Semi-stabilité des hypersurfaces projectives singulières

Thomas Mordant (LMO)

Séminaire d'Arithmétique et de Géométrie Algébrique

23 septembre 2025

Cet exposé présente des résultats de mon article “A note on the semistability of singular projective hypersurfaces”, *Math. Z.*, 306(4):Paper No. 67, 19, 2024.

Cet exposé présente des résultats de mon article “A note on the semistability of singular projective hypersurfaces”, *Math. Z.*, 306(4):Paper No. 67, 19, 2024.

Ces résultats s’appuient sur une borne due à O. Benoist (“Quelques espaces de modules d’intersections complètes lisses qui sont quasi-projectifs”, *J. Eur. Math. Soc.*, 16(8):1749-1774, 2014).

Cet exposé présente des résultats de mon article “A note on the semistability of singular projective hypersurfaces”, *Math. Z.*, 306(4):Paper No. 67, 19, 2024.

Ces résultats s’appuient sur une borne due à O. Benoist (“Quelques espaces de modules d’intersections complètes lisses qui sont quasi-projectifs”, *J. Eur. Math. Soc.*, 16(8):1749-1774, 2014).

J’ai depuis utilisé ces résultats dans “Pencils of projective hypersurfaces, Griffiths heights and geometric invariant theory”, I et II (`arxiv:2506.15334` et `arxiv:2506.22126`, 2025).

1. (Semi-)stabilité et critère de Hilbert-Mumford

2. (Semi-)stabilité des hypersurfaces projectives

3. Motivation : hauteur de Griffiths-Kato et hauteur GIT

4. Critère de Hilbert-Mumford, multiplicités, et cônes tangents

5. La borne de Benoist

6. Preuve des critères de (semi-)stabilité des hypersurfaces projectives singulières

I. (Semi-)stabilité et critère de Hilbert-Mumford

Points (semi-)stables

Points (semi-)stables

Soient k un corps algébriquement clos, G un groupe algébrique lisse affine réductif sur k et X un k-schéma réduit de type fini.

Points (semi-)stables

Soient k un corps algébriquement clos, G un groupe algébrique lisse affine réductif sur k et X un k-schéma réduit de type fini.

On suppose que G agit algébriquement sur X.

Points (semi-)stables

Soient k un corps algébriquement clos, G un groupe algébrique lisse affine réductif sur k et X un k-schéma réduit de type fini.

On suppose que G agit algébriquement sur X.

Soit L un fibré en droites sur X ample G-linéarisé.

Points (semi-)stables

Soient k un corps algébriquement clos, G un groupe algébrique lisse affine réductif sur k et X un k-schéma réduit de type fini.

On suppose que G agit algébriquement sur X.

Soit L un fibré en droites sur X ample G-linéarisé.

Définition : On dit qu'un point x de $X(k)$ est semi-stable s'il existe $m > 0$ et s dans $\Gamma(X, L^{\otimes m})^G$ tels que $s(x) \neq 0$.

Points (semi-)stables

Soient k un corps algébriquement clos, G un groupe algébrique lisse affine réductif sur k et X un k-schéma réduit de type fini.

On suppose que G agit algébriquement sur X.

Soit L un fibré en droites sur X ample G-linéarisé.

Définition : On dit qu'un point x de $X(k)$ est semi-stable s'il existe $m > 0$ et s dans $\Gamma(X, L^{\otimes m})^G$ tels que $s(x) \neq 0$.

On dit qu'un point x de $X(k)$ est (proprement) stable si de plus son orbite $G(k)\,.\,x$ est fermée dans $(s \neq 0)$ et si son stabilisateur G_x est fini.

Points (semi-)stables

Soient k un corps algébriquement clos, G un groupe algébrique lisse affine réductif sur k et X un k-schéma réduit de type fini.

On suppose que G agit algébriquement sur X.

Soit L un fibré en droites sur X ample G-linéarisé.

Définition : On dit qu'un point x de $X(k)$ est semi-stable s'il existe $m > 0$ et s dans $\Gamma(X, L^{\otimes m})^G$ tels que $s(x) \neq 0$.

On dit qu'un point x de $X(k)$ est (proprement) stable si de plus son orbite $G(k)\,.\,x$ est fermée dans $(s \neq 0)$ et si son stabilisateur G_x est fini.

Les ensembles des k-points stables et semi-stables définissent des ouverts

$$X_s(L) \subset X_{ss}(L) \subset X.$$

Motivation : existence de quotients (Mumford)

Motivation : existence de quotients (Mumford)

Théorème : Il existe un schéma quasi-projectif (projectif si X l'est) $X /\!\!/ G$

Motivation : existence de quotients (Mumford)

Théorème : Il existe un schéma quasi-projectif (projectif si X l'est) $X /\!\!/ G$ et un morphisme G-invariant

$$\pi : X_{ss}(L) \longrightarrow X /\!\!/ G$$

Motivation : existence de quotients (Mumford)

Théorème : Il existe un schéma quasi-projectif (projectif si X l'est) $X/\!\!/G$ et un morphisme G-invariant

$$\pi : X_{ss}(L) \longrightarrow X/\!\!/G$$

qui est un bon quotient de $X_{ss}(L)$, c'est-à-dire que :

Motivation : existence de quotients (Mumford)

Théorème : Il existe un schéma quasi-projectif (projectif si X l'est) $X/\!\!/G$ et un morphisme G-invariant

$$\pi : X_{ss}(L) \longrightarrow X/\!\!/G$$

qui est un bon quotient de $X_{ss}(L)$, c'est-à-dire que :

- le morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{X/\!\!/G} \to \pi_* \mathcal{O}_{X_{ss}(L)}^G$ sur $X/\!\!/G$ est un isomorphisme,

Motivation : existence de quotients (Mumford)

Théorème : Il existe un schéma quasi-projectif (projectif si X l'est) $X/\!\!/G$ et un morphisme G-invariant

$$\pi : X_{ss}(L) \longrightarrow X/\!\!/G$$

qui est un bon quotient de $X_{ss}(L)$, c'est-à-dire que :

- le morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{X/\!\!/G} \to \pi_* \mathcal{O}^G_{X_{ss}(L)}$ sur $X/\!\!/G$ est un isomorphisme,
- si Z est un fermé G-invariant de $X_{ss}(L)$, $\pi(Z)$ est un fermé de $X/\!\!/G$,

Motivation : existence de quotients (Mumford)

Théorème : Il existe un schéma quasi-projectif (projectif si X l'est) $X /\!/ G$ et un morphisme G-invariant

$$\pi : X_{ss}(L) \longrightarrow X /\!/ G$$

qui est un bon quotient de $X_{ss}(L)$, c'est-à-dire que :

- le morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{X/\!/G} \to \pi_* \mathcal{O}^G_{X_{ss}(L)}$ sur $X /\!/ G$ est un isomorphisme,
- si Z est un fermé G-invariant de $X_{ss}(L)$, $\pi(Z)$ est un fermé de $X /\!/ G$,
- si Z_1, Z_2 sont deux fermés G-invariants disjoints de $X_{ss}(L)$, les fermés $\pi(Z_1)$ et $\pi(Z_2)$ de $X /\!/ G$ sont disjoints.

Motivation : existence de quotients (Mumford)

Théorème : Il existe un schéma quasi-projectif (projectif si X l'est) $X/\!\!/G$ et un morphisme G-invariant

$$\pi : X_{ss}(L) \longrightarrow X/\!\!/G$$

qui est un bon quotient de $X_{ss}(L)$, c'est-à-dire que :

- le morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{X/\!\!/G} \to \pi_* \mathcal{O}^G_{X_{ss}(L)}$ sur $X/\!\!/G$ est un isomorphisme,
- si Z est un fermé G-invariant de $X_{ss}(L)$, $\pi(Z)$ est un fermé de $X/\!\!/G$,
- si Z_1, Z_2 sont deux fermés G-invariants disjoints de $X_{ss}(L)$, les fermés $\pi(Z_1)$ et $\pi(Z_2)$ de $X/\!\!/G$ sont disjoints.

De plus, l'image $X_s(L)/G := \pi(X_s(L))$ est un ouvert de $X/\!\!/G$,

Motivation : existence de quotients (Mumford)

Théorème : Il existe un schéma quasi-projectif (projectif si X l'est) $X/\!\!/G$ et un morphisme G-invariant

$$\pi : X_{ss}(L) \longrightarrow X/\!\!/G$$

qui est un bon quotient de $X_{ss}(L)$, c'est-à-dire que :

- le morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{X/\!\!/G} \to \pi_* \mathcal{O}^G_{X_{ss}(L)}$ sur $X/\!\!/G$ est un isomorphisme,
- si Z est un fermé G-invariant de $X_{ss}(L)$, $\pi(Z)$ est un fermé de $X/\!\!/G$,
- si Z_1, Z_2 sont deux fermés G-invariants disjoints de $X_{ss}(L)$, les fermés $\pi(Z_1)$ et $\pi(Z_2)$ de $X/\!\!/G$ sont disjoints.

De plus, l'image $X_s(L)/G := \pi(X_s(L))$ est un ouvert de $X/\!\!/G$, son image réciproque est $X_s(L)$

Motivation : existence de quotients (Mumford)

Théorème : Il existe un schéma quasi-projectif (projectif si X l'est) $X /\!\!/ G$ et un morphisme G-invariant

$$\pi : X_{ss}(L) \longrightarrow X /\!\!/ G$$

qui est un bon quotient de $X_{ss}(L)$, c'est-à-dire que :

- le morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{X/\!\!/G} \to \pi_* \mathcal{O}^G_{X_{ss}(L)}$ sur $X /\!\!/ G$ est un isomorphisme,
- si Z est un fermé G-invariant de $X_{ss}(L)$, $\pi(Z)$ est un fermé de $X /\!\!/ G$,
- si Z_1, Z_2 sont deux fermés G-invariants disjoints de $X_{ss}(L)$, les fermés $\pi(Z_1)$ et $\pi(Z_2)$ de $X /\!\!/ G$ sont disjoints.

De plus, l'image $X_s(L)/G := \pi(X_s(L))$ est un ouvert de $X /\!\!/ G$, son image réciproque est $X_s(L)$ et la restriction $\pi_{|X_s(L)}$ est un quotient géométrique,

Motivation : existence de quotients (Mumford)

Théorème : Il existe un schéma quasi-projectif (projectif si X l'est) $X/\!\!/G$ et un morphisme G-invariant

$$\pi : X_{ss}(L) \longrightarrow X/\!\!/G$$

qui est un bon quotient de $X_{ss}(L)$, c'est-à-dire que :

- le morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{X/\!\!/G} \to \pi_* \mathcal{O}^G_{X_{ss}(L)}$ sur $X/\!\!/G$ est un isomorphisme,
- si Z est un fermé G-invariant de $X_{ss}(L)$, $\pi(Z)$ est un fermé de $X/\!\!/G$,
- si Z_1, Z_2 sont deux fermés G-invariants disjoints de $X_{ss}(L)$, les fermés $\pi(Z_1)$ et $\pi(Z_2)$ de $X/\!\!/G$ sont disjoints.

