissances, fonctions circulaires, fonctions hyperboliques, fonctions indicatrices).
- Fonctions injectives, surjectives et bijectives (charnière S1/S2).

**MEU102 Math 2 - Algèbre et géométrie.** Volume horaire : 18h CM + 24h TD.

Présentation générale : Résolution de systèmes linéaires

Contenus enseignés :

- Equations cartésiennes/équations paramétriques. Cas des droites et plans dans R2 et R3.
- Systèmes linéaires, représentations algébriques, géométriques, matricielles des solutions.
- Introduction des matrices.
- Combinaison linéaire et vecteurs.
- Multiplication d'une matrice par un vecteur.
- Echelonnage du système, méthode du Pivot.
- Variables principales et secondaires. Description des solutions.
- Applications linéaires. Multiplication de matrices, transposée, inverse.
- Résolution des systèmes inversibles.
- Dimension.

Compétences visées/attendus :

- Savoir définir une équation cartésienne ou paramétrique, passer de l'une à l'autre
- Identifier des droites ou plan à partir d'un système linéaire et réciproquement
- Résoudre un système d'équations linéaires.

**MEU151 Math 3 – Analyse 1– S2.** Volume horaire : 24h CM + 36h TD.

Présentation générale : fonctions réciproques, intégration, équations différentielles linéaires d'ordre un et d'ordre deux à coefficients constants, formules de Taylor, fonctions équivalentes, développements limités.

Contenus enseignés

- Fonctions réciproques charnière S1/S2.
- Intégrale au sens de Riemann (version light sans les suites de Cauchy, suites adjacentes en L2)
- Fonctions intégrables, changement de variable, intégration par parties. Inégalité de Cauchy-Schwarz
- Calcul de primitives.
- Equations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants. Equations caractéristiques.
- Fonctions de classe Cn, DL à l'ordre n, Taylor, développement asymptotique. Application au calcul de limites.
- Equivalents sens et manipulation.

**MEU152 Math 4 - Algèbre linéaire – S2.** Volume horaire : 24h CM + 36h TD.

Présentation générale : Espaces vectoriels et applications linéaires de Rn

Contenus enseignés

- Définition d'un espace vectoriel.
- Familles libre et génératrices, bases. Dimension. (droites-plans-hyperplans vectoriels de R^n )
- Vecteurs et coordonnées dans une base. Base canonique
- Sous espaces vectoriels. Somme, somme directe et intersection de deux sous espaces vectoriels.
- Recherche de bases dans des sommes et intersections de sous-espaces vectoriels : utilisation du pivot.
- Exemples des polynômes (via les fonctions polynomiales), des suites, des fonctions.
- Définition d'application linéaire entre espaces vectoriels, exemples dans R^n et dans R^n[X].
- Etude d'exemples dans R^2 et R^3.
- Définition du noyau et de l'image.
- Retour sur l'inversibilité (lien avec l'injectivité), théorème du rang.
- Application aux résolutions matricielles des systèmes linéaires.
- Changement de base, écriture matricielle dans une base d'une AL, charnière avec S3
- Projections, symétries dans Rn, en prévision du S3 (réduction des endomorphismes)

# Programme L2 Math

## MEU201 Analyse 2 – S3. Volume horaire : 24h CM + 42h TD

Présentation générale : introduction à l'étude des séries et des intégrales généralisées.

Contenus enseignés

- Notations « petit o », équivalent.
- Suites adjacentes, définition des suites de Cauchy, complétude de R sans difficulté technique, utilisé dans le cours comme outil pour la preuve des résultats de convergence.
- Vocabulaire des séries numériques : somme, somme partielle, reste, convergence, série géométrique, somme télescopique.
- Cas des séries à termes positifs. Règles de d'Alembert et de Cauchy.
- Théorèmes de comparaison et d'équivalence.
- Comparaison série/intégrale.
- Convergence absolue. Séries alternées. Transformation d'Abel.
- Théorèmes de sommation des relations de comparaison.
- Intégrales généralisées : convergence, critère de Cauchy pour la convergence.
- Cas des intégrales de fonctions positives.
- Théorèmes de comparaison et d'équivalence.
- Exemple des intégrales de Riemann et de Bertrand.
- Convergence absolue. Règle d'Abel.
- Théorème d'intégration des relations de comparaison.

