



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Índice de Conley

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

JULIO SAMPIETRO CHRIST

TUTOR:

DR. ERNESTO ROSALES GONZÁLEZ

Ciudad Universitaria, CDMX 2021





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno:

Sampietro

Christ

Julio

55 45 77 09 61

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

417020972

2. Datos del tutor:

Dr

Ernesto

Rosales

González

3. Datos del sinodal 1:

Dr

Xavier

Gómez Mont

Ávalos

4. Datos del sinodal 2:

Dr

Javier

Páez

Cárdenas

5. Datos del sinodal 3:

Dra

Jessie Diana

Pontigo

Herrera

6. Datos del sinodal 4:

Dr

Alejandro Darío

Rojas

Sánchez

7. Datos del trabajo escrito:
Índice de Conley
97 p.
2021

Agradecimientos

A mi asesor, Ernesto, por su tiempo, paciencia y tantas mañanas en el parque.

A Luis Manuel Hernández Gallardo, porque 'el análisis cualitativo es lo único que importa'.

Índice general

0. Introducción	9
1. Preliminares	19
1.1. Flujos	19
1.2. Atractores y repulsores	22
1.3. Descomposiciones de Morse	26
1.4. Teoría de homotopía	30
2. Definición y propiedades básicas	31
2.1. Definición	31
2.2. Índice homotópico: Primeros cálculos	40
2.3. Propiedades básicas	48
3. Índice de Conley de una descomposición	55
3.1. La sucesión coexacta de Puppe	55
3.2. Pares regulares	63
3.3. La sucesión coexacta de un par atractor-repulsor	69
4. Perturbaciones del flujo y su índice de Conley	77
4.1. Familia de flujos a parámetros	77
4.2. El índice es localmente constante en \mathcal{S}	83
Conclusión	89
5. Apéndice A: Un ejemplo más	93

Capítulo 0

Introducción

El estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales es un problema relevante tanto en matemáticas puras como aplicadas. Muchas veces no tenemos información precisa sobre las soluciones de la ecuación y conocemos su comportamiento solamente en una región fronteriza. O bien no conocemos con exactitud los parámetros de la ecuación original, por lo que existe un margen de error en nuestro estudio. Por tanto surge la necesidad de encontrar invariantes asociados a las soluciones que sean por un lado calculables a partir de información restringida pero también robustos bajo perturbaciones: estos son conocidos como invariantes topológicos.

Comencemos por exponer más claramente la motivación en ecuaciones diferenciales ordinarias. Sea M una variedad suave y sea v un campo vectorial suave en M . Fijando un punto $p \in M$ y un real t_0 este nos brinda una ecuación diferencial autónoma con condición inicial, dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v(x) \\ t_0 &\mapsto p.\end{aligned}$$

Recordamos el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales en variedades ([Arnold], p. 305).

Teorema 0.0.1. *Para cada punto $p \in M$, existe una vecindad $U \subset M$ y un número $\varepsilon > 0$ tal que para cada punto $y \in U$ y todo t con $|t - t_0| < \varepsilon$ la solución $\varphi(y, t)$ a la ecuación $\dot{x} = v(x)$ con condición inicial $\varphi(y, t_0) = y$ existe, es única, depende diferenciablemente de y, t y satisface la condición*

$$\varphi(y, t + s) = \varphi(\varphi(y, t), s)$$

para $|s| < \varepsilon, |t| < \varepsilon, |s + t| < \varepsilon$.

De esto se desprende que una ecuación diferencial autónoma en M da lugar a una familia de difeomorfismos a un parámetro, o mejor dicho un *flujo* (veremos qué significa esto más adelante). Podemos pensar a φ como una aplicación continua $\varphi : \Omega \subset M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ que es compatible con el grupo aditivo real.

Ejemplo 0.0.2. Consideramos el campo w en \mathbb{R}^2 dado por $w(x, y) = (x, y)$. El flujo está determinado por

$$\varphi((x, y), t) = (xe^t, ye^t)$$

y se visualiza como sigue (las curvas representan las órbitas y las flechas su orientación):

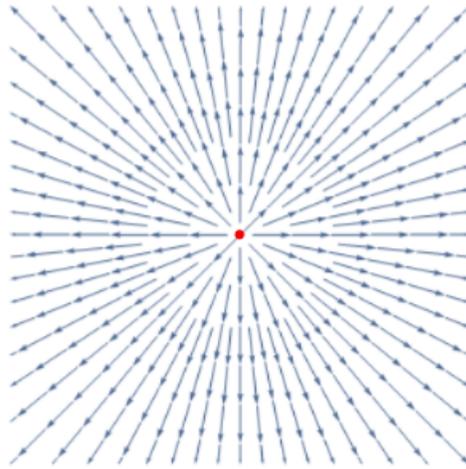


Figura 1: Retrato fase cerca del origen del campo $w(x, y) = (x, y)$. Al origen se le conoce como 'nodo inestable'.

Ejemplo 0.0.3. Consideremos $M = \mathbb{R}^2$ y v el campo dado por $v(x, y) = (x, -y)$. Tenemos entonces una ecuación diferencial de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

En este caso el flujo está dado por

$$\varphi((x, y), t) = (xe^t, ye^{-t})$$

que podemos dibujar en el plano

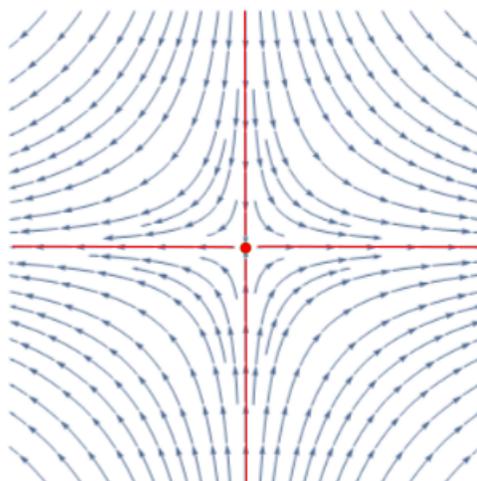


Figura 2: Retrato fase del campo $v(x, y) = (x, -y)$. Al origen se le conoce como 'punto silla'.

El índice de Poincaré-Hopf. Un invariante topológico importante es el *índice de Poincaré-Hopf* de puntos singulares aislados. Exponemos a continuación la teoría detrás de este índice para motivar el desarrollo del índice de Conley.

Sea v un campo en \mathbb{R}^{n+1} con un punto singular aislado en el origen y B una bola alrededor de 0 que no contenga otro punto singular. En la frontera, tenemos una aplicación de la esfera en sí misma:

$$f := \frac{v}{\|v\|} \Big|_{\partial B} : \partial B \cong \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n.$$

Pasando al dominio de la topología algebraica, esto nos da un homomorfismo de grupos $f_* : \pi_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow \pi_n(\mathbb{S}^n)$. Recordando que $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ (donde el generador puede ser la identidad $\text{Id} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$), esto quiere decir que existe un número entero n tal que

$$f_*(\alpha) = n\alpha.$$

El número n es conocido como el *grado* de f . El *índice de Poincaré-Hopf* del campo v en el cero se define como el grado de f tal como la construimos.

Ejemplo 0.0.4. En el primer ejemplo que dimos con el campo $w(x, y) = (x, y)$ el origen era un punto singular y su índice de Poincaré-Hopf era 1. En el segundo ejemplo el índice del origen es -1 .

El índice de Poincaré-Hopf cumple, entre otras, con las siguientes propiedades:

- depende únicamente del comportamiento del campo en una vecindad de un punto singular (es un concepto local), de hecho, del comportamiento en la frontera de una vecindad.
- Es invariante bajo homotopía, por lo que perturbar un poco el campo no afecta el índice;
- tiene una correspondencia 'global' a través del teorema de Poincaré-Hopf: Si M es una variedad cerrada y v tiene un número finito de puntos singulares, entonces

$$\sum_{p \text{ punto singular}} \text{Ind}(p) = \chi(M).$$

Donde $\text{Ind}(p)$ es el índice de p y χ es la característica de Euler.

El índice de Conley de cierta manera generaliza este índice y además comparte muchas de estas propiedades. A continuación exponemos coloquialmente los conceptos sobre los cuales está basada esta teoría. Si bien regresaremos a estos con una herramienta más formal, es bueno tener una idea preliminar.

Conjuntos invariantes aislados En vista del teorema de existencia y unicidad que enunciamos podemos considerar *flujos*, es decir espacios equipados de una acción continua del grupo aditivo real (aunque casi siempre pensaremos que el flujo está inducido por una ecuación diferencial). Primero hay que especificar a qué tipo de conjuntos se les puede asociar un índice de Conley. Éstos son los *conjuntos aislados e invariantes*. Un conjunto invariante es un conjunto que permanece fijo bajo la acción del flujo y un conjunto invariante S se dice aislado si existe una vecindad compacta N de S tal que S es el conjunto invariante más grande contenido en $\text{int}(N)$. En este contexto a N se le conoce como una *vecindad aislante* para S . A continuación presentamos algunos conjuntos aislados e invariantes.

Ejemplo 0.0.5. Sea $v = (-x, -y)$ el campo vectorial en \mathbb{R}^2 . El flujo asociado está dado por $\varphi((x, y), t) = (xe^{-t}, ye^{-t})$. El origen es un punto fijado por el flujo y por tanto un conjunto invariante. Además es aislado: Si N es la bola de radio 1 entonces el origen es el único subconjunto invariante enteramente contenido en N . Esto se ve en la siguiente figura.

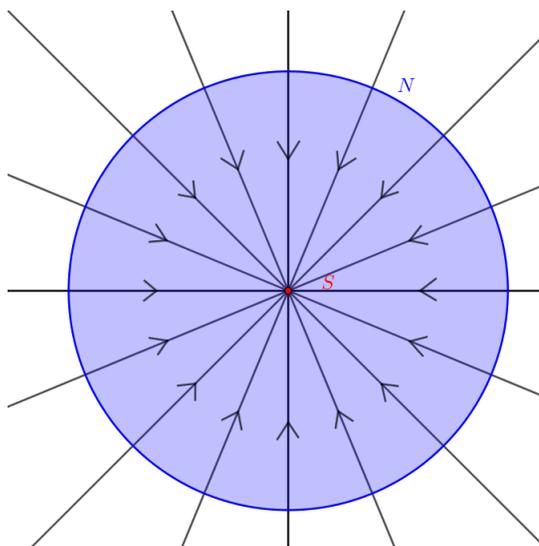


Figura 3: El origen es invariante aislado.

Ejemplo 0.0.6. Consideramos la ecuación diferencial en el plano definida por

$$\dot{z} = iz + (|z|^2 - 1)^2 z.$$

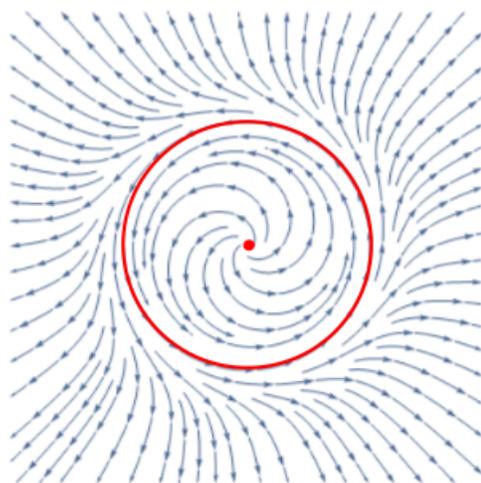


Figura 4: El retrato fase de la ecuación diferencial $\dot{z} = iz + (|z|^2 - 1)^2 z$.

La órbita periódica C dada por $|z| = 1$ es invariante y también es aislada: en efecto, podemos tomar un anillo compacto tal que sea el único conjunto invariante contenido en dicho anillo.

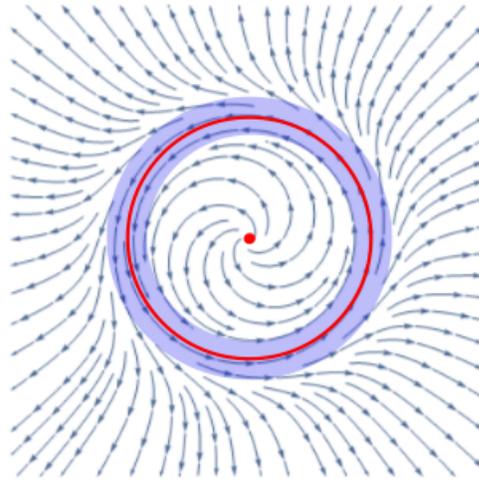


Figura 5: Una vecindad aislante para C .

Observamos que el origen también es un conjunto invariante aislado.

También presentamos unos 'no-ejemplos'.

Ejemplo 0.0.7. Considerando la ecuación diferencial en el plano dado por

$$\dot{z} = z^2$$

tenemos que el origen sí es un conjunto invariante. Sin embargo, no es aislado: cualquier vecindad del origen contiene una infinidad de órbitas, por tanto el origen no es el conjunto invariante maximal de ninguna vecindad. Hacemos un esbozo de la traza de las soluciones:

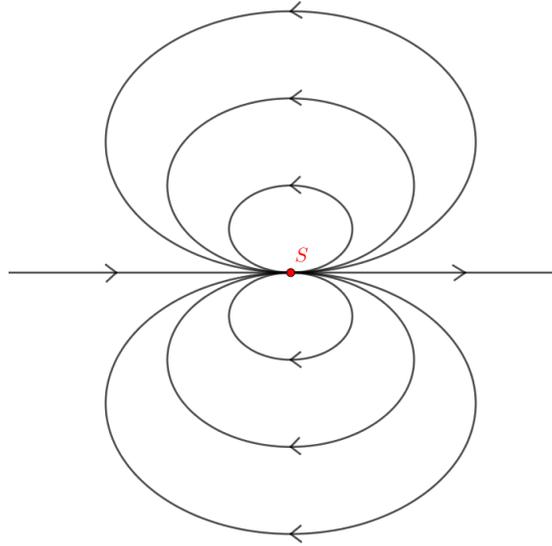


Figura 6: El flujo determinado por $\dot{z} = z^2$.