De plus, l'image $X_s(L)/G := \pi(X_s(L))$ est un ouvert de $X/\!\!/G$, son image réciproque est $X_s(L)$ et la restriction $\pi_{|X_s(L)}$ est un quotient géométrique, c'est-à-dire un bon quotient dont les k-fibres sont exactement les $G(k)$-orbites.

Cas d'un espace projectif

Cas d'un espace projectif

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie > 0, muni d'une représentation du k-groupe G.

Cas d'un espace projectif

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie > 0, muni d'une représentation du k-groupe G.

En particulier, le groupe G agit sur l'espace projectif

$$X = \mathbb{P}(V) := \mathrm{Proj}_k S^{\bullet} V^{\vee}$$

Cas d'un espace projectif

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie > 0, muni d'une représentation du k-groupe G.

En particulier, le groupe G agit sur l'espace projectif

$$X = \mathbb{P}(V) := \mathrm{Proj}_k S^{\bullet} V^{\vee}$$

et le fibré en droites $L = \mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}(V)$ est linéarisé pour cette action.

Cas d'un espace projectif

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie > 0, muni d'une représentation du k-groupe G.

En particulier, le groupe G agit sur l'espace projectif

$$X = \mathbb{P}(V) := \mathrm{Proj}_k S^\bullet V^\vee$$

et le fibré en droites $L = \mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}(V)$ est linéarisé pour cette action.

Proposition : Soient x un k-point de $\mathbb{P}(V)(k)$

Cas d'un espace projectif

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie > 0, muni d'une représentation du k-groupe G.

En particulier, le groupe G agit sur l'espace projectif

$$X = \mathbb{P}(V) := \mathrm{Proj}_k S^\bullet V^\vee$$

et le fibré en droites $L = \mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}(V)$ est linéarisé pour cette action.

Proposition : Soient x un k-point de $\mathbb{P}(V)(k)$ et x^* un vecteur non nul de la droite $x \subset V$.

Cas d'un espace projectif

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie > 0, muni d'une représentation du k-groupe G.

En particulier, le groupe G agit sur l'espace projectif

$$X = \mathbb{P}(V) := \mathrm{Proj}_k S^\bullet V^\vee$$

et le fibré en droites $L = \mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}(V)$ est linéarisé pour cette action.

Proposition : Soient x un k-point de $\mathbb{P}(V)(k)$ et x^* un vecteur non nul de la droite $x \subset V$.

Le point x est semi-stable si et seulement si l'adhérence $\overline{G(k) \,.\, x^*}$ dans V ne contient pas 0.

Cas d'un espace projectif

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie > 0, muni d'une représentation du k-groupe G.

En particulier, le groupe G agit sur l'espace projectif

$$X = \mathbb{P}(V) := \mathrm{Proj}_k S^\bullet V^\vee$$

et le fibré en droites $L = \mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}(V)$ est linéarisé pour cette action.

Proposition : Soient x un k-point de $\mathbb{P}(V)(k)$ et x^* un vecteur non nul de la droite $x \subset V$.

Le point x est semi-stable si et seulement si l'adhérence $\overline{G(k)\,.\,x^*}$ dans V ne contient pas 0.

Le point x est stable si et seulement si l'orbite $G(k)\,.\,x^*$ est fermée dans V et si le stabilisateur G_{x^*} est fini.

Mesure de Hilbert-Mumford

Mesure de Hilbert-Mumford

Soit $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ un sous-groupe à un paramètre de G.

Mesure de Hilbert-Mumford

Soit $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ un sous-groupe à un paramètre de G. Il induit une action linéaire de $\mathbb{G}_m$ sur V,

Mesure de Hilbert-Mumford

Soit $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ un sous-groupe à un paramètre de G. Il induit une action linéaire de $\mathbb{G}_m$ sur V, donc une décomposition

$$V := \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} V_{\lambda,r}$$

telle que pour tous r, v dans $V_{\lambda,r}$, $\lambda(t) . v = t^r v$.

Mesure de Hilbert-Mumford

Soit $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ un sous-groupe à un paramètre de G. Il induit une action linéaire de $\mathbb{G}_m$ sur V, donc une décomposition

$$V := \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} V_{\lambda,r}$$

telle que pour tous r, v dans $V_{\lambda,r}$, $\lambda(t) \,.\, v = t^r v$.

Pour tout $v = \sum_r v_{\lambda,r} \neq 0$ dans V où $v_{\lambda,r} \in V_{\lambda,r}$,

Mesure de Hilbert-Mumford

Soit $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ un sous-groupe à un paramètre de G. Il induit une action linéaire de $\mathbb{G}_m$ sur V, donc une décomposition

$$V := \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} V_{\lambda,r}$$

telle que pour tous r, v dans $V_{\lambda,r}$, $\lambda(t) \,.\, v = t^r v$.

Pour tout $v = \sum_r v_{\lambda,r} \neq 0$ dans V où $v_{\lambda,r} \in V_{\lambda,r}$, la mesure de Hilbert-Mumford de v est

$$\mu(v,\lambda) := -\min\{r | v_{\lambda,r} \neq 0\}.$$

Mesure de Hilbert-Mumford

Soit $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ un sous-groupe à un paramètre de G. Il induit une action linéaire de $\mathbb{G}_m$ sur V, donc une décomposition

$$V := \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} V_{\lambda,r}$$

telle que pour tous r, v dans $V_{\lambda,r}$, $\lambda(t) \,.\, v = t^r v$.

Pour tout $v = \sum_r v_{\lambda,r} \neq 0$ dans V où $v_{\lambda,r} \in V_{\lambda,r}$, la mesure de Hilbert-Mumford de v est

$$\mu(v, \lambda) := -\min\{r | v_{\lambda,r} \neq 0\}.$$

L'entier $\mu(v, \lambda)$ est strictement positif (resp. nul, resp. strictement négatif)

Mesure de Hilbert-Mumford

Soit $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ un sous-groupe à un paramètre de G. Il induit une action linéaire de $\mathbb{G}_m$ sur V, donc une décomposition

$$V := \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} V_{\lambda,r}$$

telle que pour tous r, v dans $V_{\lambda,r}$, $\lambda(t) . v = t^r v$.

Pour tout $v = \sum_r v_{\lambda,r} \neq 0$ dans V où $v_{\lambda,r} \in V_{\lambda,r}$, la mesure de Hilbert-Mumford de v est

$$\mu(v, \lambda) := -\min\{r | v_{\lambda,r} \neq 0\}.$$

L'entier $\mu(v, \lambda)$ est strictement positif (resp. nul, resp. strictement négatif) si et seulement si la limite quand $t \to 0$ de $\lambda(t) . v$ est non définie (resp. un point de $V \setminus \{0\}$, resp. 0).

Critère de Hilbert-Mumford

Critère de Hilbert-Mumford

Théorème : Soient x dans $\mathbb{P}(V)(k)$ et x^* un vecteur non nul de la droite $x \subset V(k)$.

Critère de Hilbert-Mumford

Théorème : Soient x dans $\mathbb{P}(V)(k)$ et x^* un vecteur non nul de la droite $x \subset V(k)$.

Le point x est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tout sous-groupe à un paramètre non trivial λ de G, $\mu(x^*, \lambda) \geq 0$ (resp. > 0).

II. (Semi-)stabilité des hypersurfaces projectives

Formes d-iques $(N+1)$-aires

Formes d-iques $(N+1)$-aires

$(= (N+1)$-ary quantics$)$

Formes d-iques $(N+1)$-aires

$(= (N+1)$-ary quantics$)$

Soient $N, d \geq 1$ des entiers.

Formes d-iques $(N+1)$-aires

$(= (N+1)$-ary quantics$)$

Soient $N, d \geq 1$ des entiers. On considère l'espace vectoriel :

$$V := k[X_0, \ldots, X_N]_d$$

Formes d-iques $(N+1)$-aires

(= $(N+1)$-ary quantics)

Soient $N, d \geq 1$ des entiers. On considère l'espace vectoriel :

$$V := k[X_0, \dots, X_N]_d$$

et l'espace projectif associé

$$\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}_k^{\binom{N+d}{d}-1}.$$

Formes d-iques $(N+1)$-aires

(= $(N+1)$-ary quantics)

Soient $N, d \geq 1$ des entiers. On considère l'espace vectoriel :

$$V := k[X_0, \ldots, X_N]_d$$

et l'espace projectif associé

$$\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}_k^{\binom{N+d}{d}-1}.$$

On identifie un point $[F]$ de $\mathbb{P}(V)(k)$ à l'hypersurface $H = (F = 0)$ de degré d dans $\mathbb{P}_k^N$ définie par l'annulation du polynôme homogène F.

Formes d-iques $(N+1)$-aires

(= $(N+1)$-ary quantics)

Soient $N, d \geq 1$ des entiers. On considère l'espace vectoriel :

$$V := k[X_0, \ldots, X_N]_d$$

et l'espace projectif associé

$$\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}_k^{\binom{N+d}{d}-1}.$$

On identifie un point $[F]$ de $\mathbb{P}(V)(k)$ à l'hypersurface $H = (F = 0)$ de degré d dans $\mathbb{P}_k^N$ définie par l'annulation du polynôme homogène F.

Le groupe $G := \mathrm{SL}_{N+1,k}$ agit sur V (donc sur $\mathbb{P}(V)$) par :

$$g \,.\, F(X_0, \ldots, X_N) := F \circ g^{-1} = F\left(\sum_{i=0}^{N} (g^{-1})_{0i} X_i, \ldots, \sum_{i=0}^{N} (g^{-1})_{Ni} X_i\right).$$

Formes d-iques $(N+1)$-aires

$(= (N+1)$-ary quantics)

Soient $N, d \geq 1$ des entiers. On considère l'espace vectoriel :

$$V := k[X_0, \dots, X_N]_d$$

et l'espace projectif associé

$$\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}_k^{\binom{N+d}{d}-1}.$$

On identifie un point $[F]$ de $\mathbb{P}(V)(k)$ à l'hypersurface $H = (F = 0)$ de degré d dans $\mathbb{P}_k^N$ définie par l'annulation du polynôme homogène F.

Le groupe $G := \mathrm{SL}_{N+1,k}$ agit sur V (donc sur $\mathbb{P}(V)$) par :

$$g \,.\, F(X_0, \dots, X_N) := F \circ g^{-1} = F\left(\sum_{i=0}^{N} (g^{-1})_{0i} X_i, \dots, \sum_{i=0}^{N} (g^{-1})_{Ni} X_i\right).$$

On dit qu'une hypersurface (i.e. un diviseur effectif) H de degré d dans $\mathbb{P}_k^N$ est (semi-)stable si le point $[F] \in \mathbb{P}(V)(k)$ associé est (semi-)stable pour cette action.

Hypersurfaces lisses

Hypersurfaces lisses

Une hypersurface de degré $d = 1$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (hyperplan) n'est jamais semi-stable.

Hypersurfaces lisses

Une hypersurface de degré $d = 1$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (hyperplan) n'est jamais semi-stable.

Une hypersurface de degré $d = 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (quadrique) est semi-stable si et seulement si elle est lisse,

Hypersurfaces lisses

Une hypersurface de degré $d = 1$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (hyperplan) n'est jamais semi-stable.

Une hypersurface de degré $d = 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (quadrique) est semi-stable si et seulement si elle est lisse, et n'est jamais stable.