## MEU202 Algèbre linéaire 2 – S3. Volume horaire : 18h CM + 24h TD

Présentation générale : Réduction des endomorphismes.

Contenus enseignés

- Endomorphismes, changement de base, matrices semblables.
- Déterminants, Propriétés et calculs pratiques. Développement selon une ligne ou une colonne.
- Sous-espaces stables et somme directe de p sous-espaces vectoriels. Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice. Sous-espaces propres et somme directe. Diagonalisation. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme ou d'une matrice.
- Racines d'un polynôme et multiplicité. Lien avec les valeurs propres d'un endomorphisme. Diagonalisabilité : définition, lien avec la somme des sous espaces propres. CNS de diagonalisabilité (Polynôme caractéristique scindé et dimension des sous-espaces propres).
- Arithmétique des polynômes (racines, factorisation, division euclidienne, identité de Bézout et PGCD, notion d'idéal). Tout idéal différent de {0} de K[X] est engendré par un unique polynôme unitaire.
- Polynômes d'endomorphisme et de matrice. Polynômes annulateurs et polynôme minimal. Théorème de Cayley-Hamilton (non démontré). Diagonalisation et polynômes annulateurs. Les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres. Théorème : un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.
- Notions de trigonalisation (sans démonstrations). Exemples pratiques et guidés.

## MEU203 Topologie 1 – S3. Volume horaire : 18h cours + 24h TD.

Présentation générale : Topologie et calcul différentiel.

Contenus enseignés :

- Distance et topologie sur R, opérations ensemblistes sur les ouverts et les fermés de R. Fonctions continues, fonctions Lipschitziennes. Valeurs d'adhérence d'une suite numérique réelle. Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente. Suites de Cauchy de R, R est complet. Toute fonction continue sur un intervalle fermé, borné est bornée et atteint ses bornes. Partie de R définie par une inégalité continue stricte ou large.

- Suites de R^n. Suites bornées, suites convergentes (par composantes). Normes, distances dans R^n : le cas de la norme euclidienne et de la norme infini, équivalence de ces deux normes. Boules, sphères. Voisinages, ouverts, fermés de R^n. Parties bornées, définition des compacts comme fermés-bornés. Toute suite bornée de R^n admet une sous-suite convergente. Ouverts, fermés de R^n. Caractérisations séquentielles et « distancielles ».

- Fonctions de n variables. Exemple des fonctions affines, des polynômes. Opérations sur les fonctions, fonctions usuelles. Fonctions continues, fonctions lipschitziennes. Equivalence entre les définitions séquentielles et distancielles de la continuité. Toute fonction usuelle est continue sur son domaine de définition. Toute fonction continue sur un compact de R^n est bornée et atteint ses bornes (preuve sur un pavé). Partie de R^n définie par une inégalité continue stricte ou large. Ensembles de niveau d'une fonction continue.

- Fonctions de 2 variables : Dérivées partielles, gradient, points critiques, principe de Fermat. Approximation affine, différentiabilité, développement de Taylor. Si une fonction a des dérivées partielles continues alors elle est différentiable. Toute fonction usuelle est différentiable. Etude le long d'un segment. Inégalité des accroissements finis.

## **MEU204 Algèbre et Arithmétique – S3.** Volume horaire : 18h CM + 24h TD.

<u>Objectif général :</u> A coordonner avec Algèbre linéaire 2 pour l'introduction des polynômes. L'objectif est de montrer les premières structures algébriques à partir d'exemples concrets issus des entiers relatifs. Il s'agit également d'établir les premiers résultats fondamentaux de l'arithmétique à partir du travail sur Z/nZ.
<u>Pré-requis :</u> Notion sur les ensembles, union intersection ; ensemble des partie d'un ensemble raisonnement par récurrence , par l'absurde.