Ejemplo 0.0.8. Similarmente, si tenemos la ecuación diferencial en el plano dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

entonces las trazas de las soluciones forman círculos infinitamente anidados alrededor del origen. Nuevamente el origen si es invariante, pero no aislado.

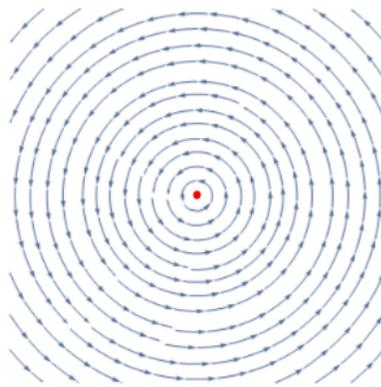


Figura 7: El origen es invariante pero no aislado.

Un primer acercamiento al índice de Conley. Ahora damos una primera idea sobre el índice homotópico de Conley. Dado S un conjunto invariante aislado, escogemos una vecindad aislante N y consideramos el conjunto de salida N_0 de N . Por simplicidad, asumiremos que N_0 es simplemente el subconjunto formado por todos los puntos de N donde el flujo apunta hacia afuera (la definición formal es más sutil, y la veremos en el segundo capítulo). Luego pasamos al cociente topológico N/N_0 donde colapsamos todo N_0 a un punto, obteniendo así un espacio punteado. A primera vista es claro que diferentes elecciones de N y N_0 rinden espacios punteados distintos. Sin embargo, la observación clave de Conley en [Con] es que todos estos cocientes son homotópicamente equivalentes. Por tanto tiene sentido hablar del *tipo de homotopía* asociado a S sin preocuparnos por diferentes elecciones de N y N_0 . Hagamos unos cálculos para ejemplificar esto.

Ejemplo 0.0.9. En el campo $v(x, y) = (-x, -y)$ tenemos que el conjunto de salida de N es vacío. Por tanto el índice homotópico de Conley asociado al origen, que denotaremos por $h(\{0\})$, está dado por $h(\{0\}) = [D^2/\emptyset] = [D^2 \sqcup *] = [\mathbb{S}^0]$ (los corchetes denotan el tipo de homotopía). En un dibujo:

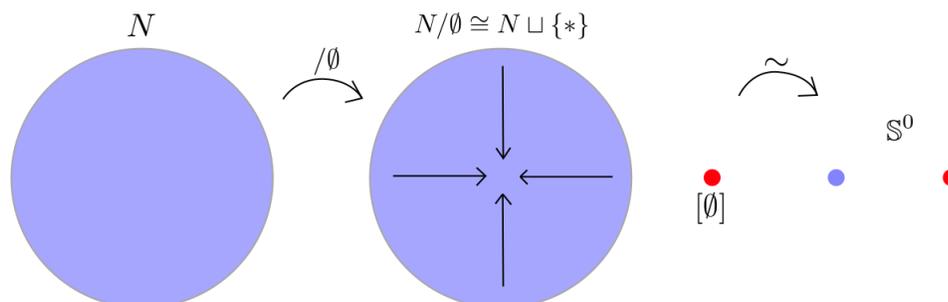


Figura 8: El índice de Conley del origen en el campo $v(x, y) = (-x, -y)$.

Ejemplo 0.0.10. En el caso de la ecuación diferencial

$$\dot{z} = iz + (|z|^2 - 1)^2 z$$

podemos calcular el índice homotópico de la órbita periódica así como del origen. Comencemos con el del origen. Podemos tomar una bola alrededor cuyo conjunto de salida sea su frontera. Es decir $h(\{0\}) = [B/\partial B]$, pero el cociente de un disco cerrado por su frontera no es más que la esfera de dimensión 2. Es decir $h(\{0\}) = [\mathbb{S}^2]$.

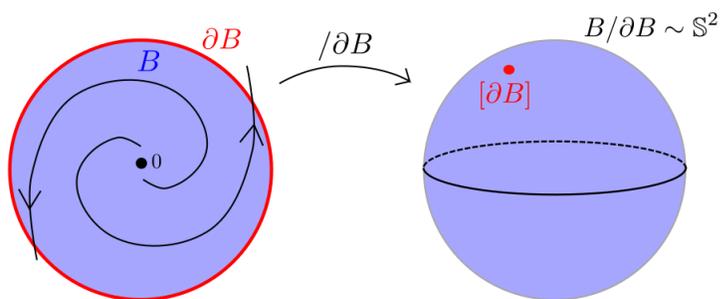


Figura 9: $h(\{0\}) = \mathbb{S}^2$.

Por otro lado, para calcular el índice de la órbita periódica podemos tomar un anillo compacto que la encierre. El conjunto de salida consta únicamente de la frontera exterior del anillo:

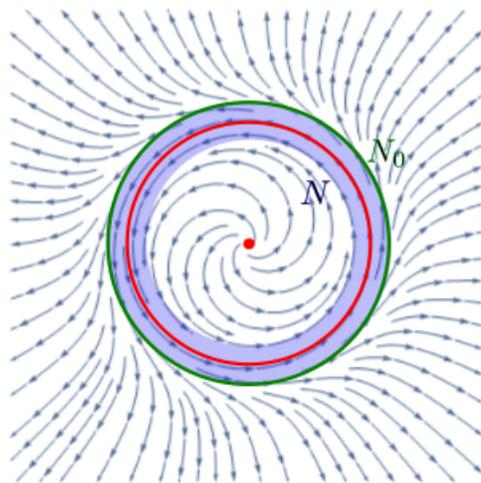
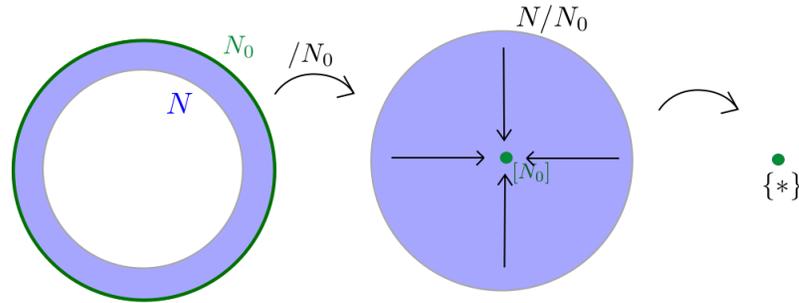


Figura 10: La vecindad aislante N y su conjunto de salida N_0 .

Enseguida $h(C)$ es el cociente de colapsar un círculo del anillo a un punto: pero esto no es más que un disco que es contráctil. Es decir $h(C) = [*]$.



A lo largo de esta tesis desarrollaremos la herramienta formal para trabajar con el índice de Conley. El primer capítulo lidia con preliminares, ahí haremos precisas algunas definiciones y conceptos básicos.

En el segundo capítulo definiremos los *pares de índice* de un conjunto aislado e invariante. Demostraremos la aserción de Conley que mencionamos: el tipo de homotopía de cualquier cociente está bien definido. También daremos algunos ejemplos básicos del cálculo del índice homotópico.

Enseguida, el tercer capítulo brinda una manera de relacionar los índices de Conley de conjuntos invariantes aislados en una descomposición atractor-repulsor. Más precisamente, se construye una sucesión coexacta larga asociada a dicha descomposición.

Finalmente el cuarto capítulo estudia los flujos parametrizados: estos son particularmente importantes porque traducen el concepto de perturbación de un flujo. En particular se demuestra que el índice de Conley es localmente constante y por tanto robusto ante perturbaciones.

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección montamos nuestro espacio de trabajo: definimos los objetos sobre los cuales podremos construir el índice de Conley y establecemos algunas propiedades. Seguiremos de cerca al trabajo de Salamon [Sal] que retoma las ideas de Conley en una exposición corregida y simplificada.

1.1. Flujos

Sea Γ un espacio Hausdorff.

Definición 1.1.1 (Flujo). Un *flujo* en Γ es una acción continua de \mathbb{R} en Γ . Esto quiere decir que tenemos una aplicación continua

$$\cdot : \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$$

que satisface:

- $x \cdot 0 = x$ para toda $x \in \Gamma$,
- $(x \cdot t) \cdot s = x \cdot (t + s)$.

Observación 1.1.2. Como abuso de notación nos referiremos a Γ como un *flujo*, dejando implícita la acción. Por ejemplo 'Sea Γ un flujo'. También dejaremos de usar φ para denotar al flujo y usaremos \cdot .

Definición 1.1.3 (Subconjunto invariante). Un subconjunto $S \subset \Gamma$ se dice *invariante* si

$$S \cdot \mathbb{R} = \{s \cdot r \mid s \in S, r \in \mathbb{R}\} = S.$$

Definición 1.1.4 (Invariante maximal). Dado $N \subset S$, podemos considerar el subconjunto invariante más grande contenido en N :

$$\text{Inv}(N) = \{\gamma \in N \mid \gamma \cdot \mathbb{R} \subset N\}.$$

Observamos que $\text{Inv}(N)$ puede ser vacío aunque N no lo sea, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1.5. Consideramos el campo vectorial $v(x, y) = (x, 0)$ en \mathbb{R}^2 . El flujo está dado por $(x, y) \cdot t = (xe^t, y)$ y por tanto las soluciones son rectas parametrizadas paralelas al eje x . Si escogemos a N como el cuadrado $[1, 2] \times [1, 2]$, entonces $\text{Inv}(N) = \emptyset$ pues toda solución que pasa por N sale eventualmente del cuadrado.

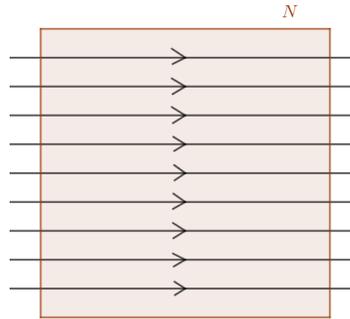


Figura 1.1: El cuadrado N tiene conjunto invariante maximal $\text{Inv}(N)$ vacío.

Del otro lado del espectro, puede ser que $\text{Inv}(N) = N$.

Ejemplo 1.1.6. Si $v(x, y) = (-y, x)$ es un campo en \mathbb{R}^2 , entonces el flujo está dado por (en notación compleja) $z \cdot t = ze^{it}$ y describe círculos anidados. Si N es el disco de radio 1 alrededor del origen, entonces $\text{Inv}(N) = N$.

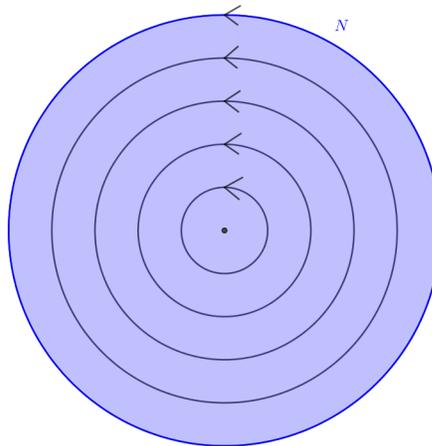


Figura 1.2: N es el disco unitario y coincide con $\text{Inv}(N)$.

Además, si N es cerrado entonces $\text{Inv}(N)$ también pues la cerradura de cualquier conjunto invariante es invariante.

Ejemplo 1.1.7. Si M es una variedad cerrada y v es un campo vectorial suave en M , entonces la ecuación diferencial

$$\dot{x} = v(x)$$

nos da por el teorema de existencia y unicidad un flujo $\varphi : \Omega \subset M \times \mathbb{R} \rightarrow M$. Pero más aún, un teorema ([Arnold], p.305) nos garantiza que la compacidad de M implica que $\Omega = M \times \mathbb{R}$. Es decir φ define un flujo sobre M .

Necesitaremos el concepto de flujo local: estos son subconjuntos del flujo que están definidos 'en una vecindad'. Esto se traduce como sigue:

Definición 1.1.8 (Flujo local). Un subconjunto X de Γ es un *flujo local* si para todo $x \in X$ existe $\varepsilon > 0$ y una vecindad U de x tal que $(U \cap X) \cdot [0, \varepsilon) \subset X$.

Las siguientes definiciones son de suma importancia, pues son los conjuntos con los que más trabajaremos.

Definición 1.1.9 (Vecindad aislante). Un subconjunto compacto N de un flujo local X es una *vecindad aislante* si el conjunto invariante maximal de N , $\text{Inv}(N)$, está contenido en el interior de N (relativo al flujo local X). Es decir

$$\text{Inv}(N) \subset \text{int } N.$$

Definición 1.1.10 (Conjunto invariante aislado). Un subconjunto S se llama *invariante aislado* si existe una vecindad aislante N tal que $\text{Inv}(N) = S$.

Es bueno parar un momento para ver unos cuantos ejemplos:

Ejemplo 1.1.11.

- En el caso del nodo inestable $v(x, y) = (x, y)$ el origen es un conjunto invariante (pues es la solución cero) y además es aislado. Todo cuadrado alrededor del origen es una vecindad aislante

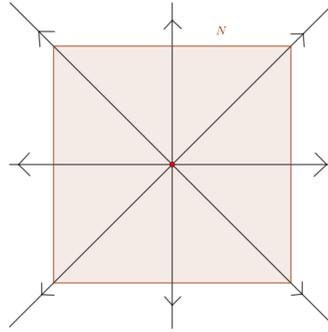


Figura 1.3: El origen de un nodo inestable es aislado: cualquier otra solución que pasa por el interior del cuadrado eventualmente sale.