Hypersurfaces lisses

Une hypersurface de degré $d = 1$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (hyperplan) n'est jamais semi-stable.

Une hypersurface de degré $d = 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (quadrique) est semi-stable si et seulement si elle est lisse, et n'est jamais stable.

Théorème (Mumford en caractéristique nulle) : Une hypersurface lisse de degré $d \geq 3$ est stable.

Hypersurfaces lisses

Une hypersurface de degré $d = 1$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (hyperplan) n'est jamais semi-stable.

Une hypersurface de degré $d = 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (quadrique) est semi-stable si et seulement si elle est lisse, et n'est jamais stable.

Théorème (Mumford en caractéristique nulle) : Une hypersurface lisse de degré $d \geq 3$ est stable.

Idée de la preuve :

Hypersurfaces lisses

Une hypersurface de degré $d = 1$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (hyperplan) n'est jamais semi-stable.

Une hypersurface de degré $d = 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (quadrique) est semi-stable si et seulement si elle est lisse, et n'est jamais stable.

Théorème (Mumford en caractéristique nulle) : Une hypersurface lisse de degré $d \geq 3$ est stable.

Idée de la preuve :

Semi-stabilité : existence du discriminant :

Hypersurfaces lisses

Une hypersurface de degré $d = 1$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (hyperplan) n'est jamais semi-stable.

Une hypersurface de degré $d = 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (quadrique) est semi-stable si et seulement si elle est lisse, et n'est jamais stable.

Théorème (Mumford en caractéristique nulle) : Une hypersurface lisse de degré $d \geq 3$ est stable.

Idée de la preuve :

Semi-stabilité : existence du discriminant :

$$\mathrm{Disc}_{N,d} \in \Gamma\Big(\mathbb{P}(k[X_0, \ldots, X_N]_d), \mathcal{O}((N+1)(d-1)^N)\Big)^{\mathrm{SL}_{N+1,k}}$$

Hypersurfaces lisses

Une hypersurface de degré $d = 1$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (hyperplan) n'est jamais semi-stable.

Une hypersurface de degré $d = 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (quadrique) est semi-stable si et seulement si elle est lisse, et n'est jamais stable.

Théorème (Mumford en caractéristique nulle) : Une hypersurface lisse de degré $d \geq 3$ est stable.

Idée de la preuve :

Semi-stabilité : existence du discriminant :

$$\mathrm{Disc}_{N,d} \in \Gamma\Big(\mathbb{P}(k[X_0, \ldots, X_N]_d), \mathcal{O}((N+1)(d-1)^N)\Big)^{\mathrm{SL}_{N+1,k}}$$

tel que les hypersurfaces lisses soient exactement les hypersurfaces de discriminant non nul.

Hypersurfaces lisses

Une hypersurface de degré $d = 1$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (hyperplan) n'est jamais semi-stable.

Une hypersurface de degré $d = 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$ (quadrique) est semi-stable si et seulement si elle est lisse, et n'est jamais stable.

Théorème (Mumford en caractéristique nulle) : Une hypersurface lisse de degré $d \geq 3$ est stable.

Idée de la preuve :

Semi-stabilité : existence du discriminant :

$$\mathrm{Disc}_{N,d} \in \Gamma\big(\mathbb{P}(k[X_0, \ldots, X_N]_d), \mathcal{O}((N+1)(d-1)^N)\big)^{\mathrm{SL}_{N+1,k}}$$

tel que les hypersurfaces lisses soient exactement les hypersurfaces de discriminant non nul.

Stabilité : les hypersurfaces lisses de degré ≥ 3 n'ont pas de champs de vecteurs globaux non nuls (Kodaira-Spencer), donc leurs stabilisateurs sont finis.

Critère de Hilbert-Mumford pour les hypersurfaces projectives

Critère de Hilbert-Mumford pour les hypersurfaces projectives

Soient $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ et $m = (m_0, \ldots, m_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$.

Critère de Hilbert-Mumford pour les hypersurfaces projectives

Soient $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ et $m = (m_0, \ldots, m_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$.
L'α-degré du monôme $X^m = X_0^{m_0} \ldots X_N^{m_N}$ est

$$\deg_\alpha(X_0^{m_0} \ldots X_N^{m_N}) = \sum_{i=0}^{N} m_i \alpha_i.$$

Critère de Hilbert-Mumford pour les hypersurfaces projectives

Soient $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ et $m = (m_0, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$.
L'α-degré du monôme $X^m = X_0^{m_0} \dots X_N^{m_N}$ est

$$\deg_\alpha(X_0^{m_0} \dots X_N^{m_N}) = \sum_{i=0}^{N} m_i \alpha_i.$$

L'α-degré d'un polynôme homogène $P = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |m| = d}} \lambda_m X^m$ est

$$\deg_\alpha(P) = \max_{\substack{m \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |m| = d \\ \lambda_m \neq 0}} \deg_\alpha(X^m).$$

Critère de Hilbert-Mumford pour les hypersurfaces projectives

Soient $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ et $m = (m_0, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$.
L'α-degré du monôme $X^m = X_0^{m_0} \dots X_N^{m_N}$ est

$$\deg_\alpha(X_0^{m_0} \dots X_N^{m_N}) = \sum_{i=0}^{N} m_i \alpha_i.$$

L'α-degré d'un polynôme homogène $P = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |m|=d}} \lambda_m X^m$ est

$$\deg_\alpha(P) = \max_{\substack{m \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |m|=d \\ \lambda_m \neq 0}} \deg_\alpha(X^m).$$

Théorème : Une hypersurface $H = (F_H = 0)$ de $\mathbb{P}_k^N$ est semi-stable (resp. stable)

Critère de Hilbert-Mumford pour les hypersurfaces projectives

Soient $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ et $m = (m_0, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$.
L'α-degré du monôme $X^m = X_0^{m_0} \dots X_N^{m_N}$ est

$$\deg_\alpha(X_0^{m_0} \dots X_N^{m_N}) = \sum_{i=0}^{N} m_i \alpha_i.$$

L'α-degré d'un polynôme homogène $P = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |m| = d}} \lambda_m X^m$ est

$$\deg_\alpha(P) = \max_{\substack{m \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |m| = d \\ \lambda_m \neq 0}} \deg_\alpha(X^m).$$

Théorème : Une hypersurface $H = (F_H = 0)$ de $\mathbb{P}_k^N$ est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tout g dans $\mathrm{SL}_{N+1}(k)$ et pour tout α dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$:

Critère de Hilbert-Mumford pour les hypersurfaces projectives

Soient $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ et $m = (m_0, \ldots, m_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$.
L'α-degré du monôme $X^m = X_0^{m_0} \ldots X_N^{m_N}$ est

$$\deg_\alpha(X_0^{m_0} \ldots X_N^{m_N}) = \sum_{i=0}^{N} m_i \alpha_i.$$

L'α-degré d'un polynôme homogène $P = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |m| = d}} \lambda_m X^m$ est

$$\deg_\alpha(P) = \max_{\substack{m \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |m| = d \\ \lambda_m \neq 0}} \deg_\alpha(X^m).$$

Théorème : Une hypersurface $H = (F_H = 0)$ de $\mathbb{P}_k^N$ est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tout g dans $\mathrm{SL}_{N+1}(k)$ et pour tout α dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$:

$$\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0 \Longrightarrow \deg_\alpha(F_H \circ g) \geq 0 \quad (\text{resp. } > 0).$$

Critère de Hilbert-Mumford pour les hypersurfaces projectives

Soient $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ et $m = (m_0, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$.
L'α-degré du monôme $X^m = X_0^{m_0} \dots X_N^{m_N}$ est

$$\deg_\alpha(X_0^{m_0} \dots X_N^{m_N}) = \sum_{i=0}^{N} m_i \alpha_i.$$

L'α-degré d'un polynôme homogène $P = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |m| = d}} \lambda_m X^m$ est

$$\deg_\alpha(P) = \max_{\substack{m \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |m| = d \\ \lambda_m \neq 0}} \deg_\alpha(X^m).$$

Théorème : Une hypersurface $H = (F_H = 0)$ de $\mathbb{P}_k^N$ est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tout g dans $\mathrm{SL}_{N+1}(k)$ et pour tout α dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$:

$$\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0 \Longrightarrow \deg_\alpha(F_H \circ g) \geq 0 \quad (\text{resp. } > 0).$$

Remarque : il suffit de vérifier l'implication pour les α tels que

$$\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N.$$

Application : formes binaires

Application : formes binaires

On prend $N = 1$ et $F = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i X_0^i X_1^{d-i}$ dans $k[X_0, X_1]_d$.

Application : formes binaires

On prend $N = 1$ et $F = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i X_0^i X_1^{d-i}$ dans $k[X_0, X_1]_d$.

Il suffit de vérifier le critère pour $\alpha = (-1, 1)$.

Application : formes binaires

On prend $N = 1$ et $F = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i X_0^i X_1^{d-i}$ dans $k[X_0, X_1]_d$.

Il suffit de vérifier le critère pour $\alpha = (-1, 1)$.

On a :

$$\deg_\alpha(F) = \max_{\substack{i \in \{0,\dots,d\},\\ \lambda_i \neq 0}} (d - 2i).$$

Application : formes binaires

On prend $N = 1$ et $F = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i X_0^i X_1^{d-i}$ dans $k[X_0, X_1]_d$.

Il suffit de vérifier le critère pour $\alpha = (-1, 1)$.

On a :

$$\deg_\alpha(F) = \max_{\substack{i \in \{0,\dots,d\}, \\ \lambda_i \neq 0}} (d - 2i).$$

Donc $\deg_\alpha(F) \geq 0$ (resp. > 0)

Application : formes binaires

On prend $N = 1$ et $F = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i X_0^i X_1^{d-i}$ dans $k[X_0, X_1]_d$.

Il suffit de vérifier le critère pour $\alpha = (-1, 1)$.

On a :

$$\deg_\alpha(F) = \max_{\substack{i \in \{0,\dots,d\}, \\ \lambda_i \neq 0}} (d - 2i).$$

Donc $\deg_\alpha(F) \geq 0$ (resp. > 0) si et seulement si il existe $i \leq d/2$ (resp. $< d/2$) tel que $\lambda_i \neq 0$,

Application : formes binaires

On prend $N = 1$ et $F = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i X_0^i X_1^{d-i}$ dans $k[X_0, X_1]_d$.

Il suffit de vérifier le critère pour $\alpha = (-1, 1)$.

On a :

$$\deg_\alpha(F) = \max_{\substack{i \in \{0, \ldots, d\}, \\ \lambda_i \neq 0}} (d - 2i).$$

Donc $\deg_\alpha(F) \geq 0$ (resp. > 0) si et seulement si il existe $i \leq d/2$ (resp. $< d/2$) tel que $\lambda_i \neq 0$, i.e. si et seulement si la multiplicité en $[0 : 1]$ de F est $\leq d/2$ (resp. $< d/2$).

Application : formes binaires

On prend $N = 1$ et $F = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i X_0^i X_1^{d-i}$ dans $k[X_0, X_1]_d$.

Il suffit de vérifier le critère pour $\alpha = (-1, 1)$.