<u>Contenus enseignés</u>
- Introduction aux groupes et arithmétique de Z et Z/nZ : relation d'équivalence,, congruence, division euclidienne dans Z. Nombres premiers, décomposition, ppcm, pgcd et algo d'Euclide ; Th de Bézout , Gauss , petit théorème de Fermat .
- Structure algébrique : groupe , sous groupe , morphisme , ordre d'un élément , groupe monogène, cycliques , exemples .. Classes d'équivalences modulo un sous groupe , Th de Lagrange et applications.
- Anneau et corps idéal ,
- Etude de l'anneau Z/nz , du corps F_p, carrés dans F_p, équations du second degré , discriminant
- (F_p)* es cyclique , utilisation du générateur pour résoudre certaines équations
- Si Le temps permet : Bézout dans l'anneau des polynômes , lemme des noyaux ( en rapport avec le cours d'algèbre linéaire )

## **MEU205 Calcul numérique 1 – S3.** Volume horaire : 15h CM + 24h TP

<u>Objectif général</u> : Python pour le calcul scientifique

<u>Notions enseignées</u>
- Syntaxe de base du langage python
  - Notions de type, typage dynamique fort
  - Structures conditionnelles et structures de boucle
  - Fonctions (y compris arguments optionnels, nombre d'arguments non déterminés)
  - Documentation (apprendre à lire et à écrire la documentation)
- Module numpy
  - Création et manipulation de tableaux utilisant la structure ndarray
  - Utilisation avancée des slices

    - Calculs vectorisés
- Module matplotlib
    - Création de figures et d'axes avec la syntaxe moderne
    - Utilisation de plot et de scatter
    - utilisation des arguments optionnels pour améliorer la lisibilité d'une image utilisée pour présenter des résultats scientifiques
- Module pandas
    - Structures de données Serie et DataFrame
    - Manipulation de données réelles importées depuis des fichiers de données
    - Synthétisation de données (calcul de moyenne ou décompte) et affichage graphique sous forme de camembert
    - Rapides notions de séries temporelles

## **MEU208 Mathématiques renforcées 1 - S3.** Volume horaire : 24h CM

Objectif général : Apprendre des mathématiques un peu plus abstraites, approfondir des résultats vus en L2. Se préparer éventuellement à un parcours en magistère ou plus tard à l'agrégation.

Notions enseignées :

- Ensembles, applications. Espace vectoriel des applications de X dans R. Fonctions caractéristiques d'une partie. Fonctions surjectives, injectives, bijectives. Il n'existe pas de surjection de X sur l'ensemble de ses parties.
- Images réciproques. Propriétés ensemblistes générales. Images réciproques et limites. Limites infinies à l'infini. Minimum pour une fonction continue positive propre. Ensemble des zéros d'une fonction (numérique réelle). Fonction distance à une partie (de R). Adhérence d'une partie de R.
- Images directes. Propriétés ensemblistes générales. Caractérisations des intervalles. Les seules parties ouvertes et fermées de R sont le vide et R. Théorème des valeurs intermédiaires et image directe d'intervalle. Théorème de Weierstrass dans R. La distance à une partie fermée de R est réalisée.
- Fonctions continues de R dans R^n. Définitions équivalentes. Chemin entre deux points, courbe. Partie connexes par arcs. Connexité par arcs (lignes polygonales et arcs de cercle) dans l'espace des matrices.
- Fonctions continues de R^p dans R^n. Définitions équivalentes. Opérations sur les fonctions continues (notamment composition). Fonction continue sur une courbe. Il n'existe pas de racine carrée continue sur C. Perron-Frobenius en dimension 2. Théorème des valeurs intermédiaires. Fonction continue sur une partie compacte. Théorème de Weierstrass dans R^p. Théorème de d'Alembert-Gauss.

## MEU209 Stage d'initiation à l'enseignement des mathématiques – S4

Volume horaire : 15h TD + stage : une semaine en janvier puis 1 jour par semaine entre janvier et avril