- Sin embargo, como vimos anteriormente la familia de trazas de las soluciones de la ecuación dada por el campo $w(x, y) = (y, -x)$ consta de una infinidad de círculos anidados alrededor del origen.

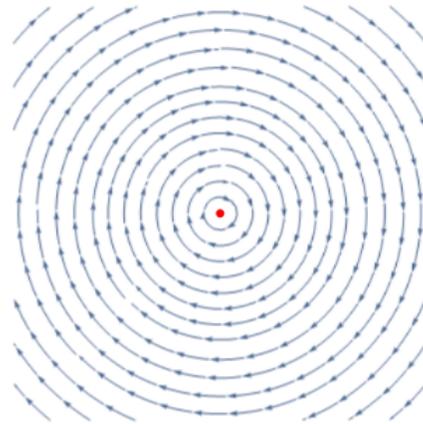


Figura 1.4: En una ecuación tipo 'centro' el origen no es aislado.

En este caso el origen *no* es aislado: cualquier vecindad que lo contenga también va a contener una cantidad infinita de círculos, que también son invariantes (así $\text{Inv}(N) \neq \{0\}$).

1.2. Atractores y repulsores

Los atractores y repulsores de un conjunto aislado invariante permiten descomponer el flujo en pedazos más simples. Para definirlos necesitaremos echar mano de los conceptos de conjuntos ω -límite y α -límite.

Definición 1.2.1 (ω -límite y α -límite). Dado $Y \subset \Gamma$ definimos el conjunto ω -límite como

$$\omega(Y) := \text{Inv} \left(\overline{Y \cdot [0, \infty)} \right) = \bigcap_{t>0} \overline{Y \cdot [t, \infty)}$$

y el conjunto α -límite como

$$\alpha(Y) := \text{Inv} \left(\overline{Y \cdot (-\infty, 0]} \right) = \bigcap_{t>0} \overline{Y \cdot (-\infty, -t]}.$$

Estos conjuntos permiten obtener información asintótica de las soluciones que empiezan en Y . A continuación enunciamos algunas propiedades de los conjuntos α -límite y ω -límite.

Proposición 1.2.2. *Sea $S \subset \Gamma$ compacto e invariante y $Y \subset S$. Entonces $\omega(Y)$ y $\alpha(Y)$ son subconjuntos compactos e invariantes. Además, si Y es conexo, $\omega(Y)$ y $\alpha(Y)$ lo son también.*

Demostración. Probamos el resultado para $\omega(Y)$, el de $\alpha(Y)$ siendo análogo.

Por definición, tenemos que

$$\begin{aligned} \omega(Y) \cdot \mathbb{R} &= \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \left(\bigcap_{t>0} \overline{Y \cdot [t, \infty)} \right) \cdot r \\ &\subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \bigcap_{t>0} \left(\overline{Y \cdot [t, \infty)} \cdot r \right) \\ &\subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \bigcap_{t>0} \left(\overline{Y \cdot [t, \infty)} \cdot r \right) \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \bigcap_{t>0} \overline{Y \cdot [t+r, \infty)} \\ &\subseteq \omega(Y) \end{aligned}$$

Donde usamos que la acción es continua (para pasar la operación al interior de la cerradura) y que cada uno de los uniendos está contenido en $\omega(Y)$. Así $\omega(Y)$ es invariante. Por otro lado, $\omega(Y)$ es la intersección de conjuntos cerrados, por lo que es cerrado y al ser un subconjunto cerrado de un compacto, es compacto.

Finalmente, si Y es conexo, cada conjunto $Y \cdot [t, \infty)$ es conexo por continuidad del flujo. Así $\omega(Y)$ es la intersección anidada de conjuntos conexos, por tanto es conexo. \square

Ejemplo 1.2.3. Un buen ejemplo de conjunto α -límite es el de un ciclo límite (ver por ejemplo [Arnold]). Si p es cualquier punto distinto de cero en la siguiente figura el conjunto $\alpha(\{p\})$ es la circunferencia unitaria.

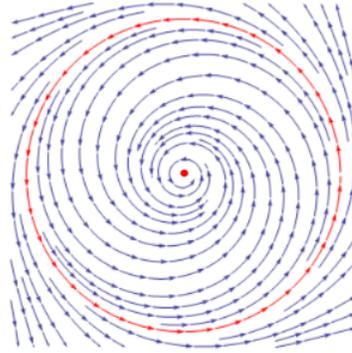


Figura 1.5: La circunferencia unitaria es el conjunto α -límite de cualquier punto distinto de cero.

Ejemplo 1.2.4. Consideramos el campo vectorial en la recta real $v(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Por ser 2π -periódico éste da lugar a un campo vectorial en $\Gamma = \mathbb{S}^1$ que tiene un único punto fijo y una órbita homoclínica.

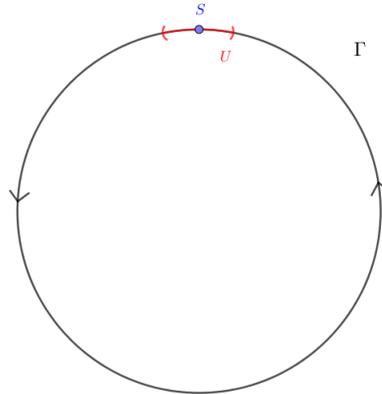


Figura 1.6: Un flujo en el círculo con S un punto fijo y U una vecindad de S .

En este caso, $\omega(U) = \mathbb{S}^1$, ya que para cualquier $t > 0$, $U \cdot [t, \infty) = \mathbb{S}^1$. Similarmente $\alpha(U) = \mathbb{S}^1$.

Definición 1.2.5 (Atractor y repulsor). Si S es compacto e invariante y $A \subset S$ también es compacto e invariante, entonces diremos que A es un *atractor* si existe U

una vecindad de A en S tal que $\omega(U) = A$. Dualmente, un subconjunto compacto e invariante R es un *repulsor* si existe una vecindad V de R en S tal que $R = \alpha(V)$.

Observación 1.2.6. *La definición nos dice que un subconjunto es un atractor si existe una vecindad que se contrae con el flujo. Análogamente un subconjunto es un repulsor si existe una vecindad que se dilata con el flujo.*

Ejemplo 1.2.7. En la siguiente figura A es un atractor mientras que R es un repulsor.

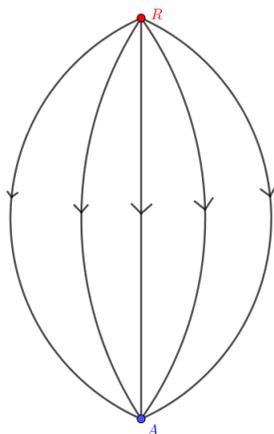


Figura 1.7: Un par atractor repulsor dado por A y R .

Ahora damos una caracterización de un conjunto atractor:

Lema 1.2.8. *Sea $S \subseteq \Gamma$ compacto e invariante. Un subconjunto $A \subset S$ compacto e invariante es un atractor si y sólo si existe una vecindad U de A en S tal que $\gamma \cdot (-\infty, 0] \not\subset U$ para todo $\gamma \in U \setminus A$.*

Demostración. Si A es un atractor, entonces existe una vecindad U de A tal que $\omega(U) = A$. Así, si existiese $\gamma \in U \setminus A$ tal que $\gamma \cdot (-\infty, 0] \subset U$ entonces para todo $t > 0$, $\gamma = (\gamma \cdot -t) \cdot t$ y $\gamma \cdot -t \in U$. Así $\gamma \in U \cdot [t, \infty)$ para cualquier $t > 0$ y por tanto $\gamma \in \omega(U) \setminus A$, una contradicción.

Por otro lado, supongamos que existe U que cumple la condición. Así, para cualquier $\gamma \in \partial U$ existe un $t_0 > 0$ tal que $\gamma \cdot [-t_0, 0] \not\subset U$. Por compacidad, podemos encontrar un $t_* > 0$ tal que $\gamma \cdot [-t_*, 0] \not\subset U$ para cualquier $\gamma \in \partial U$. Sea V una vecindad de A tal que $V \cdot [0, t_*] \subset U$. Entonces $V \cdot [0, \infty) \subset U$ y por tanto $\omega(V) = A$. \square

Finalmente enunciamos algunas propiedades de atractores y repulsores.

Proposición 1.2.9. *Sea $S \subset \Gamma$ compacto e invariante y $A \subset S$ un atractor. Se cumplen las siguientes.*

1. *Si $\gamma \in S$ y $\alpha(\gamma) \cap A \neq \emptyset$, entonces $\gamma \in A$.*
2. *Si $\gamma \in S$ y $\omega(\gamma) \cap A \neq \emptyset$, entonces $\omega(\gamma) \subset A$.*
3. *$A^* = \{\gamma \in S \mid \omega(\gamma) \cap A = \emptyset\}$ es un repulsor en S , llamado el repulsor complementario a A .*

Demostración. Sea U una vecindad de A en S tal que $\omega(U) = A$.

1. Si $\alpha(\gamma) \cap A \neq \emptyset$, entonces existe una sucesión t_n estrictamente creciente y no acotada tal que $\gamma \cdot (-t_n) \in U$ para toda n . Entonces $\gamma \in \omega(U) = A$.
2. Si $\omega(\gamma) \cap A \neq \emptyset$ entonces $\gamma \cdot t \in U$ para algún $t \geq 0$. Entonces $\omega(\gamma) = \omega(\gamma \cdot t) \subset \omega(U) = A$.
3. Sea $t^* > 0$ tal que $\overline{U \cdot [t^*, \infty)} \subset U$ y definamos

$$U^* = S \setminus \overline{U \cdot [t^*, \infty)}.$$

Entonces $S = U \cup U^*$. Más aún $U^* \cdot (-\infty, t^*] \subset S \setminus U$ y por tanto U^* es una vecindad de $\alpha(U^*) \subset S \setminus U \subset U^*$. Se sigue que $\alpha(U^*)$ es un repulsor en S .

Si $\gamma \in \alpha(U^*)$ entonces $\omega(\gamma) \subset \alpha(U^*)$. Esto implica que $\omega(\gamma) \cap A = \emptyset$ y por tanto $\gamma \in A^*$. Si $\gamma \in A^*$ entonces $(\gamma \cdot \mathbb{R}) \cap U = \emptyset$ ya que de otra manera $\omega(\gamma) \subset \omega(U) = A$. Entonces $\gamma \cdot \mathbb{R} \subset U^*$ y por tanto $\gamma \in \text{Inv}(U^*) = \alpha(U^*)$. Concluimos que $A^* = \alpha(U^*)$ es un repulsor.

□

1.3. Descomposiciones de Morse

Este concepto nos permite dividir un conjunto invariante y compacto en conjuntos invariantes más chicos y orbitas que los conectan entre sí. Esto generaliza el comportamiento de los puntos críticos del flujo gradiente de una función de Morse en una variedad compacta a flujos arbitrarios y conjuntos invariantes aislados.

Definición 1.3.1. Sea $S \subset \Gamma$ un conjunto compacto e invariante y sea P un conjunto finito de índices. Una colección finita

$$\mathcal{M} = \{M(\pi) \mid \pi \in P\}$$

de subconjuntos compactos invariantes de S se dice ser una *descomposición de Morse de S* si existe un orden parcial en P tal que para cualquier $x \in S$ se cumple una de las siguientes:

- $x \in M(\pi)$ para algún $\pi \in P$,
- existen $\pi < \pi^*$ en P tales que $\omega(x) \subset M(\pi)$ y $\alpha(x) \subset M(\pi^*)$

Al orden parcial de P se le llama *admisibile* y los conjuntos $M(\pi)$ se llaman *conjuntos de Morse*.

Una descomposición de Morse genérica puede verse como sigue:

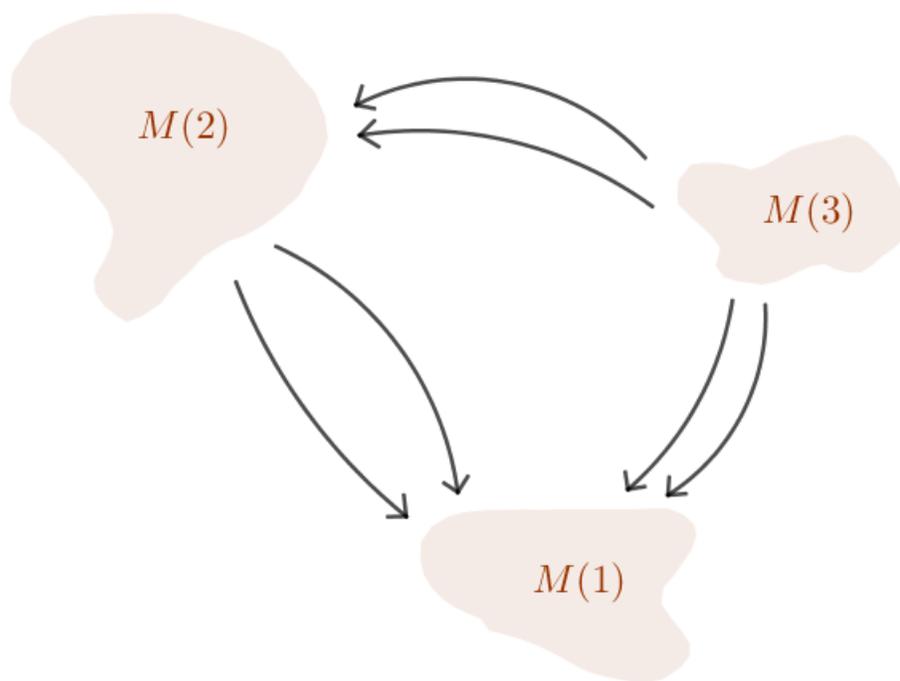


Figura 1.8: Una descomposición de Morse genérica.