On a :

$$\deg_\alpha(F) = \max_{\substack{i \in \{0,\dots,d\},\\ \lambda_i \neq 0}} (d - 2i).$$

Donc $\deg_\alpha(F) \geq 0$ (resp. > 0) si et seulement si il existe $i \leq d/2$ (resp. $< d/2$) tel que $\lambda_i \neq 0$, i.e. si et seulement si la multiplicité en $[0 : 1]$ de F est $\leq d/2$ (resp. $< d/2$).

On obtient le critère suivant.

Application : formes binaires

On prend $N = 1$ et $F = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i X_0^i X_1^{d-i}$ dans $k[X_0, X_1]_d$.

Il suffit de vérifier le critère pour $\alpha = (-1, 1)$.

On a :

$$\deg_\alpha(F) = \max_{\substack{i \in \{0,\dots,d\},\\ \lambda_i \neq 0}} (d - 2i).$$

Donc $\deg_\alpha(F) \geq 0$ (resp. > 0) si et seulement si il existe $i \leq d/2$ (resp. $< d/2$) tel que $\lambda_i \neq 0$, i.e. si et seulement si la multiplicité en $[0:1]$ de F est $\leq d/2$ (resp. $< d/2$).

On obtient le critère suivant.

Proposition : un diviseur effectif de degré d dans $\mathbb{P}_k^1$ est semi-stable (resp. stable) si et seulement si il ne contient aucun point de multiplicité $> d/2$ (resp. $\geq d/2$).

Critères de (semi-)stabilité pour (N, d) fixé

Critères de (semi-)stabilité pour (N, d) fixé

On suppose que k est de caractéristique nulle ou suffisamment grande.

Critères de (semi-)stabilité pour (N, d) fixé

On suppose que k est de caractéristique nulle ou suffisamment grande.

(Hilbert 1893) : Si $(N, d) = (2, 3)$, une courbe cubique H est semi-stable (resp. stable)

Critères de (semi-)stabilité pour (N, d) fixé

On suppose que k est de caractéristique nulle ou suffisamment grande.

(Hilbert 1893) : Si $(N, d) = (2, 3)$, une courbe cubique H est semi-stable (resp. stable) si et seulement si elle n'admet que des points doubles ordinaires (resp. elle est lisse).

Critères de (semi-)stabilité pour (N, d) fixé

On suppose que k est de caractéristique nulle ou suffisamment grande.

(Hilbert 1893) : Si $(N, d) = (2, 3)$, une courbe cubique H est semi-stable (resp. stable) si et seulement si elle n'admet que des points doubles ordinaires (resp. elle est lisse).

(Hilbert 1893) : Si $(N, d) = (3, 3)$, une surface cubique H est semi-stable (resp. stable)

Critères de (semi-)stabilité pour (N, d) fixé

On suppose que k est de caractéristique nulle ou suffisamment grande.

(Hilbert 1893) : Si $(N, d) = (2, 3)$, une courbe cubique H est semi-stable (resp. stable) si et seulement si elle n'admet que des points doubles ordinaires (resp. elle est lisse).

(Hilbert 1893) : Si $(N, d) = (3, 3)$, une surface cubique H est semi-stable (resp. stable) si et seulement si elle n'admet que des points doubles ordinaires ou des *cusps* (forme locale de l'équation $x^2 + y^2 + z^3 = 0$) (resp. que des points doubles ordinaires).

Critères de (semi-)stabilité pour (N, d) fixé

On suppose que k est de caractéristique nulle ou suffisamment grande.

(Hilbert 1893) : Si $(N, d) = (2, 3)$, une courbe cubique H est semi-stable (resp. stable) si et seulement si elle n'admet que des points doubles ordinaires (resp. elle est lisse).

(Hilbert 1893) : Si $(N, d) = (3, 3)$, une surface cubique H est semi-stable (resp. stable) si et seulement si elle n'admet que des points doubles ordinaires ou des *cusps* (forme locale de l'équation $x^2 + y^2 + z^3 = 0$) (resp. que des points doubles ordinaires).

(Shah $\leq$ 1981) : classification pour $(N, d) = (3, 4)$ (surfaces quartiques).

Critères de (semi-)stabilité pour (N, d) fixé

On suppose que k est de caractéristique nulle ou suffisamment grande.

(Hilbert 1893) : Si $(N, d) = (2, 3)$, une courbe cubique H est semi-stable (resp. stable) si et seulement si elle n'admet que des points doubles ordinaires (resp. elle est lisse).

(Hilbert 1893) : Si $(N, d) = (3, 3)$, une surface cubique H est semi-stable (resp. stable) si et seulement si elle n'admet que des points doubles ordinaires ou des *cusps* (forme locale de l'équation $x^2 + y^2 + z^3 = 0$) (resp. que des points doubles ordinaires).

(Shah $\leq$ 1981) : classification pour $(N, d) = (3, 4)$ (surfaces quartiques).

(Allcock 2003 et Yokoyama 2002) : classification pour $(N, d) = (4, 3)$ (solides cubiques).

Critères de (semi-)stabilité pour (N, d) fixé

On suppose que k est de caractéristique nulle ou suffisamment grande.

(Hilbert 1893) : Si $(N, d) = (2, 3)$, une courbe cubique H est semi-stable (resp. stable) si et seulement si elle n'admet que des points doubles ordinaires (resp. elle est lisse).

(Hilbert 1893) : Si $(N, d) = (3, 3)$, une surface cubique H est semi-stable (resp. stable) si et seulement si elle n'admet que des points doubles ordinaires ou des *cusps* (forme locale de l'équation $x^2 + y^2 + z^3 = 0$) (resp. que des points doubles ordinaires).

(Shah $\leq$ 1981) : classification pour $(N, d) = (3, 4)$ (surfaces quartiques).

(Allcock 2003 et Yokoyama 2002) : classification pour $(N, d) = (4, 3)$ (solides cubiques).

(Laza 2009 et Yokoyama 2008) : classification pour $(N, d) = (5, 3)$ (*four-folds* cubiques).

Critères de (semi-)stabilité généraux

Critères de (semi-)stabilité généraux

Si X est un k-schéma intègre normal, D est un diviseur de Cartier effectif et P est un point de $X(k)$,

Critères de (semi-)stabilité généraux

Si X est un k-schéma intègre normal, D est un diviseur de Cartier effectif et P est un point de $X(k)$, on définit le seuil log-canonique par :

$$\mathrm{lct}_P(X,D) := \sup\left\{c \geq 0 \mid (X, c.D) \text{ est log-canonique au voisinage de } P\right\} \leq 1.$$

Critères de (semi-)stabilité généraux

Si X est un k-schéma intègre normal, D est un diviseur de Cartier effectif et P est un point de $X(k)$, on définit le seuil log-canonique par :

$$\mathrm{lct}_P(X,D) := \sup\left\{c \geq 0 \mid (X, c.D) \text{ est log-canonique au voisinage de } P\right\} \leq 1.$$

Théorème (Lee 2008 en caractéristique nulle, Okawa 2011 en caractéristique positive) :

Critères de (semi-)stabilité généraux

Si X est un k-schéma intègre normal, D est un diviseur de Cartier effectif et P est un point de $X(k)$, on définit le seuil log-canonique par :

$$\mathrm{lct}_P(X, D) := \sup\left\{c \geq 0 \mid (X, c.D) \text{ est log-canonique au voisinage de } P\right\} \leq 1.$$

Théorème (Lee 2008 en caractéristique nulle, Okawa 2011 en caractéristique positive) : Si H est une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N_k$,

Critères de (semi-)stabilité généraux

Si X est un k-schéma intègre normal, D est un diviseur de Cartier effectif et P est un point de $X(k)$, on définit le seuil log-canonique par :

$\mathrm{lct}_P(X, D) := \sup\left\{c \geq 0 \mid (X, c.D) \text{ est log-canonique au voisinage de } P\right\} \leq 1.$

Théorème (Lee 2008 en caractéristique nulle, Okawa 2011 en caractéristique positive) : Si H est une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}_k^N$, et si pour tout P dans $H(k)$, on a :

$$\mathrm{lct}_P(\mathbb{P}_k^N, H) \geq \frac{N+1}{d} \quad \left(\text{resp.} > \frac{N+1}{d}\right),$$

Critères de (semi-)stabilité généraux

Si X est un k-schéma intègre normal, D est un diviseur de Cartier effectif et P est un point de $X(k)$, on définit le seuil log-canonique par :

$\mathrm{lct}_P(X, D) := \sup \left\{ c \geq 0 \mid (X, c.D) \text{ est log-canonique au voisinage de } P \right\} \leq 1.$

Théorème (Lee 2008 en caractéristique nulle, Okawa 2011 en caractéristique positive) : Si H est une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N_k$, et si pour tout P dans $H(k)$, on a :

$$\mathrm{lct}_P(\mathbb{P}^N_k, H) \geq \frac{N+1}{d} \quad \left(\text{resp.} > \frac{N+1}{d}\right),$$

alors H est semi-stable (resp. stable).

Critères de (semi-)stabilité généraux

Si X est un k-schéma intègre normal, D est un diviseur de Cartier effectif et P est un point de $X(k)$, on définit le seuil log-canonique par :

$\mathrm{lct}_P(X, D) := \sup\left\{c \geq 0 \mid (X, c.D) \text{ est log-canonique au voisinage de } P\right\} \leq 1.$

Théorème (Lee 2008 en caractéristique nulle, Okawa 2011 en caractéristique positive) : Si H est une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}_k^N$, et si pour tout P dans $H(k)$, on a :

$$\mathrm{lct}_P(\mathbb{P}_k^N, H) \geq \frac{N+1}{d} \quad \left(\text{resp.} > \frac{N+1}{d}\right),$$

alors H est semi-stable (resp. stable).

Théorème (Tian 1994) : Si k est de caractéristique nulle, si le couple $(\mathbb{P}_k^N, H)$ est log-terminal,

Critères de (semi-)stabilité généraux

Si X est un k-schéma intègre normal, D est un diviseur de Cartier effectif et P est un point de $X(k)$, on définit le seuil log-canonique par :

$\mathrm{lct}_P(X, D) := \sup\left\{c \geq 0 \mid (X, c.D) \text{ est log-canonique au voisinage de } P\right\} \leq 1.$

Théorème (Lee 2008 en caractéristique nulle, Okawa 2011 en caractéristique positive) : Si H est une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}_k^N$, et si pour tout P dans $H(k)$, on a :

$$\mathrm{lct}_P(\mathbb{P}_k^N, H) \geq \frac{N+1}{d} \quad \left(\text{resp. } > \frac{N+1}{d}\right),$$

alors H est semi-stable (resp. stable).

Théorème (Tian 1994) : Si k est de caractéristique nulle, si le couple $(\mathbb{P}_k^N, H)$ est log-terminal, et si on a :

$$d \geq N+1,$$

Critères de (semi-)stabilité généraux

Si X est un k-schéma intègre normal, D est un diviseur de Cartier effectif et P est un point de $X(k)$, on définit le seuil log-canonique par :

$\mathrm{lct}_P(X,D) := \sup\left\{c \geq 0 \mid (X, c.D) \text{ est log-canonique au voisinage de } P\right\} \leq 1.$

Théorème (Lee 2008 en caractéristique nulle, Okawa 2011 en caractéristique positive) : Si H est une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N_k$, et si pour tout P dans $H(k)$, on a :

$$\mathrm{lct}_P(\mathbb{P}^N_k, H) \geq \frac{N+1}{d} \quad \left(\text{resp.} > \frac{N+1}{d}\right),$$

alors H est semi-stable (resp. stable).

