

# Inégalité de Jensen et application

Thomas CHEN

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide (c'est-à-dire que c'est ni l'intervalle vide, ni un singleton). L'inégalité de Jensen est une généralisation de l'inégalité de convexité. Par définition,  $f$  est convexe sur  $I$  lorsque

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

## 1 Énoncé du résultat

**Théorème 1** (Inégalité de Jensen). Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$  tel que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

On démontre ceci par récurrence.

*Démonstration.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $(P_n)$  la proposition :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in I, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1], \left[ \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right) \implies f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \right].$$

$(P_1)$  est immédiate puisque pour  $n = 1$ , la proposition se résume à choisir  $x_1 \in I, \lambda_1 \in [0, 1]$  vérifiant  $\sum_{i=1}^1 \lambda_i = 1$  i.e.  $\lambda_1 = 1$  et d'avoir  $f(\lambda_1 x_1) = f(x_1) = \lambda_1 f(x_1)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  telle que  $(P_n)$  soit vraie. Soit  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in [0, 1]^{n+1}$ . On suppose que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

Si  $\lambda_{n+1} = 1$ , alors  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  donc  $\forall i \in [1, n], \lambda_i = 0$ . Ainsi,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

Sinon, posons  $\mu_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}}$ . Alors

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = 1 - \lambda_{n+1}$$

donc

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = 1.$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \mu_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

On a donc

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left((1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \mu_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \leq (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Ensuite, par  $(P_n)$ , on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu_i f(x_i).$$

On a donc

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leq (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \mu_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i f(x_i).$$

Ainsi, on a montré  $(P_{n+1})$ . Par le principe de récurrence, on a  $(P_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . □

## 2 Quelques applications

1. Montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}, \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

2. Montrer l'inégalité arithmético-quadratique :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}.$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ . Montrer que

$$1 + \prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \leq \prod_{i=1}^n (1 + x_i)^{1/n}.$$

### 3 Corrigés

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ . Alors

$$\ln \left( \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \leq \ln \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

par concavité de  $\ln$  et l'inégalité de Jensen pour le cas concave (il suffit de remplacer  $f$  par  $-f$ ). On passe cette inégalité à l'exponentielle donc

$$\left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

2. Soit  $n, p \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ . La fonction  $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^p \in \mathbb{R}$  est convexe (on dérive deux fois) donc

$$f \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} x_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(x_k)$$

ce qui s'écrit

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^p \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^p.$$

On passe à la puissance  $1/p$  : on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p}.$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ . En notant  $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ , on a  $\forall x > 0, f(\ln(x)) = \ln(1 + x)$ . L'idée est alors de montrer que

$$f \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(x_i) \right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(\ln(x_i)).$$

On a

$$f \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(x_i) \right) = f \left( \ln \left( \prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \right) \right) = \ln \left( 1 + \prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \right).$$

De l'autre côté,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(\ln(x_i)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(1 + x_i) = \ln \left( \prod_{i=1}^n (1 + x_i)^{1/n} \right).$$

Par ailleurs,  $f$  est effectivement convexe sur  $\mathbb{R}$  puisqu'elle est  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et  $f'' = \frac{\exp}{(1 + \exp)^2} > 0$ . Par l'inégalité de Jensen, on a donc

$$f \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(x_i) \right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(\ln(x_i)),$$

ce qui donne

$$\ln \left( 1 + \prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \right) \leq \ln \left( \prod_{i=1}^n (1 + x_i)^{1/n} \right),$$

ce qui donne, par croissance de  $\exp$ ,

$$1 + \prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \leq \prod_{i=1}^n (1 + x_i)^{1/n}$$