El orden parcial en cuestión es $3 > 2 > 1$. Todas las órbitas van de un conjunto de índice mayor en uno de índice menor.

Observación 1.3.2. *Observamos que la definición nos indica que no puede haber ciclos entre nuestros conjuntos de Morse: toda órbita cuyos conjuntos α -límite y ω -límite estén contenidos en $M(\pi)$ está enteramente contenida en $M(\pi)$.*

Para cualquier descomposición de Morse existe un refinamiento natural dado por el flujo: definiendo $\pi < \pi'$ si existe una órbita γ tal que $\alpha(\gamma) \subset M(\pi')$ y $\omega(\gamma) \subset M(\pi)$ y extendemos transitivamente obtenemos un orden parcial en P .

El siguiente ejemplo es crucial para entender las descomposiciones de Morse (incluso, ¡de ahí viene el nombre!).

Ejemplo 1.3.3. Sea M una variedad Riemanniana compacta y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. El campo gradiente negativo $-\nabla f$ nos da un flujo en M . Sea \mathcal{M} la colección de puntos críticos de f . Es claro que \mathcal{M} es una colección de conjuntos compactos e invariantes. Si los valores de los puntos críticos de f son todos distintos entre sí, esto nos da una descomposición de Morse ordenada con $x > y$ si $f(x) > f(y)$. Ilustramos esto con la función altura h como función de Morse en el toro:

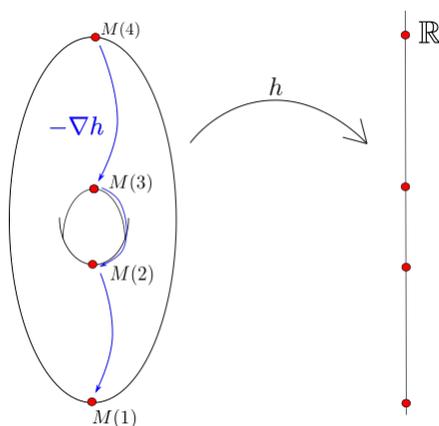


Figura 1.9: El flujo gradiente negativo rinde una descomposición de Morse.

Ejemplo 1.3.4. Siguiendo la misma idea consideramos el flujo en \mathbb{S}^1 como en la siguiente figura:

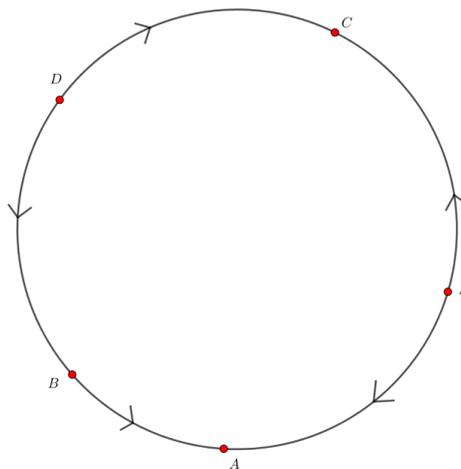


Figura 1.10: Un flujo en el círculo con puntos críticos marcados en rojo.

En la figura, el orden asociado a la descomposición del conjunto de puntos críticos dada por el flujo es $A < B < D, C < D, A < E, C < E$.

Si conocemos una descomposición de Morse, podemos obtener muchas otras más 'robustas' combinando algunos conjuntos de Morse y el conjunto de órbitas que las conectan. En el ejemplo anterior pudimos haber considerado en lugar de los puntos críticos, el conjunto $\{A, B, D\} \cup [E, C]$ donde $[E, C]$ es el arco de E a C en el sentido de las manecillas del reloj, que también es un conjunto compacto e invariante.

Esto se traduce en el concepto de *intervalo*.

Definición 1.3.5 (Intervalo). Dado un conjunto parcialmente ordenado, decimos que un subconjunto I es un *intervalo* si siempre que $x, y \in I$ y $x \leq z \leq y$ entonces $z \in I$.

Si \mathcal{M} es una descomposición de Morse con orden parcial P , denotamos por $M(I)$ al conjunto

$$M(I) := \left(\bigcup_{p \in I} M(p) \right) \cup \left(\bigcup_{p, q \in I} C(M(p), M(q)) \right)$$

donde $C(M(p), M(q))$ denota al conjunto de órbitas γ tales que $\omega(\gamma) \subset M(q)$ y $\alpha(\gamma) \subset M(p)$. Así definido, $M(I)$ es un conjunto aislado e invariante.

1.4. Teoría de homotopía

Recordamos algunas nociones básicas de la teoría de homotopía. Una exposición más completa se puede encontrar en [Fom].

Definición 1.4.1 (Espacio punteado). Un espacio punteado consta de un par (X, x_0) donde X es un espacio topológico y x_0 es un punto de X . Si el punto distinguido está sobrentendido lo omitiremos y nos referiremos a X como un espacio punteado. Una aplicación entre espacios punteados $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es una aplicación continua tal que $f(x_0) = y_0$.

Definición 1.4.2 (Homotopía). Dos aplicaciones entre espacios punteados $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ se dicen *homotópicas* si existe una aplicación continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que

- $H(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in X$,
- $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$,
- $H(x_0, t) = y_0$ para todo $t \in [0, 1]$.

Se puede verificar que el ser homotópico es una relación de equivalencia, por lo que si f es homotópica a g lo denotaremos simplemente por $f \sim g$ y a la clase de equivalencia la marcaremos entre corchetes $[f]$.

Dados $(X, x_0), (Y, y_0)$ dos espacios punteados, denotamos por $[X; Y]$ a la colección de clases de homotopía de aplicaciones entre dichos espacios.

Definición 1.4.3 (Equivalencia homotópica). Decimos que $f : X \rightarrow Y$ es una *equivalencia homotópica* si existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \sim \text{Id}_X$ y $f \circ g \sim \text{Id}_Y$. Dos espacios punteados se dirán *homotópicamente equivalentes* si existe una equivalencia homotópica entre ellos. A la clase de equivalencia homotópica de un espacio se le conoce como el *tipo de homotopía* y se denota con corchetes: $[X]$.

Capítulo 2

Definición y propiedades básicas

2.1. Definición

En esta sección definiremos el índice de Conley de conjuntos invariantes aislados e investigaremos algunas propiedades fundamentales.

Como mencionamos en la motivación, una de las propiedades del índice de Conley es el ser calculable a partir de información restringida. En analogía con el índice de Poincaré-Hopf que se puede calcular con la información en una vecindad del punto singular, el índice de Conley se calcula a través de *pares de índice* que definimos a continuación.

A lo largo de esta sección, cuando hablemos de flujo local asumiremos implícitamente que $X \subset \Gamma$ es un flujo local métrico.

Definición 2.1.1 (Positivamente invariante). Un subconjunto $K \subset N$ se dice *positivamente invariante* en N si siempre que tengamos $\gamma \in K, t \geq 0$ entonces $\gamma \cdot [0, t] \subset N$ implica que $\gamma \cdot t \in K$.

Definición 2.1.2 (Par de índice). Sea S un subconjunto invariante aislado de algún flujo local X . Un *par de índice* de S es un par ordenado (N_1, N_0) de conjuntos compactos tales que

- $N_0 \subset N_1$,
- $N_1 \setminus N_0$ es una vecindad de S en X , y
 $S = \text{Inv } \overline{N_1 \setminus N_0} = \{\gamma \in \overline{N_1 \setminus N_0} \mid \gamma \cdot \mathbb{R} \subset \overline{N_1 \setminus N_0}\}$,

- para todo $x \in N_0$ y $t \geq 0$, si $x \cdot [0, t] \subset N_1$ entonces $x \cdot t \in N_0$ (N_0 es positivamente invariante en N_1),
- si $x \in N_1$ y $x \cdot [0, \infty) \not\subset N_1$, entonces existe $t \geq 0$ con $x \cdot [0, t] \subset N_1$ y $x \cdot t \in N_0$.

La cuarta propiedad de la definición nos dice que toda órbita que salga eventualmente de N_1 tiene que salir por N_0 , por eso a veces a N_0 se le llama 'conjunto de salida'. Esto se puede visualizar en la figura siguiente: notamos como toda flecha que sale de N_1 pasa por N_0 .

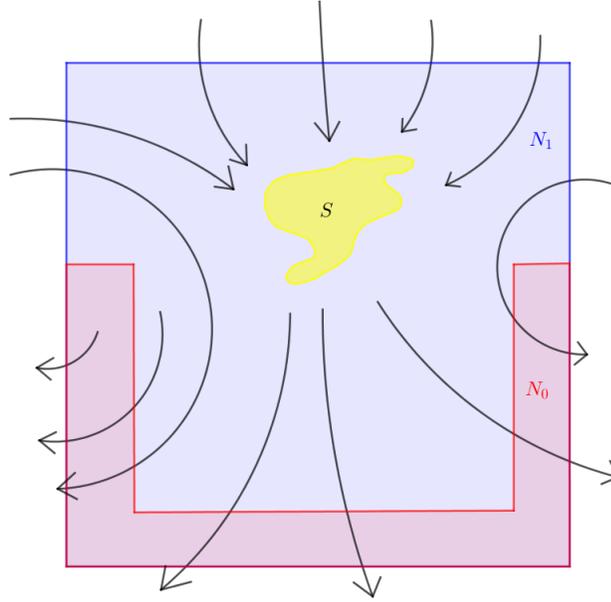


Figura 2.1: Un par de índice típico.

El siguiente teorema es fundamental para nuestro trabajo. No daremos una demostración completa, los detalles de esta se pueden consultar en [Sal].

Teorema 2.1.3 (Existencia de pares de índice). *Sea $X \subset \Gamma$ un flujo local métrico y $N \subset X$ una vecindad aislante del conjunto aislado e invariante $S \subset \Gamma$ y sea U una vecindad de S en Γ . Entonces existe un par de índice (N_1, N_0) para S en X tal que N_1 y N_0 son positivamente invariantes en N y $N_1 \setminus N_0 \subset U$.*

También daremos por hecho el siguiente corolario del teorema.

Corolario 2.1.4. *Sea $X \subset \Gamma$ un flujo local métrico, $S \subset X$ aislado e invariante y una descomposición de Morse $\{M(\pi) \mid \pi \in P\}$ de S con un orden admisible π_1, \dots, π_n . Más aún, sea (N_n, N_0) un par de índice para S en X . Entonces existe*

una sucesión $N_0 \subset \cdots \subset N_n$ de conjuntos compactos tal que (N_k, N_{j-1}) es un par de índice para

$$M_{kj} = \{\gamma \in S \mid \omega(\gamma) \cup \alpha(\gamma) \subset \bigcup_{i=j}^k M(\pi_i)\}.$$

Para definir el índice de Conley necesitaremos del concepto de un *sistema conexo simple*.

Definición 2.1.5 (Sistema conexo simple). Un *sistema conexo simple* consta de una pareja (I_O, I_M) donde $I_O = \{(X_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es una colección de espacios topológicos punteados (llamados *objetos*) y I_M es una colección de clases de homotopía entre dichos espacios (llamados *morfismos*) sujetas a las siguientes condiciones:

- $\text{hom}(X, Y) = \{[f] \in [X; Y] \mid [f] \in I_M\}$ es no vacío y consta de un elemento para cada $X, Y \in I_O$,
- Si $X, Y, Z \in I_O$ y $[f] \in \text{hom}(X, Y)$, $[g] \in \text{hom}(Y, Z)$, entonces $[g \circ f] \in \text{hom}(X, Z)$,
- $\text{hom}(X, X) = \{[\text{Id}_X]\}$.

Es decir, un sistema conexo simple se ve como una colección de espacios punteados y clases de homotopía de aplicaciones entre ellos:

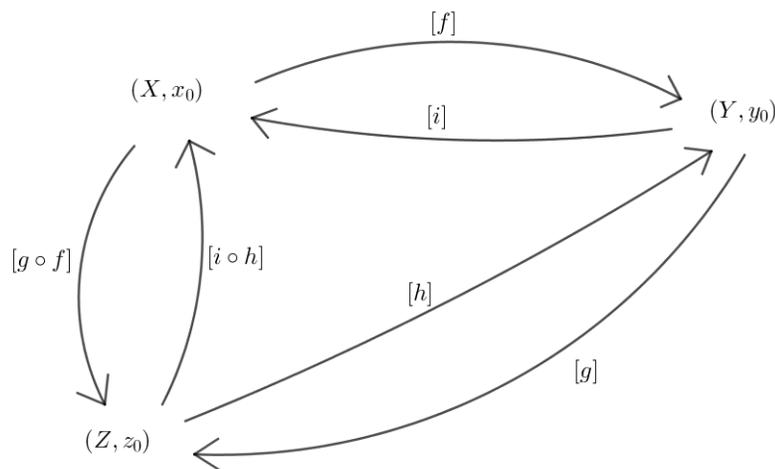


Figura 2.2: Tres espacios de un sistema conexo simple.

También definimos el concepto de morfismo entre sistemas conexos simples.

Definición 2.1.6 (Morfismo de sistemas conexos simples). Si I, J son dos sistemas conexos simples, entonces $\Phi : I \rightarrow J$ se dice ser un *morfismo de sistemas conexos simples* si Φ es una colección de clases de homotopía de aplicaciones de I_O en J_O sujeta a las condiciones:

- Para cada $X \in I_O, Y \in J_O$, $\Phi(X, Y) := \{[f] : X \rightarrow Y \mid [f] \in \Phi\}$ es no vacía y consta de un solo elemento,
- Dadas $f : X \rightarrow X' \in I_M, g : Y \rightarrow Y' \in J_M$ se cumple que $[g^{-1} \circ \varphi \circ f] \in \Phi(X, Y)$ donde $\varphi \in \Phi(X', Y')$.