Objectif général : Découvrir le métier de professeur de mathématiques ou celui de professeur des écoles, à l'intérieur de sa classe et au sein de son établissement. Ce stage s'adresse aux étudiants qui sont attirés par les métiers de l'enseignement et qui veulent vérifier si ces métiers leur conviennent avant de s'engager dans la préparation d'un concours (CAPES, CRPE, agrégation). Cette UE est vivement recommandée pour toutes celles et ceux qui souhaitent passer le CAPES ou le CRPE en L3.
MCC : 1ère session : rapport de stage écrit + soutenance orale, 2ème session : examen écrit.
Pré-requis : Seule la motivation à découvrir les métiers de l'enseignement est requise.
Présentation générale : Le stage, réalisé de manière préférentielle en collège, est accompagné par 5 séances de TD où les étudiants sont sensibilisés à des thématiques liées au métier de professeur de mathématiques ou à celui de professeur des écoles. Les étudiants sont formés aux techniques d'observation en classe et à l'analyse de celle-ci, ils sont par ailleurs encadrés pour la rédaction de leur rapport de stage.
Contenus enseignés
Les enseignements en TD concernent :

- La préparation à l'observation en classe, préparation au stage, construction d'outils,
- L'analyse des observations effectuées en stage,
- La présentation du métier de professeur : missions, gestes professionnels, compétences professionnelles
- La présentation des missions d'un établissement d'enseignement, les différents acteurs,

- Les programmes de mathématiques et les compétences en mathématiques,
- Les apports de la recherche en éducation : qu'est ce qu'apprendre ? qu'est ce qu'enseigner ?
- L'accompagnement à la rédaction du rapport de stage : cadrage, plan, relectures, bibliographie, ...

Les TD s'appuient aussi sur la présentation à l'oral d'articles issus de revues professionnelles. D'autres thématiques peuvent être abordées en fonction des observations faites en stage :

- L'évaluation,
- Les piliers de l'apprentissage,
- L'accompagnement des élèves en difficulté,
- L'analyse de tâches,
- Séance, séquence, progression sur l'année.

<u>Compétences visées/attendus</u>

- Se sensibiliser au métier de professeur de mathématiques ou de professeur des écoles,
- Observer une classe et analyser ses observations,
- Rédiger un rapport de stage.

**MEU251 Analyse 3 – S4.** Volume horaire : 24h CM + 42h TD

<u>Objectif général :</u> Cadre EVNC ; utilisation de la norme infinie ; critère de Cauchy. Sans formalisation sur Cauchy.

<u>Contenus enseignés</u>

- Suites et Séries de fonctions, Convergence simple, uniforme, normale. Cas des séries alternées.
- Théorèmes d'Intégration et dérivation pour les suites et séries.
- Continuité uniforme sur un compact (= fermé borné de R ; « théorème de Heine »). Application aux fonctions lipschitziennes
- Séries entières, théorème de d'Alembert, régularité.
- Lien avec les développements de Taylor (vue en MEU151 Analyse 1)

**MEU252 Algèbre linéaire 3 – S3.** Volume horaire : 18h cours + 24h TD

<u>Présentation générale :</u> Espaces euclidiens, isométries vectorielles et isométries du plan affine.

<u>Contenus enseignés</u>

- Produit scalaire et norme euclidienne dans Rn, Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Bases orthonormées, orthogonal d'une partie, somme directe.
- Ecriture matricielle et changement de base.
- Orthonormalisation de Schmidt.
- Projections et symétries orthogonales. Calcul des coordonnées d'une projection orthogonale.
- Matrices orthogonales et isométries.
- Classification des isométries vectorielles de R2 et de R3.
- Introduction aux espaces affines avec l'exemple du plan.
- Applications affines : définition, caractérisation, étude d'exemples.
- Classification des transformations affines du plan et écriture complexe.

**MEU253 Topologie 2 – S4.** Volume horaire : 18h CM + 18h TD

<u>Présentation générale :</u> Courbes paramétrées

<u>Contenus enseignés</u>

- Fonctions à valeurs dans le plan, arc et courbes paramétrées, paramétrages.
- Tangentes à un arc paramétré, allure locale, rebroussements, branches infinies.
- Tracé effectif d'une courbe paramétrée ; méthode d'étude complète.

- Étude métrique des courbes : abscisse curviligne, longueur, courbure.

**MEU254 Probabilités discrètes – S4.** Volume horaire : 24h CM + 24h TD.

Présentation générale : Espaces de probabilité discrets, variables aléatoires, lois discrètes classiques.