Théorème (Tian 1994) : Si k est de caractéristique nulle, si le couple $(\mathbb{P}^N_k, H)$ est log-terminal, et si on a :

$$d \geq N+1,$$

alors H est stable.

Critères de (semi-)stabilité généraux

Si X est un k-schéma intègre normal, D est un diviseur de Cartier effectif et P est un point de $X(k)$, on définit le seuil log-canonique par :

$\mathrm{lct}_P(X, D) := \sup \left\{ c \geq 0 \mid (X, c.D) \text{ est log-canonique au voisinage de } P \right\} \leq 1.$

Théorème (Lee 2008 en caractéristique nulle, Okawa 2011 en caractéristique positive) : Si H est une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}_k^N$, et si pour tout P dans $H(k)$, on a :

$$\mathrm{lct}_P(\mathbb{P}_k^N, H) \geq \frac{N+1}{d} \quad \left(\text{resp.} > \frac{N+1}{d}\right),$$

alors H est semi-stable (resp. stable).

Théorème (Tian 1994) : Si k est de caractéristique nulle, si le couple $(\mathbb{P}_k^N, H)$ est log-terminal, et si on a :

$$d \geq N+1,$$

alors H est stable.

Ces résultats ne sont appliquables que lorsque $d \geq N+1$ (i.e. lorsque H n'est pas une variété de Fano).

Critères appliquables dans le cas Fano

Critères appliquables dans le cas Fano

Théorème (TM 2024) : Soit H une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$.

Critères appliquables dans le cas Fano

Théorème (TM 2024) : Soit H une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$. Soient δ la multiplicité maximale de H en un point de $H(k)$ et s la dimension du lieu singulier H_{sing} de H.

Critères appliquables dans le cas Fano

Théorème (TM 2024) : Soit H une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$. Soient δ la multiplicité maximale de H en un point de $H(k)$ et s la dimension du lieu singulier H_{sing} de H.

(1) Si on a :

$$d \geq \delta \min(N+1, s+3) \quad \text{(resp. } d > \delta \min(N+1, s+3)\text{)},$$

Critères appliquables dans le cas Fano

Théorème (TM 2024) : Soit H une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$. Soient δ la multiplicité maximale de H en un point de $H(k)$ et s la dimension du lieu singulier H_{sing} de H.

(1) Si on a :

$$d \geq \delta \min(N+1, s+3) \quad (\text{resp. } d > \delta \min(N+1, s+3)),$$

alors H est semi-stable (resp. stable).

Critères appliquables dans le cas Fano

Théorème (TM 2024) : Soit H une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$. Soient δ la multiplicité maximale de H en un point de $H(k)$ et s la dimension du lieu singulier H_{sing} de H.

(1) Si on a :

$$d \geq \delta \ \min(N+1, s+3) \quad (\text{resp. } d > \delta \ \min(N+1, s+3)\,),$$

alors H est semi-stable (resp. stable).

(2) Supposons $N \geq 2$.

Critères appliquables dans le cas Fano

Théorème (TM 2024) : Soit H une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$. Soient δ la multiplicité maximale de H en un point de $H(k)$ et s la dimension du lieu singulier H_{sing} de H.

(1) Si on a :

$$d \geq \delta \min(N+1, s+3) \quad (\text{resp. } d > \delta \min(N+1, s+3)),$$

alors H est semi-stable (resp. stable).

(2) Supposons $N \geq 2$. Si pour tout point $P \in H(k)$ où H a multiplicité δ, le cône tangent projectif $\mathbb{P}(C_P H)$ de $\mathbb{P}(T_P \mathbb{P}_k^N) \simeq \mathbb{P}_k^{N-1}$ n'est pas le cône sur une hypersurface dans un hyperplan projectif de $\mathbb{P}_k^{N-1}$,

Critères appliquables dans le cas Fano

Théorème (TM 2024) : Soit H une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$. Soient δ la multiplicité maximale de H en un point de $H(k)$ et s la dimension du lieu singulier H_{sing} de H.

(1) Si on a :

$$d \geq \delta \min(N+1, s+3) \quad (\text{resp. } d > \delta \min(N+1, s+3)),$$

alors H est semi-stable (resp. stable).

(2) Supposons $N \geq 2$. Si pour tout point $P \in H(k)$ où H a multiplicité δ, le cône tangent projectif $\mathbb{P}(C_P H)$ de $\mathbb{P}(T_P \mathbb{P}_k^N) \simeq \mathbb{P}_k^{N-1}$ n'est pas le cône sur une hypersurface dans un hyperplan projectif de $\mathbb{P}_k^{N-1}$, et si on a :

$$d \geq (\delta - 1) \min(N+1, s+3) \quad (\text{resp. } d > (\delta - 1) \min(N+1, s+3)),$$

Critères appliquables dans le cas Fano

Théorème (TM 2024) : Soit H une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$. Soient δ la multiplicité maximale de H en un point de $H(k)$ et s la dimension du lieu singulier H_{sing} de H.

(1) Si on a :

$$d \geq \delta \min(N+1, s+3) \quad (\text{resp. } d > \delta \min(N+1, s+3)),$$

alors H est semi-stable (resp. stable).

(2) Supposons $N \geq 2$. Si pour tout point $P \in H(k)$ où H a multiplicité δ, le cône tangent projectif $\mathbb{P}(C_P H)$ de $\mathbb{P}(T_P \mathbb{P}_k^N) \simeq \mathbb{P}_k^{N-1}$ n'est pas le cône sur une hypersurface dans un hyperplan projectif de $\mathbb{P}_k^{N-1}$, et si on a :

$$d \geq (\delta - 1) \min(N+1, s+3) \quad (\text{resp. } d > (\delta - 1) \min(N+1, s+3)),$$

alors H est semi-stable (resp. stable).

Critères appliquables dans le cas Fano

Théorème (TM 2024) : Soit H une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$. Soient δ la multiplicité maximale de H en un point de $H(k)$ et s la dimension du lieu singulier H_{sing} de H.

(1) Si on a :

$$d \geq \delta \min(N+1, s+3) \quad (\text{resp. } d > \delta \min(N+1, s+3)),$$

alors H est semi-stable (resp. stable).

(2) Supposons $N \geq 2$. Si pour tout point $P \in H(k)$ où H a multiplicité δ, le cône tangent projectif $\mathbb{P}(C_P H)$ de $\mathbb{P}(T_P \mathbb{P}_k^N) \simeq \mathbb{P}_k^{N-1}$ n'est pas le cône sur une hypersurface dans un hyperplan projectif de $\mathbb{P}_k^{N-1}$, et si on a :

$$d \geq (\delta - 1) \min(N+1, s+3) \quad (\text{resp. } d > (\delta - 1) \min(N+1, s+3)),$$

alors H est semi-stable (resp. stable).

Remarques : Si H est lisse, $\delta = 1$ et $s = -1$.

Critères appliquables dans le cas Fano

Théorème (TM 2024) : Soit H une hypersurface de degré $d \geq 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$. Soient δ la multiplicité maximale de H en un point de $H(k)$ et s la dimension du lieu singulier H_{sing} de H.

(1) Si on a :

$$d \geq \delta \min(N+1, s+3) \quad (\text{resp. } d > \delta \min(N+1, s+3)\,),$$

alors H est semi-stable (resp. stable).

(2) Supposons $N \geq 2$. Si pour tout point $P \in H(k)$ où H a multiplicité δ, le cône tangent projectif $\mathbb{P}(C_P H)$ de $\mathbb{P}(T_P \mathbb{P}_k^N) \simeq \mathbb{P}_k^{N-1}$ n'est pas le cône sur une hypersurface dans un hyperplan projectif de $\mathbb{P}_k^{N-1}$, et si on a :

$$d \geq (\delta - 1) \min(N+1, s+3) \quad (\text{resp. } d > (\delta - 1) \min(N+1, s+3)\,),$$

alors H est semi-stable (resp. stable).

Remarques : Si H est lisse, $\delta = 1$ et $s = -1$.
Si $N = 2$, la condition dans (2) sur $P \in H(k)$ s'écrit : *le support de* $\mathbb{P}(C_P H)$ *n'est pas un singleton dans* $\mathbb{P}(T_P \mathbb{P}_k^2) \simeq \mathbb{P}_k^1$.

Exemple : points doubles ordinaires

Exemple : points doubles ordinaires

Si $N \geq 2$ et si les seules singularités de H sont des points doubles ordinaires,

Exemple : points doubles ordinaires

Si $N \geq 2$ et si les seules singularités de H sont des points doubles ordinaires, alors $\delta = 2$, $s \leq 0$, et la condition sur les cônes projectifs tangents pour (2) est vérifiée.

Exemple : points doubles ordinaires

Si $N \geq 2$ et si les seules singularités de H sont des points doubles ordinaires, alors $\delta = 2$, $s \leq 0$, et la condition sur les cônes projectifs tangents pour (2) est vérifiée.

Corollaire : Si $N \geq 2$ et les seules singularités de H sont des points doubles ordinaires, et si $d \geq 3$ (resp. $d \geq 4$),

Exemple : points doubles ordinaires

Si $N \geq 2$ et si les seules singularités de H sont des points doubles ordinaires, alors $\delta = 2$, $s \leq 0$, et la condition sur les cônes projectifs tangents pour (2) est vérifiée.

Corollaire : Si $N \geq 2$ et les seules singularités de H sont des points doubles ordinaires, et si $d \geq 3$ (resp. $d \geq 4$), alors H est semi-stable (resp. stable).

III. Motivation : hauteur de Griffiths-Kato et hauteur GIT

Hauteur de Kato et hauteur de Griffiths

Hauteur de Kato et hauteur de Griffiths

Kato a introduit une hauteur ht_K associée aux motifs sur les corps de nombres, définie en termes de leurs réalisations de de Rham.

Hauteur de Kato et hauteur de Griffiths

Kato a introduit une hauteur ht_K associée aux motifs sur les corps de nombres, définie en termes de leurs réalisations de de Rham.

Elle généralise aux motifs de poids quelconque la hauteur de Faltings des variétés abéliennes sur les corps de nombres, qui joue un rôle central dans la preuve de Faltings de la conjecture de Mordell.

Hauteur de Kato et hauteur de Griffiths

Kato a introduit une hauteur ht_K associée aux motifs sur les corps de nombres, définie en termes de leurs réalisations de de Rham.

Elle généralise aux motifs de poids quelconque la hauteur de Faltings des variétés abéliennes sur les corps de nombres, qui joue un rôle central dans la preuve de Faltings de la conjecture de Mordell.

On s'attend à ce que la hauteur de Kato soit aussi importante en arithmétique que la hauteur de Faltings, mais presque aucun calcul n'avait été fait pour les motifs de poids ≥ 2.

Hauteur de Kato et hauteur de Griffiths

Kato a introduit une hauteur ht_K associée aux motifs sur les corps de nombres, définie en termes de leurs réalisations de de Rham.