La siguiente proposición es muy importante: a pesar de tener una colección grande de espacios, todos éstos son homotópicamente equivalentes.

Proposición 2.1.7. *En un sistema conexo simple, necesariamente todo morfismo es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Si $[f] \in \text{hom}(X, Y)$, entonces existe $[g] \in \text{hom}(Y, X)$. Luego $[g \circ f] \in \text{hom}(X, X) = \{[\text{Id}_X]\}$. Se sigue que $g \circ f \sim \text{Id}$ y similarmente se verifica que $f \circ g \sim \text{Id}$. \square

Podemos finalmente dar nuestra definición.

Definición 2.1.8 (Índice de Conley). Sea S un conjunto aislado e invariante. Definimos su índice de Conley, denotado $\mathcal{S}(S)$ como el sistema conexo simple (I_O, I_M) con

$$I_O = \{N_1/N_0 \mid (N_1, N_0) \text{ es un par de índice para } S\}$$

$$I_M = \{f^t : N_1/N_0 \rightarrow N'_1/N'_0\}$$

donde X/Y denota al cociente topológico y los f^t se construirán a continuación. Cuando sea importante denotar el flujo local respecto al cual trabajamos escribiremos $\mathcal{S}(S, X)$.

Vamos a construir los morfismos entre nuestros espacios cociente. Para eso procederemos con tres lemas.

Lema 2.1.9 (De la homotecia). *Sea N una vecindad aislante de S en un flujo local $X \subset \Gamma$ y sea U una vecindad de S en X . Entonces existe $t > 0$ tal que si $\gamma \cdot [-t, t] \subset N$ entonces $\gamma \in U$.*

Demostración. Supongamos que el enunciado es falso. En particular, para cada $t \geq 0$, existe un γ tal que $\gamma \cdot [-t, t] \subset N$ y sin embargo $\gamma \notin U$. Podemos tomar una sucesión creciente y no acotada t_k y encontrar una sucesión γ_k tales que $\gamma_k \cdot [-t_k, t_k] \subset N$ pero $\gamma_k \notin U$. Luego, por compacidad, γ_k tiene un punto de acumulación, digamos γ . Puesto que $t_k \rightarrow \infty$ y por continuidad del flujo tenemos que $\gamma \cdot \mathbb{R} \subset N$. Es decir $\gamma \in \text{Inv}(N) = S$. Sin embargo, recordando que $\{\gamma_k\} \subset N \setminus U$, tenemos necesariamente que $\gamma \in \overline{N \setminus U}$: pero entonces $\gamma \in S \subset \text{int } U$ y $\gamma \in \overline{N \setminus U}$, una contradicción. \square

Llamamos a este lema 'De la homotecia' puesto que el enunciado nos garantiza que dada cualquier vecindad de S , existe una 'homotecia a lo largo del flujo' que está suficientemente cerca de S .

Este lema nos permite dar un morfismo entre dos cocientes de índice.

Lema 2.1.10. Sean $(N_1, N_0), (N'_1, N'_0)$ dos pares de índice para S . Por el lema anterior, existe $T \geq 0$ tal que para todo $t \geq T$ se cumplen:

- Si $\gamma \cdot [-t, t] \subset N_1 \setminus N_0$ entonces $\gamma \in N'_1 \setminus N'_0$
- Si $\gamma \cdot [-t, t] \subset N'_1 \setminus N'_0$ entonces $\gamma \in N_1 \setminus N_0$.

Así, la aplicación $f : N_1/N_0 \times [T, \infty) \rightarrow N'_1/N'_0$ dada por

$$f([\gamma], t) = f^t([\gamma]) = \begin{cases} [\gamma \cdot 3t] & \text{si } \gamma \cdot [0, 2t] \subset N_1 \setminus N_0, \gamma \cdot [t, 3t] \subset N'_1 \setminus N'_0 \\ [N'_0] & \text{de otra manera,} \end{cases}$$

para $\gamma \in N_1$ y $t \geq T$ es continua.

Demostración. Procedemos siguiendo tres casos

- Si $\gamma \cdot [t, 3t] \not\subset \overline{N'_1 \setminus N'_0}$, entonces existe t^* con $t < t^* < 3t$ tal que $\gamma \cdot t^* \notin \overline{N'_1 \setminus N'_0}$. Así, existe una vecindad U de $\gamma \cdot t^*$ en Γ tal que $U \cap \overline{N'_1 \setminus N'_0} = \emptyset$. Por continuidad del flujo, existe una vecindad W de (γ, t) en $\Gamma \times [T, \infty)$ tal que cuando $(\gamma', t') \in W$, se cumple que $\gamma' \cdot t^* \in U$ y $t' < t^* < 3t'$ (en particular la imagen inversa). Concluimos que $\gamma' \cdot [t', 3t'] \not\subset \overline{N'_1 \setminus N'_0}$ y por tanto $f([\gamma'], t') = [N'_0]$ para todo par $(\gamma', t') \in W$ con $\gamma' \in N_1$.

Observamos que el caso $\gamma \cdot [0, 2t] \not\subset \overline{N_1 \setminus N_0}$ es análogo. Por tanto podemos asumir para nuestros casos restantes que $\gamma \cdot [0, 2t] \subset \overline{N_1 \setminus N_0}$ y $\gamma \cdot [t, 3t] \subset \overline{N'_1 \setminus N'_0}$.

- Si $\gamma \cdot [t, 3t] \cap N'_0 = \emptyset$, entonces por la frase anterior $\gamma \cdot [t, 3t] \subset N'_1 \setminus N'_0$. Por hipótesis, como $(\gamma \cdot 2t)[-t, t] = \gamma \cdot [t, 3t] \subset N'_1 \setminus N'_0$ se cumple que $\gamma \cdot 2t \in N_1 \setminus N_0$ y por tanto $\gamma \cdot [0, 2t] \subset N_1 \setminus N_0$. Luego $f([\gamma], t) = \gamma \cdot 3t \in N'_1 \setminus N'_0$.

Sea U una vecindad de $\gamma \cdot 3t$ en Γ . Por la continuidad del flujo, existe una vecindad W de $(\gamma, t) \in \Gamma \times [T, \infty)$ tal que, cuando $(\gamma', t') \in W$, se cumpla

$$\gamma' \cdot [0, 2t'] \cap N_0 = \emptyset, \quad \gamma' \cdot [t', 3t'] \cap N'_0 = \emptyset, \quad \gamma' \cdot 3t' \in U.$$

Luego, si $\gamma' \in N_1$ obtenemos $\gamma' \cdot [0, 2t'] \subset N_1 \setminus N_0$, que por hipótesis implica $\gamma' \cdot t' \in N'_1 \setminus N'_0$ y así $\gamma' \cdot [t', 3t'] \subset N'_1 \setminus N'_0$. Por lo tanto $f([\gamma'], t') = [\gamma' \cdot 3t'] = \gamma' \cdot 3t' \in U$ para cada $(\gamma', t') \in W$ con $\gamma' \in N_1$.

- $\gamma \cdot [t, 3t] \cap N'_0 \neq \emptyset$. En este caso se sigue (por lo que asumimos antes de comenzar el segundo caso) que $\gamma \cdot 3t \in N'_0$. Sea $[U]$ una vecindad de $f([\gamma], t) = [N'_0]$ en N'_1/N'_0 y definimos

$$U = ([U] \cap N'_1 \setminus N'_0) \cup (\Gamma \setminus N'_1) \cup N'_0.$$

Notamos que U es una vecindad de N'_0 en Γ y además

$$[U] = (U \cap N'_1 \setminus N'_0) \cup [N'_0].$$

Por continuidad del flujo, existe una vecindad W de (γ, t) en $\Gamma \times [T, \infty)$ tal que siempre que $(\gamma', t') \in W$, entonces $\gamma' \cdot 3t' \in U$. Esto implica que

$$f([\gamma'], t') \in \{[\gamma' \cdot 3t'], [N'_0]\} \subset (U \cap N'_1 \setminus N'_0) \cup [N'_0] = [U]$$

para cada $(\gamma', t') \in W$ con $\gamma' \in N_1$.

□

Ejemplo 2.1.11. Consideramos el punto silla. Recordamos que el flujo está dado por $(x, y) \cdot t = (xe^t, ye^{-t})$. Sean

$$\begin{cases} N_1 = [-1, 1] \times [-1, 1], \\ N_0 = \{-1, 1\} \times [-1, 1] \\ N'_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}], \\ N'_0 = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \times [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]. \end{cases}$$

Tanto (N_1, N_0) como (N'_1, N'_0) son pares de índice para $S = \{0\}$. En un dibujo:

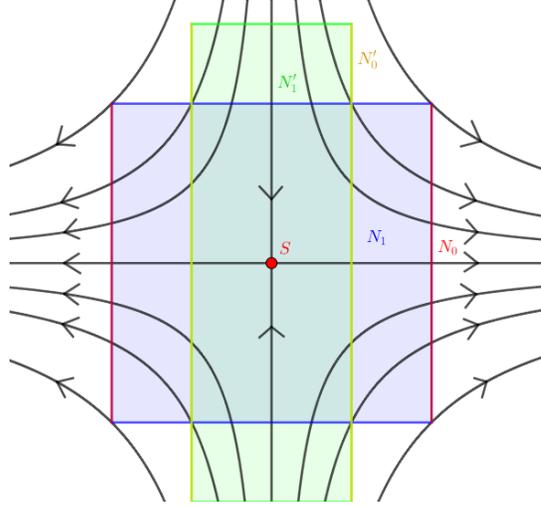


Figura 2.3: Los dos pares de índice (N_1, N_0) y (N'_1, N'_0) .

Afirmamos que para $t \geq T = \ln(2)$ la aplicación

$$f^t([(x, y)]) = \begin{cases} [xe^{3t}, ye^{-3t}] & |xe^{2t}|, |ye^{2t}| < 1, |x|e^{3t} < \frac{1}{2}, \\ [N'_0] & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es la construída en el lema anterior.

Tenemos que verificar que para todo $t \geq T$ si $\gamma \cdot [-t, t] \subset N_1 \setminus N_0$ entonces $\gamma \in N'_1 \setminus N'_0$ y vice versa. Notamos que la condición $(x, y) \cdot [-t, t] \subset N_1 \setminus N_0$ es equivalente a decir que $|xe^t| = |x|e^t < 1$ y $|ye^{-(-t)}| = |y|e^t \leq 1$. Por tanto si $t \geq \ln(2)$ entonces si $(x, y) \cdot [-t, t] \subset N_1 \setminus N_0$ se cumple que

$$|x|2 = |x|e^{\ln(2)} \leq |x|e^t < 1$$

por lo que $|x| < \frac{1}{2}$. Similarmente se cumple que $|y| \leq \frac{3}{2}$. Es decir $(x, y) \in N'_1 \setminus N'_0$.

Conversamente, notamos que la condición $(x, y) \cdot [-t, t] \subset N'_1 \setminus N'_0$ es equivalente a decir que $|x|e^t < \frac{1}{2}$ en conjunción con $|y|e^t \leq \frac{3}{2}$. Por tanto si $t \geq \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ entonces estas condiciones implican que

$$|y|\frac{3}{2} = |y|e^{\ln(\frac{3}{2})} \leq |y|e^t < \frac{3}{2}$$

por lo que $|y| < 1$. Similarmente $|x| < 1$.

Así, para aplicar el lema basta con considerar $T = \max\{\ln(2), \ln(\frac{3}{2})\} = \ln(2)$, como afirmamos. Se sigue que las f^t mencionadas son las que obtenemos al aplicar el lema anterior.

Fijemos por ejemplo el tiempo $t = 10$. Entonces toda el área de N_1 que se encuentra fuera de N'_1 es mapeada al punto $[N'_0]$ mientras que rectángulos verticales suficientemente pegados al eje y son estirados a lo largo del flujo:

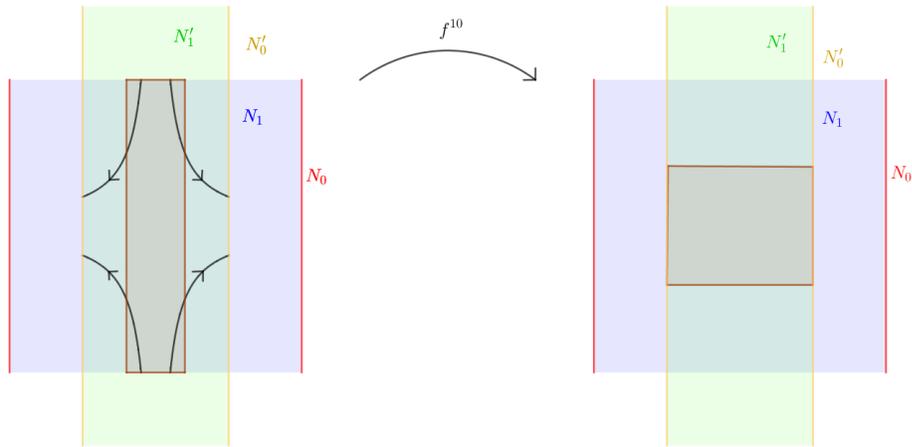


Figura 2.4: f^{10} estira rectángulos verticales a lo largo del flujo.