Contenus enseignés

- Propriétés de l'union et de l'intersection d'ensembles, produit cartésien, partition.
- Cardinal d'un ensemble fini, fonction indicatrice, lemme des bergers.
- Application, images directes et réciproques, injection, surjection, bijection.
- Dénombrement : arrangements, permutations, combinaisons, coefficient binomial, formule du binôme.
- Espace de probabilité (cas fini puis extension au cas dénombrable), germe de probabilité, mesure de probabilité uniforme sur espace fini, mesure de probabilité produit.
- Evénement, indépendance d'événements, probabilité conditionnelle.
- Variables aléatoires : espérance, variance, indépendance.
- Lois discrètes classiques : Bernoulli, binomiale, Poisson, géométrique.
- Inégalités (Markov, Bienaymé-Tchebychev, Jensen).
- Fonction génératrice, propriétés et utilisation pour caractériser une loi.
- Loi faible des grands nombres.
- Covariance et corrélation de deux variables aléatoires.

**MEU255 Calcul numérique 2 – S4.** Volume horaire : 15h CM + 24h TP.

Objectif : apprendre à définir, analyser et implémenter des algorithmes pour pour la résolution numérique des problèmes mathématiques continus qui proviennent de la modélisation des phénomènes réels.

Prérequis : cours MEU205 Python pour le Calcul Scientifique : notions de base de Python, packages numpy, matplotlib, notions de base d'objet.

Contenus enseignés

- Introduction à la modélisation et schémas de résolution d'EDOs : modèles de Malthus, de Verhulst, de Lotka-Volterra ; schéma d'Euler explicite, schéma de Heun ; notion d'instabilité numérique, schéma d'Euler implicite.
- Interpolation polynomiale : interpolation de Lagrange, méthodes de construction du polynôme interpolateur (méthode de la matrice de Vandermonde et de polynômes de Lagrange), phénomène de Runge, points de Tchebychev.
- Intégration numérique ; formule de quadrature simples et composées : méthode du rectangle, du trapèze, du point milieu, de Simpson ; formule de quadrature de Gauss
- Recherche de racines : méthodes de dichotomie, de fausse position, de point fixe de Newton

**MEU258 Graphes et algèbre linéaire – S4**. Volume horaire : 24h CI

Objectif général : Il s'agit dans ce cours d'utiliser et d'étoffer les connaissances acquises en Algèbre Linéaire et en Algèbre à travers l'étude spectrale de graphes simples. L'idée est d'utiliser de nombreux exemples concrets pour éclairer des notions algébriques qui peuvent sembler parfois abstraites et montrer comment les valeurs propres d'un graphe simple portent des informations géométriques et combinatoires importantes. Beaucoup d'exemples seront dessinés au tableau. Le théorème spectral est ici utilisé dès le début du cours sans être démontré.

Notions enseignées :

*Fondements – Des graphes aux matrices :*

- Définition, exemples, matrices d'adjacence et spectre d'un graphe.
- Calculs des spectres explicites sur des familles fondamentales : graphes complets, graphes bipartis, cycles, hypercubes, graphe de Peterson.
- Mise en valeur de certaines relations entre propriétés géométriques du graphe et de son spectre .

*Graphes de Cayley*

- Construction de graphes à partir de groupes : $Z_n$, groupe diédral $D_{2n}$, $Sl_3(Z)$, groupe des permutations $S_n$.
- Notion de caractères d'un groupe. Calculs des caractères de $Z_n$, construction d'une base orthogonale dans $C^Z$ à l'aide des caractères.
- Calcul systématique du spectre des graphes de Cayley construits à partir de $Z_n$, avec différents générateurs.

*Marches aléatoires et expansion*

- Marche aléatoire dans un graphe simple : chaines de Markov homogènes, marches aléatoires avec ou sans délai, matrice de transition. Lien entre le spectre de la matrice de transition et celui du graphe.
- Coefficient d'expansion. Lien entre le coefficient d'expansion et le trou spectral : inégalités de Cheeger (plus le trou est grand, plus le graphe est difficile à déconnecter).
- Si le temps le permet : Notion de graphe expanseur, théorème d'Alon Boppana et définition de graphes de Ramanujan (familles optimales du point de vue spectral).