Elle généralise aux motifs de poids quelconque la hauteur de Faltings des variétés abéliennes sur les corps de nombres, qui joue un rôle central dans la preuve de Faltings de la conjecture de Mordell.

On s'attend à ce que la hauteur de Kato soit aussi importante en arithmétique que la hauteur de Faltings, mais presque aucun calcul n'avait été fait pour les motifs de poids ≥ 2.

L'analogue de la hauteur de Kato sur les corps de fonctions est la hauteur de Griffiths ht_{GK} associée à des variations de structures de Hodge sur des courbes projectives lisses complexes (comme la cohomologie de pinceaux de variétés).

Hauteur de Kato et hauteur de Griffiths

Kato a introduit une hauteur ht_K associée aux motifs sur les corps de nombres, définie en termes de leurs réalisations de de Rham.

Elle généralise aux motifs de poids quelconque la hauteur de Faltings des variétés abéliennes sur les corps de nombres, qui joue un rôle central dans la preuve de Faltings de la conjecture de Mordell.

On s'attend à ce que la hauteur de Kato soit aussi importante en arithmétique que la hauteur de Faltings, mais presque aucun calcul n'avait été fait pour les motifs de poids ≥ 2.

L'analogue de la hauteur de Kato sur les corps de fonctions est la hauteur de Griffiths ht_{GK} associée à des variations de structures de Hodge sur des courbes projectives lisses complexes (comme la cohomologie de pinceaux de variétés). Mais peu de calculs explicites avaient été faits.

Hauteur de Kato et hauteur de Griffiths

Kato a introduit une hauteur ht_K associée aux motifs sur les corps de nombres, définie en termes de leurs réalisations de de Rham.

Elle généralise aux motifs de poids quelconque la hauteur de Faltings des variétés abéliennes sur les corps de nombres, qui joue un rôle central dans la preuve de Faltings de la conjecture de Mordell.

On s'attend à ce que la hauteur de Kato soit aussi importante en arithmétique que la hauteur de Faltings, mais presque aucun calcul n'avait été fait pour les motifs de poids ≥ 2.

L'analogue de la hauteur de Kato sur les corps de fonctions est la hauteur de Griffiths ht_{GK} associée à des variations de structures de Hodge sur des courbes projectives lisses complexes (comme la cohomologie de pinceaux de variétés). Mais peu de calculs explicites avaient été faits.

Dans ma thèse, j'ai calculé la hauteur de Griffiths de la cohomologie en dimension moitié de pinceaux d'hypersurfaces dont les espaces totaux sont lisses et dont les singularités des fibres sont des points doubles ordinaires.

Hauteur GIT

Hauteur GIT

Un moyen d'étudier la hauteur de Griffiths pour des pinceaux d'hypersurfaces est de la comparer à une hauteur "naïve" ht_{GIT}, définie en termes du bon quotient du lieu des hypersurfaces semi-stables.

Hauteur GIT

Un moyen d'étudier la hauteur de Griffiths pour des pinceaux d'hypersurfaces est de la comparer à une hauteur “naïve” ht_{GIT}, définie en termes du bon quotient du lieu des hypersurfaces semi-stables.

Pour comprendre ht_{GIT}, il est important d'avoir des modèles dont toutes les fibres sont des hypersurfaces semi-stables.

Hauteur GIT

Un moyen d'étudier la hauteur de Griffiths pour des pinceaux d'hypersurfaces est de la comparer à une hauteur “naïve” ht_{GIT}, définie en termes du bon quotient du lieu des hypersurfaces semi-stables.

Pour comprendre ht_{GIT}, il est important d'avoir des modèles dont toutes les fibres sont des hypersurfaces semi-stables. Mais en général, les modèles qu'on peut construire ont toujours des fibres singulières.

Hauteur GIT

Un moyen d'étudier la hauteur de Griffiths pour des pinceaux d'hypersurfaces est de la comparer à une hauteur “naïve” ht_{GIT}, définie en termes du bon quotient du lieu des hypersurfaces semi-stables.

Pour comprendre ht_{GIT}, il est important d'avoir des modèles dont toutes les fibres sont des hypersurfaces semi-stables. Mais en général, les modèles qu'on peut construire ont toujours des fibres singulières.

Il est donc nécessaire d'avoir des conditions suffisantes pour la semi-stabilité d'hypersurfaces projectives singulières.

Comparaison de ht_{GK} et ht_{GIT} pour les pinceaux d'hypersurfaces dans $\mathbb{P}^N$

Comparaison de ht_{GK} et ht_{GIT} pour les pinceaux d'hypersurfaces dans $\mathbb{P}^N$

Théorème (TM 2025) : Soient $N \geq 2$, $d \geq 3$, et E un fibré vectoriel de rang $N+1$ sur une courbe projective lisse complexe C.

Comparaison de ht_{GK} et ht_{GIT} pour les pinceaux d'hypersurfaces dans $\mathbb{P}^N$

Théorème (TM 2025) : Soient $N \geq 2$, $d \geq 3$, et E un fibré vectoriel de rang $N+1$ sur une courbe projective lisse complexe C.

Si H est une hypersurface lisse dans le fibré en projectifs $\mathbb{P}(E)$ sur C, de degré relatif d sur C,

Comparaison de ht_{GK} et ht_{GIT} pour les pinceaux d'hypersurfaces dans $\mathbb{P}^N$

Théorème (TM 2025) : Soient $N \geq 2$, $d \geq 3$, et E un fibré vectoriel de rang $N+1$ sur une courbe projective lisse complexe C.

Si H est une hypersurface lisse dans le fibré en projectifs $\mathbb{P}(E)$ sur C, de degré relatif d sur C, et si les fibres du morphisme $H \to C$ ont, comme seules singularités, des points doubles ordinaires,

Comparaison de ht_{GK} et ht_{GIT} pour les pinceaux d'hypersurfaces dans $\mathbb{P}^N$

Théorème (TM 2025) : Soient $N \geq 2$, $d \geq 3$, et E un fibré vectoriel de rang $N+1$ sur une courbe projective lisse complexe C.

Si H est une hypersurface lisse dans le fibré en projectifs $\mathbb{P}(E)$ sur C, de degré relatif d sur C, et si les fibres du morphisme $H \to C$ ont, comme seules singularités, des points doubles ordinaires, alors :

$$\mathrm{ht}_{GK,stab}\big(\mathbb{H}^{N-1}(H_\eta/C_\eta)\big) = F_{stab}(d,N)\,\mathrm{ht}_{GIT}(H_\eta).$$

Notations

Notations

Dans toute la suite, on considère une hypersurface H de degré $d \geq 2$ dans $\mathbb{P}_k^N$ définie par l'annulation d'une forme F_H dans $k[X_0, \ldots, X_N]_d$.

IV. Critère de Hilbert-Mumford, multiplicités, et cônes tangents

Proposition “Forme locale et α-degré”

Proposition "Forme locale et α-degré"

Proposition : Soient g un élément de $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$, $P := g([0 : \ldots : 0 : 1])$, et soit $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ un élément de $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0.$$

Proposition "Forme locale et α-degré"

Proposition : Soient g un élément de $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$, $P := g([0 : \ldots : 0 : 1])$, et soit $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ un élément de $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0.$$

(1) Si P n'est pas dans $H(k)$, alors on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\, \alpha_N > 0.$$

Proposition "Forme locale et α-degré"

Proposition : Soient g un élément de $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$, $P := g([0 : \ldots : 0 : 1])$, et soit $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ un élément de $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0.$$

(1) Si P n'est pas dans $H(k)$, alors on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\, \alpha_N > 0.$$

Dans la suite, on suppose que P est dans $H(k)$ et on note δ_P la multiplicité de H en P.

Proposition “Forme locale et α-degré”

Proposition : Soient g un élément de $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$, $P := g([0 : \ldots : 0 : 1])$, et soit $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ un élément de $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0.$$

(1) Si P n'est pas dans $H(k)$, alors on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0.$$

Dans la suite, on suppose que P est dans $H(k)$ et on note δ_P la multiplicité de H en P.

(2) On a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq (d - 2\delta_P)\alpha_N - \delta_P \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i.$$

Proposition "Forme locale et α-degré"

Proposition : Soient g un élément de $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$, $P := g([0 : \ldots : 0 : 1])$, et soit $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ un élément de $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0.$$

(1) Si P n'est pas dans $H(k)$, alors on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0.$$

Dans la suite, on suppose que P est dans $H(k)$ et on note δ_P la multiplicité de H en P.

(2) On a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq (d - 2\delta_P)\alpha_N - \delta_P \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i.$$

(3) Si $N \geq 2$ et si le cône tangent projectif $\mathbb{P}(C_P H)$ n'est pas le cône sur une hypersurface dans un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(T_P \mathbb{P}_k^N)$,

Proposition "Forme locale et α-degré"

Proposition : Soient g un élément de $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$, $P := g([0 : \ldots : 0 : 1])$, et soit $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ un élément de $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0.$$

(1) Si P n'est pas dans $H(k)$, alors on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0.$$

Dans la suite, on suppose que P est dans $H(k)$ et on note δ_P la multiplicité de H en P.

(2) On a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq (d - 2\delta_P)\alpha_N - \delta_P \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i.$$

(3) Si $N \geq 2$ et si le cône tangent projectif $\mathbb{P}(C_P H)$ n'est pas le cône sur une hypersurface dans un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(T_P \mathbb{P}_k^N)$, alors on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq (d - 2\delta_P + 1)\alpha_N - (\delta_P - 1) \sum_{i=1}^{N-2} \alpha_i - (\delta_P - 2)\alpha_{N-1}.$$

Preuve de "Forme locale et α-degré"

Preuve de "Forme locale et α-degré"

Soient $(x_i = X_i/X_N)_{i \leq N-1}$ le système de coordonnées standard sur $(X_N \neq 0)$ et $f(x_0, \ldots, x_{N-1})$ la restriction de $F_H \circ g$ à cet ouvert.

Preuve de "Forme locale et α-degré"

Soient $(x_i = X_i/X_N)_{i \leq N-1}$ le système de coordonnées standard sur $(X_N \neq 0)$ et $f(x_0, \ldots, x_{N-1})$ la restriction de $F_H \circ g$ à cet ouvert. On a :

$$(f = 0) = g^{-1}(H) \cap (X_N \neq 0).$$

Preuve de "Forme locale et α-degré"

Soient $(x_i = X_i/X_N)_{i \leq N-1}$ le système de coordonnées standard sur $(X_N \neq 0)$ et $f(x_0, \ldots, x_{N-1})$ la restriction de $F_H \circ g$ à cet ouvert. On a :

$$(f = 0) = g^{-1}(H) \cap (X_N \neq 0).$$

(1) Si P n'est pas dans $H(k)$,

Preuve de “Forme locale et α-degré”

Soient $(x_i = X_i/X_N)_{i \leq N-1}$ le système de coordonnées standard sur $(X_N \neq 0)$ et $f(x_0, \ldots, x_{N-1})$ la restriction de $F_H \circ g$ à cet ouvert. On a :

$$(f = 0) = g^{-1}(H) \cap (X_N \neq 0).$$

(1) Si P n'est pas dans $H(k)$, alors $f(0) \neq 0$,

Preuve de "Forme locale et α-degré"

Soient $(x_i = X_i/X_N)_{i\leq N-1}$ le système de coordonnées standard sur $(X_N \neq 0)$ et $f(x_0, \ldots, x_{N-1})$ la restriction de $F_H \circ g$ à cet ouvert. On a :

$$(f = 0) = g^{-1}(H) \cap (X_N \neq 0).$$

(1) Si P n'est pas dans $H(k)$, alors $f(0) \neq 0$, i.e. $F_H \circ g$ a un monôme en X_N^d avec coefficient non nul.