Pasando al cociente, la función f^{10} estira un rectángulo estrecho a lo largo del cociente N'_1/N'_0 . Es decir se ve como muestra la figura

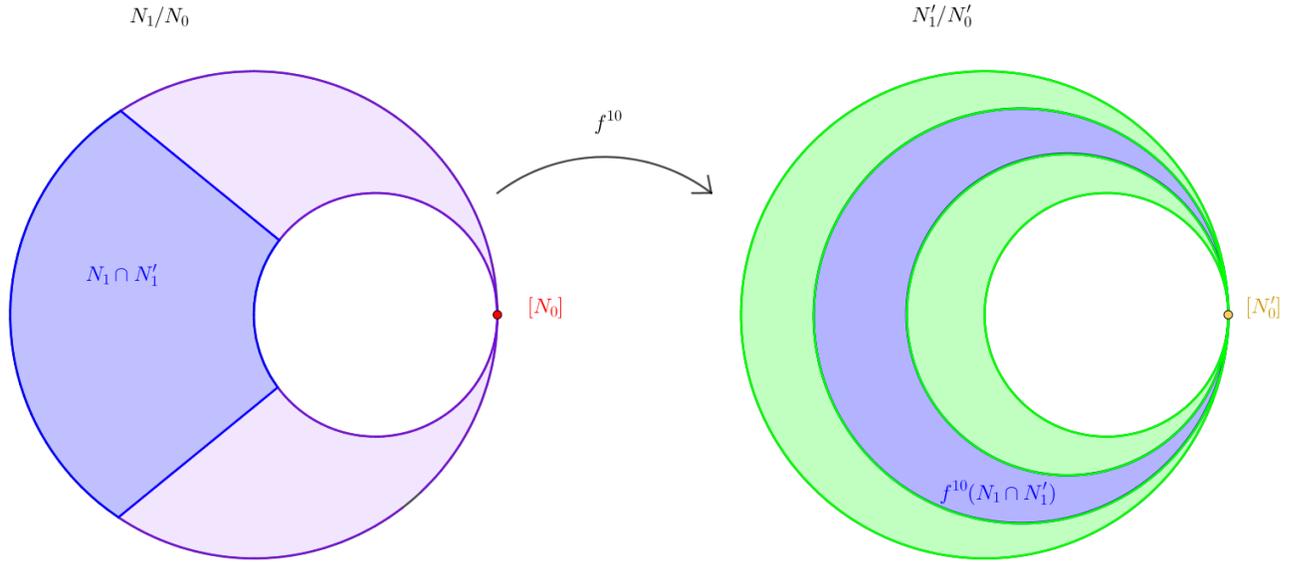


Figura 2.5: La aplicación $f^{10} : N_1/N_0 \rightarrow N'_1/N'_0$.

Así, ya construimos nuestra familia de morfismos entre cualesquiera dos espacios N_1/N_0 y N'_1/N'_0 . Ahora queremos ver que se cumple la propiedad de composición: Es decir que si componemos dos de estos morfismos obtenemos un morfismo homotópico a alguno de la familia. Para eso necesitamos el siguiente

Lema 2.1.12. Sean (N_1, N_0) , (N'_1, N'_0) , (N''_1, N''_0) tres pares de índice para S . Usando el lema de la homotecia podemos encontrar $T \geq 0$ suficientemente grande tal que se cumplan las condiciones del lema 2.1.10 para $t \geq T$. Aplicandolo una segunda vez podemos encontrar un $T' \geq 0$ tal que para todo $t \geq T'$ se cumplan las siguientes condiciones:

- si $\gamma \cdot [-t, t] \subset N'_1 \setminus N'_0$ entonces $\gamma \in N''_1 \setminus N''_0$,
- si $\gamma \cdot [-t, t] \subset N''_1 \setminus N''_0$ entonces $\gamma \in N'_1 \setminus N'_0$.

Finalmente, sea $f : N_1/N_0 \times [T, \infty) \rightarrow N'_1/N'_0$ como en el lema anterior y $f' : N'_1/N'_0 \times [T', \infty) \rightarrow N''_1/N''_0$ construída de manera análoga. Entonces para $t \geq \max\{T, T'\}$ se cumple que

$$f'(f([\gamma], t), t) = \begin{cases} [\gamma \cdot 6t], & \text{si } \gamma \cdot [0, 4t] \subset N_1 \setminus N_0, \gamma \cdot [2t, 6t] \subset N''_1 \setminus N''_0, \\ [N''_0] & \text{de otra manera, con } \gamma \in N_1. \end{cases}$$

Demostración. En realidad, por como están construídos los morfismos, basta ver que $\gamma \cdot [0, 2t] \subset N_1 \setminus N_0$, $\gamma \cdot [t, 5t] \subset N'_1 \setminus N'_0$, $\gamma \cdot [4t, 6t] \subset N''_1 \setminus N''_0$ es equivalente a

$$\gamma \cdot [0, 4t] \subset N_1 \setminus N_0 \text{ y } \gamma \cdot [2t, 6t] \subset N''_1 \setminus N''_0.$$

Sin embargo, esto se sigue de las condiciones en T y T' . Para explicitar esto, para cualquier $\gamma' \in \gamma \cdot [2t, 3t]$ tenemos que $\gamma' \cdot [-t, t] \subset \gamma \cdot [t, 5t] \subset N'_1 \setminus N'_0$, por lo que $\gamma' \in N_1 \setminus N_0$. Las otras implicaciones son análogas. \square

Podemos demostrar el siguiente.

Teorema 2.1.13. *Dado S un conjunto aislado e invariante en un flujo local métrico $X \subset \Gamma$, las colecciones*

$$I_O = \{N_1/N_0 \mid (N_1, N_0) \text{ es un par de índice para } S \text{ en } X\}$$

$$I_M = \{[f^t] \mid f^t : N_1/N_0 \rightarrow N'_1/N'_0 \text{ como en el lema 2.1.10.}\}$$

forman un sistema conexo simple, llamado el índice de Conley de S y denotado por $\mathcal{I}(S)$.

Demostración. El lema 2.1.10 nos garantiza que entre cada dos espacios existe al menos un morfismo de la forma f^t . Es claro que los f^t son homotópicos entre si, pues todos se construyeron a partir de la misma homotopía $f : N_1/N_0 \times [T, \infty) \rightarrow N'_1/N'_0$. Más aún, tomando $N_1 = N'_1$ y $N_0 = N'_0$ en el primer lema, obtenemos que $f^0 : N_1/N_0 \rightarrow N_1/N_0$ es la identidad. Finalmente, la composición de morfismos también está en nuestra familia, y esto se debe al lema 2.1.12. \square

2.2. Índice homotópico: Primeros cálculos

Para un conjunto invariante y aislado dado S , todos los espacios $N_1/N_0 \in I_O$ son homotópicamente equivalentes por la proposición 2.1.7. Entonces podemos definir sin ambigüedad el siguiente concepto.

Definición 2.2.1 (Índice homotópico). Si S es un conjunto aislado e invariante, definimos el *índice homotópico* de Conley de S como

$$h(S) := [N_1/N_0]$$

donde (N_1, N_0) es un par de índice (en particular $N_1/N_0 \in I_O$) y los corchetes denotan el tipo de homotopía.

Resaltamos que el índice no depende del par escogido, pues en $\mathcal{I}(S)$ todos los espacios son homotópicamente equivalentes.

Ejemplo 2.2.2. Regresemos a nuestro 'punto silla' en el plano. El origen juega el papel de nuestro conjunto aislado invariante, y podemos usar a nuestro cuadrado como vecindad aislante. Primero identificamos nuestro conjunto de salida:

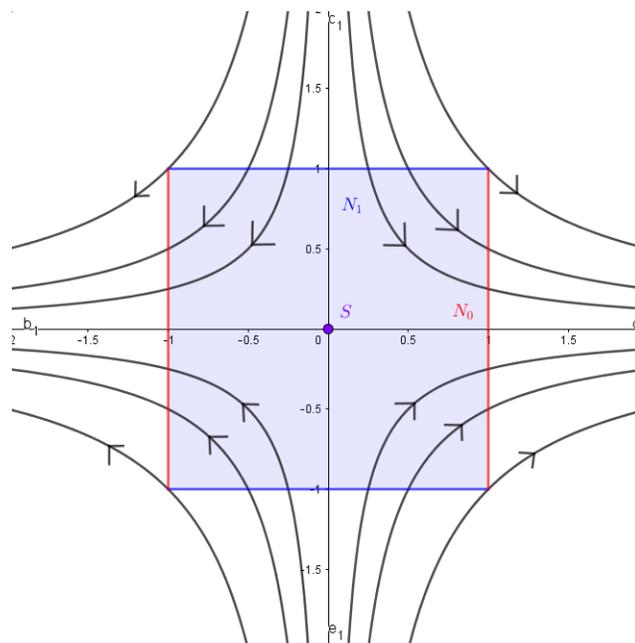


Figura 2.6: Un par de índice para el punto silla

Después pasamos al cociente N_1/N_0 colapsando a N_0 a un punto.

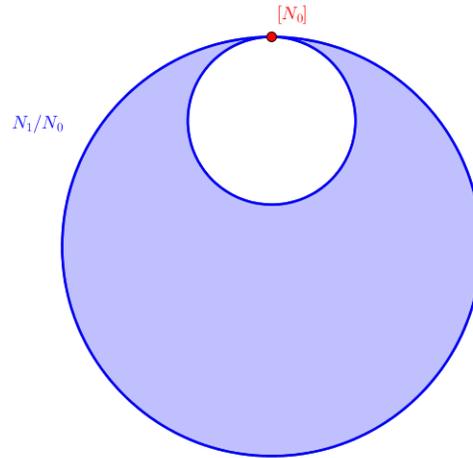


Figura 2.7: El cociente N_1/N_0 , uno de los espacios de $\mathcal{S}(S)$.

Finalmente, observamos que N_1/N_0 es homotópicamente equivalente a \mathbb{S}^1 (con la deformación dibujada):

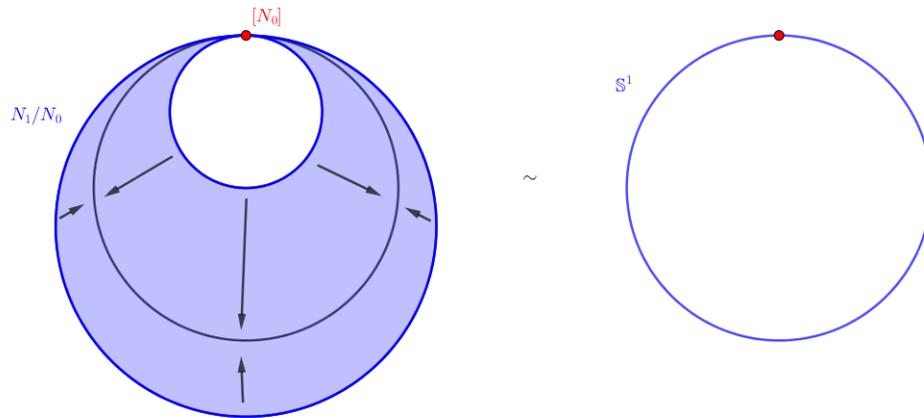


Figura 2.8: $N_1/N_0 \sim \mathbb{S}^1$, por lo que $h(S) = [\mathbb{S}^1]$

De donde podemos concluir que $h(S) = [\mathbb{S}^1]$.

Ejemplo 2.2.3. Calculemos el índice homotópico en otro ejemplo conocido: el origen de un nodo inestable. Procedemos de manera análoga, identificamos un par de índice para nuestro conjunto aislado invariante:

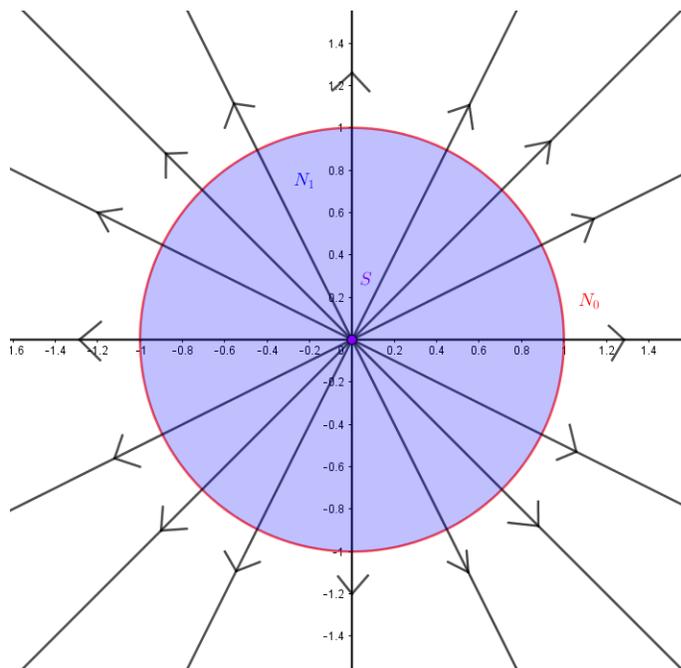


Figura 2.9: Un par de índice para el origen en un nodo inestable.

Luego colapsamos el conjunto N_0 a un punto y obtenemos un espacio muy familiar:

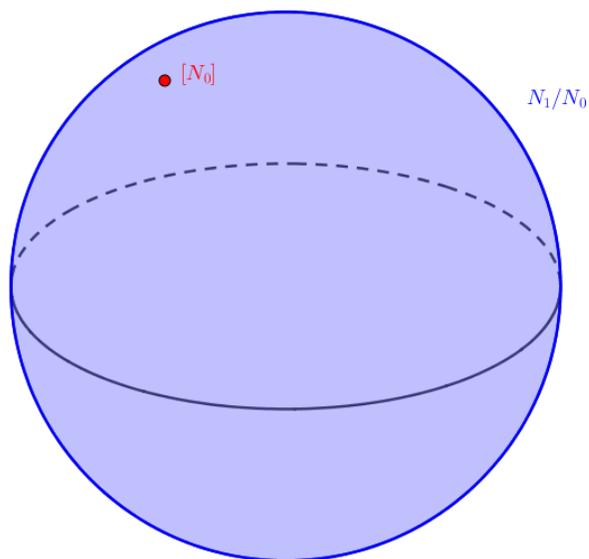


Figura 2.10: Colapsando N_0 a un punto, observamos que N_1/N_0 es homeomorfo a \mathbb{S}^2 .

Y podemos concluir que $h(S) = [\mathbb{S}^2]$.

Ambos son casos particulares de *puntos críticos hiperbólicos*.

Definición 2.2.4 (Punto singular hiperbólico). Dado v un campo vectorial suave en \mathbb{R}^n , un punto crítico p se dice hiperbólico si los valores propios de la matriz $v'(p)$ todos tienen parte real distinta de cero. El *índice de Morse* se define como el número de valores propios con parte real positiva contados con multiplicidad.

Observamos un fenómeno interesante de nuestros ejemplos anteriores. En el primero, el índice de Morse era 1, y su índice homotópico de Conley era \mathbb{S}^1 . En el segundo, el índice de Morse es 2, y su índice homotópico de Conley es \mathbb{S}^2 . Esto es más que una coincidencia:

Proposición 2.2.5. *Si p es un punto singular hiperbólico con índice de Morse k , entonces p es aislado e invariante y $h(p) = [\mathbb{S}^k]$.*

Primero usaremos un lema muy importante, que nos dice que podemos calcular el índice homotópico 'salvo homeomorfismo'. De otra manera, que si torcemos y reparametrizamos el flujo, el índice es esencialmente el mismo. Para eso tenemos que tener claro a que nos referimos con 'torcer y reparametrizar', esto nos lo da la equivalencia topológica orbital.

Definición 2.2.6 (Equivalencia topológica orbital). Sean Γ, Δ dos flujos, y un homeomorfismo $H : \Gamma \rightarrow \Delta$. Decimos que H es una *equivalencia topológica orbital* si H manda órbitas en órbitas y preserva su orientación. Es decir, para cada $\gamma \in \Gamma$ existe $\tau_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ creciente tal que

$$H(\gamma \cdot t) = H(\gamma) \cdot \tau_\gamma(t).$$

Observación 2.2.7. *Podemos asumir sin pérdida de generalidad que para cualquier $\gamma \in \Gamma$, $\tau_\gamma(0) = 0$. En efecto, si $\tau_\gamma(0) = T \neq 0$, entonces*

$$\begin{aligned} H(\gamma) &= H(\gamma \cdot 0) \\ &= H(\gamma) \cdot \tau_\gamma(0) \\ &= H(\gamma) \cdot T. \end{aligned}$$

Luego $H(\gamma) \cdot _ : \mathbb{R} \rightarrow \Delta$ es periódica de periodo T , y podemos simplemente considerar $\tau'_\gamma = \tau_\gamma - T$ sin romper las condiciones de equivalencia orbital, y esta cumple que $\tau'_\gamma(0) = T - T = 0$.

Proposición 2.2.8. Sean Γ, Δ dos flujos y $H : \Gamma \rightarrow \Delta$ una equivalencia topológica orbital. Entonces:

- Si $S \subset \Gamma$ es aislado e invariante, entonces $H(S)$ (la imagen de S bajo H) es aislado e invariante,
- Si (N_1, N_0) es un par de índice para S , $(H(N_1), H(N_0))$ es un par de índice para $H(S)$,
- Con lo anterior presente, H induce una biyección entre $I_O(S)$ e $I_O(H(S))$ que conmuta con los morfismos $I_M(S)$ e $I_M(H(S))$. Esto en otras palabras es un isomorfismo de sistemas conexos simples

$$\mathcal{H} : \mathcal{I}(S) \rightarrow \mathcal{I}(H(S)).$$

En particular los índices homotópicos de S y $H(S)$ coinciden.

En un dibujo:

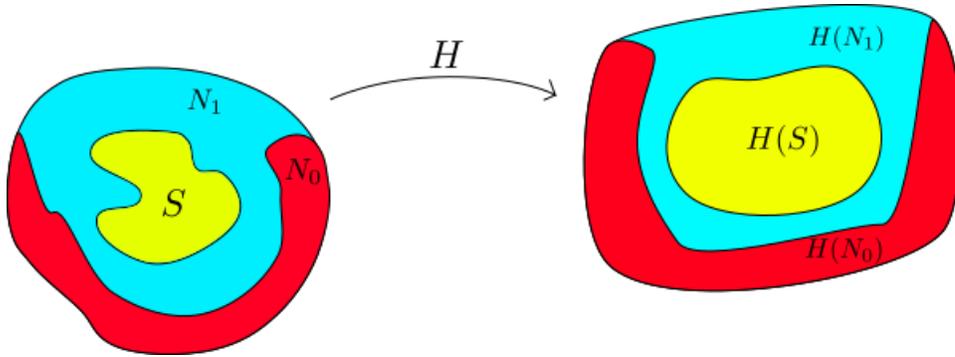


Figura 2.11: Una equivalencia topológica orbital 'manda pares de índice en pares de índice'.

Demostración. Procedemos en orden.

- Sea $S \subset \Gamma$ invariante y aislado, con vecindad aislante N . Primero observamos que $H(S)$ es invariante, ya que para todo $s \in S$ y $r \in \mathbb{R}$, $H(s) \cdot r = H(s \cdot \tau_s^{-1}(r)) \in H(S \cdot \mathbb{R}) \subset H(S)$. Por otro lado, $H(N)$ es compacto, y por un argumento similar al previo $H(\text{Inv}(N)) = \text{Inv}(H(N))$. Luego

$$\text{Inv}(H(N)) = H(\text{Inv}(N)) = H(S) \subset \text{int } H(N).$$

Usamos las propiedades de homeomorfismo para concluir la contención en el interior.

- Verifiquemos que $(H(N_1), H(N_0))$ es un par de índice para $H(S)$.

Es claro del inciso anterior que $\overline{H(N_1) \setminus H(N_0)}$ es vecindad aislante de S .

Sea $H(x) \in H(N_0)$ y $t \geq 0$ tal que $H(x) \cdot [0, t] \in H(N_1)$. Esto quiere decir que $H(x \cdot [0, \tau_x^{-1}(t)]) \in H(N_1)$, luego $x \cdot [0, \tau_x^{-1}(t)] \in N_1$ y por ser (N_1, N_0) par de índice $x \cdot \tau_x^{-1}(t) \in N_1$. Aplicando H llegamos a que $H(x) \cdot t \in H(N_0)$.

Sea $H(x) \in H(N_1)$ con $H(x) \cdot [0, \infty) \not\subset H(N_1)$. Entonces $x \cdot [0, \infty) \not\subset N_1$, por lo que existe $t \geq 0$ con $x \cdot [0, t] \subset N_1$ y $x \cdot t \in N_0$. Aplicando H a estas ecuaciones llegamos a que $H(x) \cdot [0, \tau_x(t)] \subset H(N_1)$ y $H(x) \cdot \tau_x(t) \in H(N_0)$.

- Con lo anterior en mente, obtenemos un morfismo de sistemas conexos simples

$$\mathcal{H} : N_1/N_0 \mapsto H(N_1)/H(N_0).$$

Al ser H un homeomorfismo, es claro que es un isomorfismo. □

Corolario 2.2.9. *En la situación anterior, $h(S) = h(H(S))$.*

Necesitamos un último ingrediente para demostrar la proposición 2.2.5, un resultado clásico de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Una prueba se puede consultar en [Per], página 118.

Teorema 2.2.10 (Grobman-Hartman). *Sea $\dot{x} = v(x)$ una ecuación diferencial en \mathbb{R}^n con un punto singular hiperbólico p . Entonces existe una vecindad U de p y un homeomorfismo $H : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ que es una equivalencia topológica orbital entre v y el sistema $\dot{x} = Ax$ donde A es una linealización de v .*

Demostración de la proposición 2.2.5. Por nuestro razonamiento previo junto con el teorema de Grobman-Hartman, podemos reducirnos al caso en que nuestro campo es de la forma

$$\dot{x} = \Lambda x$$

donde

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array} \right)$$

con k el índice de Morse. Podemos considerar una bola cerrada alrededor del origen como N_1 y su conjunto de salida N_0 . Salvo homotopía, tenemos que estamos colapsando una k -esfera en el ecuador de una n -bola. Usando métodos de topología algebraica, por ejemplo la estructura de complejo CW de la bola, podemos ver que el cociente N_1/N_0 es homotópicamente equivalente a \mathbb{S}^k . □

Finalmente, al ser $h(S)$ un tipo de homotopía también podemos definir el índice (co)homológico de Conley.

Definición 2.2.11 (Índice (co)homológico de Conley). Si \mathcal{H}_* (\mathcal{H}^*) es una teoría de (co)homología, definimos el *índice (co)homológico de Conley* de un conjunto aislado e invariante S como

$$CH_*(S) = \mathcal{H}_*(h(S))$$

$$CH^*(S) = \mathcal{H}^*(h(S)).$$

Ejemplo 2.2.12. Supongamos que tenemos un flujo en la esfera con un conjunto aislado e invariante en la forma de una órbita periódica tal que 'el flujo apunta hacia afuera' en una vecindad. Podemos considerar el par de índice como se indica en la siguiente figura:

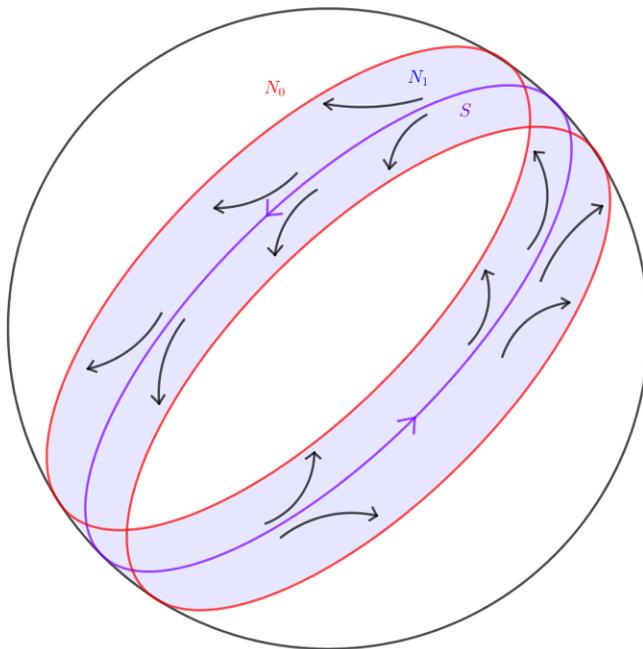


Figura 2.12: La órbita periódica S con par de índice (N_1, N_0) .

Para calcular el índice homotópico $h(S)$ primero colapsamos los dos trópicos de N_0 , y luego a su vez colapsamos la circunferencia a un punto para 'pinchar' el toro:

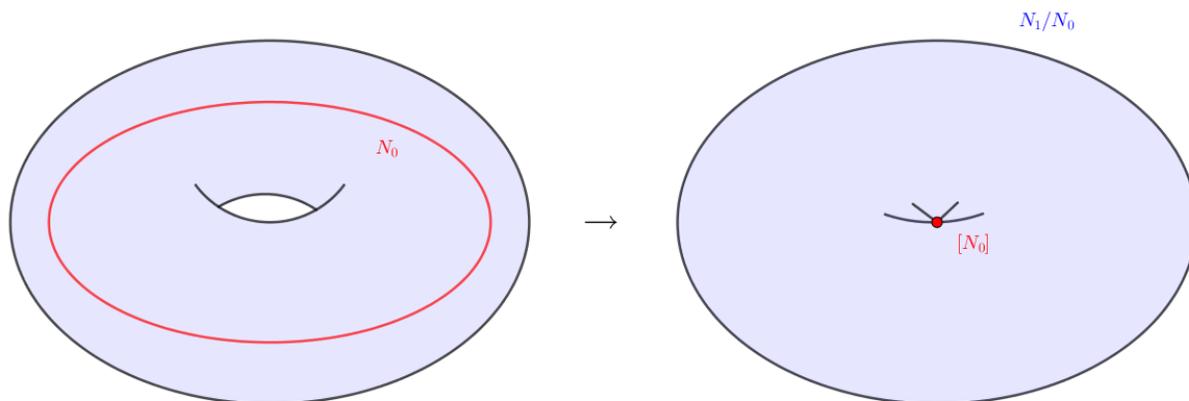


Figura 2.13: El cálculo de $h(S)$.

Por lo que los grupos de homología están dados por

$$CH_n(S) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

2.3. Propiedades básicas

El índice homotópico de Conley cumple con propiedades muy interesantes. La primera es la capacidad de detectar conjuntos invariantes enteramente contenidas en algún conjunto compacto. Esto formalmente se da a través de la siguiente proposición.

Proposición 2.3.1. *Sea $X \subset \Gamma$ un flujo local métrico y $S \subset X$ aislado e invariante. Si $h(S) \neq \{*\}$ (el espacio de un punto) entonces $S \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea (N_1, N_0) un par de índice para $S = \emptyset$. Entonces para toda $\gamma \in N_1$ existe un $t > 0$ tal que $\gamma \cdot [0, t] \not\subset \overline{N_1 \setminus N_0}$. Puesto que N_1 es compacto, podemos encontrar un tiempo común $T > 0$ tal que $\gamma \cdot [0, T] \cap N_0 \neq \emptyset$ para toda $\gamma \in N_1$. Luego la función

$$f^t([\gamma]) = \begin{cases} [\gamma \cdot t], & \gamma \cdot [0, t] \subset N_1 \setminus N_0 \\ [N_0], & \text{de otra manera,} \end{cases}$$

para $t \in [0, T]$ es una homotopía entre f^T que es la constante $[N_0]$ y f^0 que es la identidad. Es decir $h(S) = \{*\}$. \square

En esencia, si $S = \emptyset$ entonces podemos retraer todo N_1 a N_0 , como ejemplifica la figura.