Preuve de "Forme locale et α-degré"

Soient $(x_i = X_i/X_N)_{i \leq N-1}$ le système de coordonnées standard sur $(X_N \neq 0)$ et $f(x_0, \ldots, x_{N-1})$ la restriction de $F_H \circ g$ à cet ouvert. On a :

$$(f = 0) = g^{-1}(H) \cap (X_N \neq 0).$$

(1) Si P n'est pas dans $H(k)$, alors $f(0) \neq 0$, i.e. $F_H \circ g$ a un monôme en X_N^d avec coefficient non nul. On a donc $\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0$.

Preuve de “Forme locale et α-degré”

Soient $(x_i = X_i/X_N)_{i\leq N-1}$ le système de coordonnées standard sur $(X_N \neq 0)$ et $f(x_0,\ldots,x_{N-1})$ la restriction de $F_H \circ g$ à cet ouvert. On a :

$$(f = 0) = g^{-1}(H) \cap (X_N \neq 0).$$

(1) Si P n'est pas dans $H(k)$, alors $f(0) \neq 0$, i.e. $F_H \circ g$ a un monôme en X_N^d avec coefficient non nul. On a donc $\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0$.

(2) Si P est dans $H(k)$,

Preuve de “Forme locale et α-degré”

Soient $(x_i = X_i/X_N)_{i \leq N-1}$ le système de coordonnées standard sur $(X_N \neq 0)$ et $f(x_0, \ldots, x_{N-1})$ la restriction de $F_H \circ g$ à cet ouvert. On a :

$$(f = 0) = g^{-1}(H) \cap (X_N \neq 0).$$

(1) Si P n'est pas dans $H(k)$, alors $f(0) \neq 0$, i.e. $F_H \circ g$ a un monôme en X_N^d avec coefficient non nul. On a donc $\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0$.

(2) Si P est dans $H(k)$, δ_P est le degré minimal d'un monôme non nul de f,

Preuve de “Forme locale et α-degré”

Soient $(x_i = X_i/X_N)_{i\leq N-1}$ le système de coordonnées standard sur $(X_N \neq 0)$ et $f(x_0,\dots,x_{N-1})$ la restriction de $F_H \circ g$ à cet ouvert. On a :

$$(f = 0) = g^{-1}(H) \cap (X_N \neq 0).$$

(1) Si P n'est pas dans $H(k)$, alors $f(0) \neq 0$, i.e. $F_H \circ g$ a un monôme en X_N^d avec coefficient non nul. On a donc $\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0$.

(2) Si P est dans $H(k)$, δ_P est le degré minimal d'un monôme non nul de f, donc $F_H \circ g$ a un monôme avec coefficient non nul de la forme $X_{j_1}\dots X_{j_{\delta_P}} X_N^{d-\delta_P}$ avec $0 \leq j_1,\dots,j_{\delta_P} \leq N-1$,

Preuve de “Forme locale et α-degré”

Soient $(x_i = X_i/X_N)_{i\leq N-1}$ le système de coordonnées standard sur $(X_N \neq 0)$ et $f(x_0,\ldots,x_{N-1})$ la restriction de $F_H \circ g$ à cet ouvert. On a :

$$(f=0) = g^{-1}(H) \cap (X_N \neq 0).$$

(1) Si P n'est pas dans $H(k)$, alors $f(0) \neq 0$, i.e. $F_H \circ g$ a un monôme en X_N^d avec coefficient non nul. On a donc $\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0$.

(2) Si P est dans $H(k)$, δ_P est le degré minimal d'un monôme non nul de f, donc $F_H \circ g$ a un monôme avec coefficient non nul de la forme $X_{j_1}\ldots X_{j_{\delta_P}} X_N^{d-\delta_P}$ avec $0 \leq j_1,\ldots,j_{\delta_P} \leq N-1$, donc on a :

$$\begin{aligned}\deg_\alpha(F_H \circ g) &\geq \sum_{p=1}^{\delta_P} \alpha_{j_p} + (d-\delta_P)\alpha_N \\ &\geq \delta_P\,\alpha_0 + (d-\delta_P)\alpha_N = (d-2\delta_P)\alpha_N - \delta_P \sum_{i=1}^{N-1}\alpha_i.\end{aligned}$$

Preuve de “Forme locale et α-degré”

Soient $(x_i = X_i/X_N)_{i\leq N-1}$ le système de coordonnées standard sur $(X_N \neq 0)$ et $f(x_0,\ldots,x_{N-1})$ la restriction de $F_H \circ g$ à cet ouvert. On a :

$$(f=0) = g^{-1}(H) \cap (X_N \neq 0).$$

(1) Si P n'est pas dans $H(k)$, alors $f(0) \neq 0$, i.e. $F_H \circ g$ a un monôme en X_N^d avec coefficient non nul. On a donc $\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0$.

(2) Si P est dans $H(k)$, δ_P est le degré minimal d'un monôme non nul de f, donc $F_H \circ g$ a un monôme avec coefficient non nul de la forme $X_{j_1}\ldots X_{j_{\delta_P}} X_N^{d-\delta_P}$ avec $0 \leq j_1,\ldots,j_{\delta_P} \leq N-1$, donc on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq \sum_{p=1}^{\delta_P} \alpha_{j_p} + (d-\delta_P)\alpha_N$$

$$\geq \delta_P\,\alpha_0 + (d-\delta_P)\alpha_N = (d-2\delta_P)\alpha_N - \delta_P \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i.$$

(3) (idée) Si $\mathbb{P}(C_P H)$ n'est pas le cône sur une hypersurface dans un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(T_P \mathbb{P}_k^N)$,

Preuve de “Forme locale et α-degré”

Soient $(x_i = X_i/X_N)_{i\leq N-1}$ le système de coordonnées standard sur $(X_N \neq 0)$ et $f(x_0,\dots,x_{N-1})$ la restriction de $F_H \circ g$ à cet ouvert. On a :

$$(f=0) = g^{-1}(H) \cap (X_N \neq 0).$$

(1) Si P n'est pas dans $H(k)$, alors $f(0) \neq 0$, i.e. $F_H \circ g$ a un monôme en X_N^d avec coefficient non nul. On a donc $\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0$.

(2) Si P est dans $H(k)$, δ_P est le degré minimal d'un monôme non nul de f, donc $F_H \circ g$ a un monôme avec coefficient non nul de la forme $X_{j_1}\dots X_{j_{\delta_P}} X_N^{d-\delta_P}$ avec $0 \leq j_1,\dots,j_{\delta_P} \leq N-1$, donc on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq \sum_{p=1}^{\delta_P} \alpha_{j_p} + (d-\delta_P)\alpha_N$$

$$\geq \delta_P\,\alpha_0 + (d-\delta_P)\alpha_N = (d-2\delta_P)\alpha_N - \delta_P \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i.$$

(3) (idée) Si $\mathbb{P}(C_P H)$ n'est pas le cône sur une hypersurface dans un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(T_P\mathbb{P}_k^N)$, alors la composante homogène f_{δ_P} “dépend de x_{N-1}”.

V. La borne de Benoist

Énoncé de la borne de Benoist

Énoncé de la borne de Benoist

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$,

Énoncé de la borne de Benoist

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$, $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0,$$

Énoncé de la borne de Benoist

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0,$$

et (u, v, s) dans $\mathbb{N}^3$ tel que $u + v + s = N$.

Énoncé de la borne de Benoist

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0,$$

et (u, v, s) dans $\mathbb{N}^3$ tel que $u + v + s = N$.

Si on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) < \alpha_u + (d-1)\alpha_v,$$

Énoncé de la borne de Benoist

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0,$$

et (u, v, s) dans $\mathbb{N}^3$ tel que $u + v + s = N$.

Si on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) < \alpha_u + (d-1)\alpha_v,$$

alors on a :

$$\dim(H_{\mathrm{sing}}) \geq \dim\big(H_{\mathrm{sing}} \cap ((g \cdot X)_0 = \cdots = (g \cdot X)_{v-1} = 0)\big) \geq s,$$

où H_{sing} est le lieu singulier de H et $(g \cdot X)_i := \sum_{j=0}^{N} g_{ij} X_j$.

Énoncé de la borne de Benoist

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0,$$

et (u, v, s) dans $\mathbb{N}^3$ tel que $u + v + s = N$.

Si on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) < \alpha_u + (d-1)\alpha_v,$$

alors on a :

$$\dim(H_{\mathrm{sing}}) \geq \dim\left(H_{\mathrm{sing}} \cap ((g \cdot X)_0 = \dots = (g \cdot X)_{v-1} = 0)\right) \geq s,$$

où H_{sing} est le lieu singulier de H et $(g \cdot X)_i := \sum_{j=0}^{N} g_{ij} X_j$.

Remarque : quand H_{sing} ou $H_{\mathrm{sing}} \cap ((g \cdot X)_0 = \dots = (g \cdot X)_{v-1} = 0)$ est vide, sa dimension est -1.

Idée de la preuve de la borne

Idée de la preuve de la borne

On se ramène au cas $g = \mathrm{Id}$.

Idée de la preuve de la borne

On se ramène au cas $g = \mathrm{Id}$.

Quitte à permuter u et v, on se ramène au cas $u \leq v$.

Idée de la preuve de la borne

On se ramène au cas $g = \mathrm{Id}$.

Quitte à permuter u et v, on se ramène au cas $u \leq v$.

On écrit

$$F_H = X_0 P_0 + \cdots + X_N P_N,$$

où pour tout i, P_i est un polynôme homogène de degré $d-1$ en $X_i, \ldots, X_N$.

Idée de la preuve de la borne

On se ramène au cas $g = \mathrm{Id}$.

Quitte à permuter u et v, on se ramène au cas $u \leq v$.

On écrit

$$F_H = X_0 P_0 + \cdots + X_N P_N,$$

où pour tout i, P_i est un polynôme homogène de degré $d-1$ en $X_i, \ldots, X_N$.

La condition sur le α-degré permet d'obtenir que pour tout $i \geq u$, tous les monômes de P_i sont divisibles par un X_j pour $j < v$.

Idée de la preuve de la borne

On se ramène au cas $g = \mathrm{Id}$.

Quitte à permuter u et v, on se ramène au cas $u \leq v$.

On écrit
$$F_H = X_0 P_0 + \cdots + X_N P_N,$$
où pour tout i, P_i est un polynôme homogène de degré $d-1$ en $X_i, \ldots, X_N$.

La condition sur le α-degré permet d'obtenir que pour tout $i \geq u$, tous les monômes de P_i sont divisibles par un X_j pour $j < v$.

On en déduit que le sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_k^N$:
$$Z := (X_0 = \cdots = X_{v-1} = P_0 = \cdots = P_{u-1} = 0)$$
est contenu dans $H_{\text{sing}} \cap (X_0 = \cdots = X_{v-1} = 0)$.

Idée de la preuve de la borne

On se ramène au cas $g = \mathrm{Id}$.

Quitte à permuter u et v, on se ramène au cas $u \leq v$.

On écrit
$$F_H = X_0 P_0 + \cdots + X_N P_N,$$
où pour tout i, P_i est un polynôme homogène de degré $d-1$ en $X_i, \ldots, X_N$.

La condition sur le α-degré permet d'obtenir que pour tout $i \geq u$, tous les monômes de P_i sont divisibles par un X_j pour $j < v$.

On en déduit que le sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_k^N$:
$$Z := (X_0 = \cdots = X_{v-1} = P_0 = \cdots = P_{u-1} = 0)$$
est contenu dans $H_{\mathrm{sing}} \cap (X_0 = \cdots = X_{v-1} = 0)$.

Comme Z est de dimension au moins $N - (u+v) = s$, on obtient la borne souhaitée.

Conséquence de la borne de Benoist

Conséquence de la borne de Benoist

Corollaire : Soient s la dimension de H_{sing},

Conséquence de la borne de Benoist

Corollaire : Soient s la dimension de H_{sing}, g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$

Conséquence de la borne de Benoist

Corollaire : Soient s la dimension de H_{sing}, g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0.$$

Conséquence de la borne de Benoist

Corollaire : Soient s la dimension de H_{sing}, g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0.$$

Si $s \leq N-2$, on a :

$$\frac{N-s-2}{d} \deg_\alpha(F_H \circ g) \geq \sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i.$$

Conséquence de la borne de Benoist

Corollaire : Soient s la dimension de H_{sing}, g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0.$$

Si $s \leq N-2$, on a :

$$\frac{N-s-2}{d} \deg_\alpha(F_H \circ g) \geq \sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i.$$

Preuve :

Conséquence de la borne de Benoist

Corollaire : Soient s la dimension de H_{sing}, g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0.$$

Si $s \leq N-2$, on a :

$$\frac{N-s-2}{d} \deg_\alpha(F_H \circ g) \geq \sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i.$$

Preuve : On applique la contraposée de la borne de Benoist à $s' := s+1 > \dim(H_{\text{sing}})$ et (u,v) dans $\mathbb{N}^2$ tel que $u+v+s' = N$

Conséquence de la borne de Benoist

Corollaire : Soient s la dimension de H_{sing}, g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0.$$

Si $s \leq N-2$, on a :

$$\frac{N-s-2}{d} \deg_\alpha(F_H \circ g) \geq \sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i.$$

Preuve : On applique la contraposée de la borne de Benoist à $s' := s+1 > \dim(H_{\text{sing}})$ et (u,v) dans $\mathbb{N}^2$ tel que $u+v+s' = N$ pour obtenir :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq \alpha_u + (d-1)\alpha_v.$$

Conséquence de la borne de Benoist

Corollaire : Soient s la dimension de H_{sing}, g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N \text{ et } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0.$$

Si $s \leq N-2$, on a :

$$\frac{N-s-2}{d} \deg_\alpha(F_H \circ g) \geq \sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i.$$

Preuve : On applique la contraposée de la borne de Benoist à $s' := s+1 > \dim(H_{\text{sing}})$ et (u,v) dans $\mathbb{N}^2$ tel que $u+v+s' = N$ pour obtenir :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq \alpha_u + (d-1)\alpha_v.$$

En sommant sur $1 \leq u \leq N-s-2$ et $v := N-s-1-u$, on obtient le corollaire.

VI. Preuve des critères de (semi-)stabilité des hypersurfaces projectives singulières

Preuve de (1)

Preuve de (1)

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$

Preuve de (1)

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $(\alpha_0, \dots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N$ et $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0$.

Preuve de (1)

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N$ et $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0$.
Si $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i > 0$,

Preuve de (1)

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N$ et $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0$.

Si $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i > 0$, alors $s < N - 2$

Preuve de (1)

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N$ et $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0$.

Si $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i > 0$, alors $s < N - 2$ et par le corollaire de la borne de Benoist, $\deg_\alpha(F_H \circ g) > 0$.

Preuve de (1)

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N$ et $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0$.
Si $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i > 0$, alors $s < N-2$ et par le corollaire de la borne de Benoist, $\deg_\alpha(F_H \circ g) > 0$. Donc on peut supposer $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i \leq 0$.

Preuve de (1)

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N$ et $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0$.

Si $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i > 0$, alors $s < N-2$ et par le corollaire de la borne de Benoist, $\deg_\alpha(F_H \circ g) > 0$. Donc on peut supposer $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i \leq 0$.

Si $P := g([0 : \ldots : 0 : 1])$ n'est pas dans $H(k)$,

Preuve de (1)

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N$ et $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0$.
Si $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i > 0$, alors $s < N - 2$ et par le corollaire de la borne de Benoist, $\deg_\alpha(F_H \circ g) > 0$. Donc on peut supposer $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i \leq 0$.
Si $P := g([0 : \ldots : 0 : 1])$ n'est pas dans $H(k)$, par le (1) de “Forme locale et α-degré”, on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0,$$

Preuve de (1)

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N$ et $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0$.

Si $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i > 0$, alors $s < N-2$ et par le corollaire de la borne de Benoist, $\deg_\alpha(F_H \circ g) > 0$. Donc on peut supposer $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i \leq 0$.

Si $P := g([0 : \ldots : 0 : 1])$ n'est pas dans $H(k)$, par le (1) de “Forme locale et α-degré”, on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0,$$

donc on peut supposer P dans $H(k)$.

Preuve de (1)

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N$ et $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0$.

Si $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i > 0$, alors $s < N-2$ et par le corollaire de la borne de Benoist, $\deg_\alpha(F_H \circ g) > 0$. Donc on peut supposer $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i \leq 0$.

Si $P := g([0 : \ldots : 0 : 1])$ n'est pas dans $H(k)$, par le (1) de "Forme locale et α-degré", on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0,$$

donc on peut supposer P dans $H(k)$. Soit δ_P la multiplicité de H en P.

Preuve de (1)

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N$ et $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0$.
Si $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i > 0$, alors $s < N-2$ et par le corollaire de la borne de Benoist, $\deg_\alpha(F_H \circ g) > 0$. Donc on peut supposer $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i \leq 0$.
Si $P := g([0 : \ldots : 0 : 1])$ n'est pas dans $H(k)$, par le (1) de "Forme locale et α-degré", on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0,$$

donc on peut supposer P dans $H(k)$. Soit δ_P la multiplicité de H en P.
Par le (2) de "Forme locale et α-degré", on a

Preuve de (1)

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N$ et $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0$.

Si $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i > 0$, alors $s < N-2$ et par le corollaire de la borne de Benoist, $\deg_\alpha(F_H \circ g) > 0$. Donc on peut supposer $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i \leq 0$.

Si $P := g([0 : \ldots : 0 : 1])$ n'est pas dans $H(k)$, par le (1) de “Forme locale et α-degré”, on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0,$$

donc on peut supposer P dans $H(k)$. Soit δ_P la multiplicité de H en P. Par le (2) de “Forme locale et α-degré”, on a

$$\begin{aligned}\deg_\alpha(F_H \circ g) &\geq (d - 2\delta_P)\alpha_N - \delta_P \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \\ &\geq (d - 2\delta_P)\alpha_N - \delta_P \sum_{i=\max(1,N-s-1)}^{N-1} \alpha_i \\ &\geq \big(d - \delta_P \min(N+1, s+3)\big)\alpha_N.\end{aligned}$$

Preuve de (1)

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $(\alpha_0, \dots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N$ et $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0$.

Si $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i > 0$, alors $s < N-2$ et par le corollaire de la borne de Benoist, $\deg_\alpha(F_H \circ g) > 0$. Donc on peut supposer $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i \leq 0$.

Si $P := g([0 : \ldots : 0 : 1])$ n'est pas dans $H(k)$, par le (1) de “Forme locale et α-degré”, on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0,$$

donc on peut supposer P dans $H(k)$. Soit δ_P la multiplicité de H en P. Par le (2) de “Forme locale et α-degré”, on a

$$\begin{aligned}
\deg_\alpha(F_H \circ g) &\geq (d - 2\delta_P)\alpha_N - \delta_P \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \\
&\geq (d - 2\delta_P)\alpha_N - \delta_P \sum_{i=\max(1,N-s-1)}^{N-1} \alpha_i \\
&\geq \big(d - \delta_P \min(N+1, s+3)\big)\alpha_N.
\end{aligned}$$

Donc dans tous les cas, $\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq 0$ (resp. $\deg_\alpha(F_H \circ g) > 0$),

Preuve de (1)

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N$ et $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0$.

Si $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i > 0$, alors $s < N-2$ et par le corollaire de la borne de Benoist, $\deg_\alpha(F_H \circ g) > 0$. Donc on peut supposer $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i \leq 0$.

Si $P := g([0 : \ldots : 0 : 1])$ n'est pas dans $H(k)$, par le (1) de "Forme locale et α-degré", on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0,$$

donc on peut supposer P dans $H(k)$. Soit δ_P la multiplicité de H en P. Par le (2) de "Forme locale et α-degré", on a

$$\begin{aligned}
\deg_\alpha(F_H \circ g) &\geq (d - 2\delta_P)\alpha_N - \delta_P \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \\
&\geq (d - 2\delta_P)\alpha_N - \delta_P \sum_{i=\max(1,N-s-1)}^{N-1} \alpha_i \\
&\geq \big(d - \delta_P \min(N+1, s+3)\big)\alpha_N.
\end{aligned}$$

Donc dans tous les cas, $\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq 0$ (resp. $\deg_\alpha(F_H \circ g) > 0$), donc H est semi-stable (resp. stable).

Preuve de (1)

Soient g dans $\mathrm{GL}_{N+1}(k)$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ dans $\mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N$ et $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0$.
Si $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i > 0$, alors $s < N-2$ et par le corollaire de la borne de Benoist, $\deg_\alpha(F_H \circ g) > 0$. Donc on peut supposer $\sum_{i=1}^{N-s-2} \alpha_i \leq 0$.
Si $P := g([0 : \ldots : 0 : 1])$ n'est pas dans $H(k)$, par le (1) de "Forme locale et α-degré", on a :

$$\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq d\,\alpha_N > 0,$$

donc on peut supposer P dans $H(k)$. Soit δ_P la multiplicité de H en P.
Par le (2) de "Forme locale et α-degré", on a

$$\begin{aligned}
\deg_\alpha(F_H \circ g) &\geq (d - 2\delta_P)\alpha_N - \delta_P \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \\
&\geq (d - 2\delta_P)\alpha_N - \delta_P \sum_{i=\max(1,N-s-1)}^{N-1} \alpha_i \\
&\geq \big(d - \delta_P \min(N+1, s+3)\big)\alpha_N .
\end{aligned}$$

Donc dans tous les cas, $\deg_\alpha(F_H \circ g) \geq 0$ (resp. $\deg_\alpha(F_H \circ g) > 0$), donc H est semi-stable (resp. stable).
Note : pour (2), on utilise le (3) de "Forme locale et α-degré".

Merci !