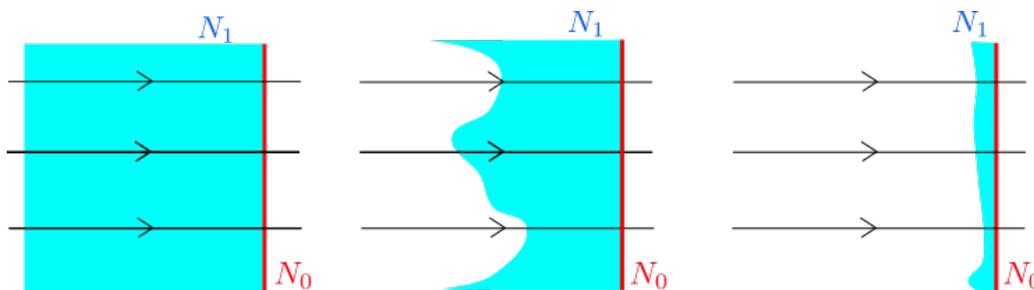


Figura 2.14: Si $S = \emptyset$ entonces N_1 se retrae a N_0 .

Notamos que el converso de la proposición es falso, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.2. Consideramos la ecuación diferencial $\dot{x} = x^2$ en \mathbb{R} . El origen es un conjunto invariante aislado, podemos calcular su índice homotópico usando un intervalo que lo contenga como muestra la figura:

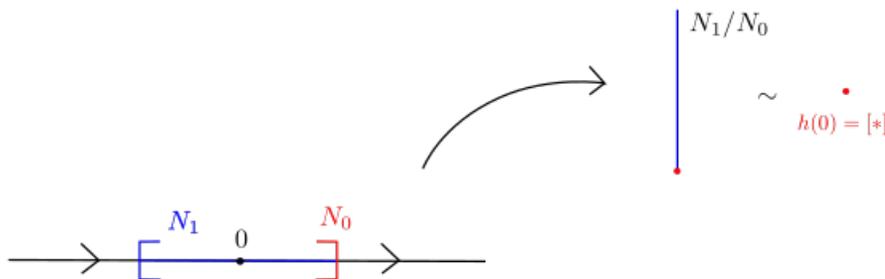


Figura 2.15: El índice homotópico del origen en el flujo $\dot{x} = x^2$.

Como se muestra, $h(0) = [*]$. Sin embargo, $\text{Inv}(\overline{N_1 \setminus N_0}) = \{0\} \neq \emptyset$.

A la propiedad enunciada en la proposición 2.3.1 a veces se le conoce como 'detección de dinámica no trivial' pues permite predecir la existencia de soluciones contenidas en $\overline{N_1 \setminus N_0}$. Esto es de particular utilidad en ecuaciones diferenciales parciales, como se puede consultar por ejemplo en [Smo].

El índice homotópico tiene una propiedad de aditividad que se puede considerar natural al pasar al cociente. Primero recordamos la operación de *suma cuña* o 'wedge sum' (a veces abreviado, 'suma') de espacios punteados.

Definición 2.3.3. Dados $(X, x_0), (Y, y_0)$ dos espacios punteados, su *suma cuña* o *wedge sum*, denotada por $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ (en general se omiten los puntos y se escribe $X \vee Y$) se define como el espacio punteado

$$\left(X \amalg Y \right) / (x_0 \sim y_0)$$

donde el punto distinguido es la clase de $[x_0] = [y_0]$ y $X \amalg Y$ denota la unión ajena de espacios.

Ejemplo 2.3.4. Esta operación solo 'pega' dos espacios en su punto distinguido. Por ejemplo si $X = Y = \mathbb{S}^1$ con puntos distinguidos x_0 y y_0 respectivamente su suma se puede representar como en la siguiente figura.

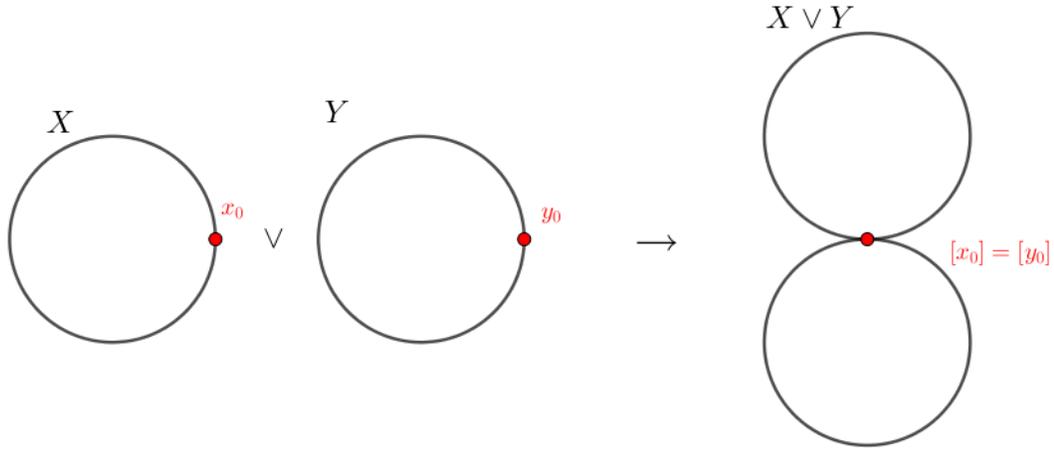


Figura 2.16: La suma de dos círculos.

Observación 2.3.5. Un hecho de topología algebraica que no demostraremos es que la suma de dos espacios es compatible con el tipo de homotopía. Más precisamente se cumple:

$$[X] \vee [Y] = [X \vee Y]$$

Referimos al lector a [Fom] para una demostración de este hecho.

Proposición 2.3.6. Si $\{S_i\}_{i \in I}$ es una familia finita disjunta de conjuntos aislados e invariantes, entonces $\amalg_{i \in I} S_i$ es aislada e invariante. Además

$$h \left(\amalg_{i \in I} S_i \right) = \bigvee_{i \in I} h(S_i).$$

Demostración. Es claro que $\coprod_{i \in I} S_i$ es invariante y compacto, pues es la unión finita de compactos. Fijando un S_i , por trabajar en un espacio Hausdorff y por compacidad de cada S_j , podemos encontrar una vecindad U_i tal que $S_i \subset U_i$ y $S_j \cap U_i = \emptyset$. Por el teorema de existencia de pares de índice, podemos encontrar un par (N_i, N'_i) contenido en U_i . Repitiendo este proceso podemos encontrar una colección de pares de índice (N_i, N'_i) ajenos dos a dos, de manera que $\coprod_{i \in I} N_i$ es una vecindad aislante de $\coprod_{i \in I} S_i$ con conjunto de salida $\coprod_{i \in I} N'_i$. Pasando al cociente obtenemos el resultado buscado. \square

En topología algebraica existe otra operación compatible con el tipo de homotopía conocida como el *producto smash* (o a veces solo 'producto') denotado por $X \wedge Y$. Dentro del producto de dos espacios punteados X, Y con puntos distinguidos x_0, y_0 tenemos un encaje de $X \vee Y$ dado por el subconjunto

$$\iota : X \vee Y \cong \{(x, y) \in X \times Y \mid x = x_0, y \in Y \text{ o } y = y_0, x \in X\}.$$

Esto se puede apreciar en la siguiente figura:

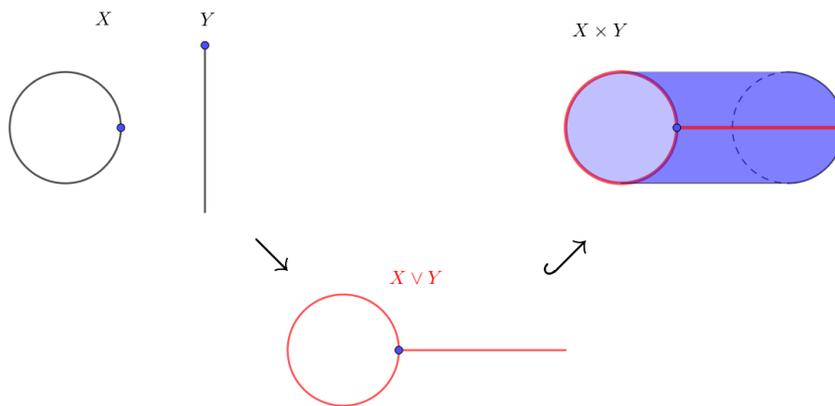


Figura 2.17: La copia de $X \vee Y$ en $X \times Y$.

El producto smash es precisamente el cociente de $X \times Y$ colapsando la imagen del encaje ι :

Definición 2.3.7. Dados $(X, x_0), (Y, y_0)$ dos espacios punteados, definimos su *producto smash* denotado como $(X, x_0) \wedge (Y, y_0)$ (o solo $X \wedge Y$) como

$$(X \times Y)/(X \vee Y).$$

Ejemplo 2.3.8. El producto smash es un poco más difícil de visualizar. La idea es tomar el producto $X \times Y$ y colapsar una copia de su suma $X \vee Y$. Por ejemplo si $X = \mathbb{S}^0$ y $Y = \mathbb{S}^1$ con sus respectivos puntos distinguidos tenemos el siguiente dibujo:

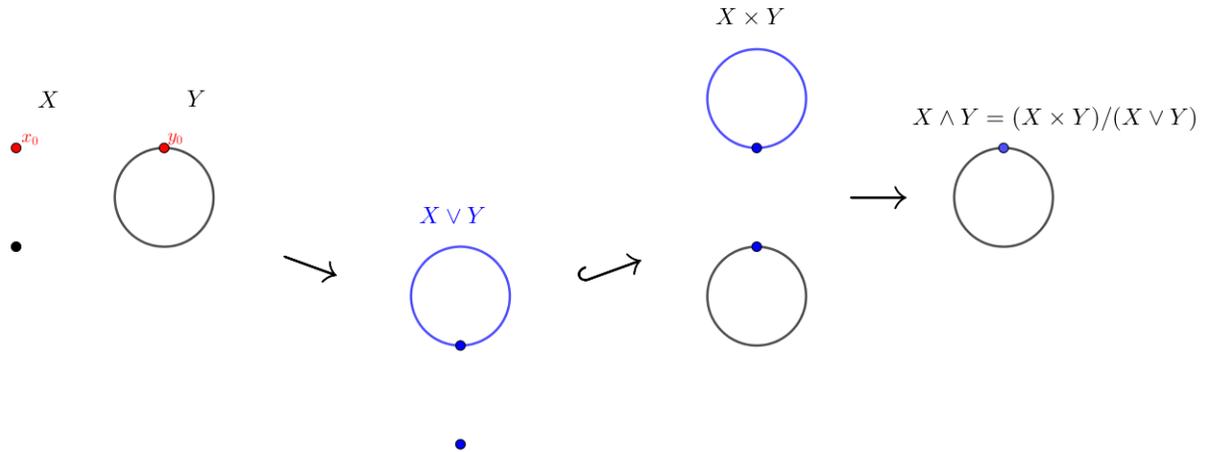


Figura 2.18: El producto smash de $X = \mathbb{S}^0$ y $Y = \mathbb{S}^1$. Primero tomamos el producto, identificamos una copia de $X \vee Y$ (marcada en azul) y colapsamos a un punto.

Observación 2.3.9. Al igual que la suma, el producto smash es compatible con el tipo de homotopía. Es decir se satisface la siguiente igualdad:

$$[X] \wedge [Y] = [X \wedge Y].$$

El ejemplo anterior es un caso particular de un enunciado más general, que no demostraremos:

Proposición 2.3.10.

$$\mathbb{S}^n \wedge \mathbb{S}^m \cong \mathbb{S}^{n+m}.$$

Y en general para cualquier X espacio punteado

$$X \wedge \mathbb{S}^0 \cong \mathbb{S}^0 \wedge X \cong X.$$

Como el nombre lo indica, el producto de índices va a estar asociado al producto de flujos. Hacemos la siguiente observación.

Observación 2.3.11. Si Γ, Δ son flujos, entonces el producto $\Gamma \times \Delta$ es un flujo con la operación natural $(\gamma, \delta) \cdot r = (\gamma \cdot r, \delta \cdot r)$.

Ahora sí, podemos hacer clara nuestra aplicación del producto smash.

Proposición 2.3.12. *Si S, S' son aislados e invariantes en dos flujos (locales) entonces su producto $S \times S'$ es aislado e invariante en el flujo producto. Además*

$$h(S \times S') = h(S) \wedge h(S').$$

Demostración. $S \times S'$ es invariante, pues es invariante en ambas componentes. El producto de vecindades aislantes también es una vecindad aislante, por lo que $S \times S'$ también es aislado. Ahora, supongamos que $(N_1, N_0), (N'_1, N'_0)$ son pares de índice para S y S' respectivamente. Consideramos

$$\begin{cases} M_1 = N_1 \times N'_1 \\ M_0 = \{(x, y) \in M_1 \mid x \in N_0 \text{ o } y \in N'_0\} = (N_0 \times N'_1) \cup (N_1 \times N'_0) \subset M_1. \end{cases}$$

Es claro que ambos conjuntos son compactos (por ser producto y unión de compactos), y que además forman un par de índice para $S \times S'$. Luego al pasar al cociente estamos colapsando la suma de los espacios (pues colapsamos N_0 y N'_0) y por tanto obtenemos el producto smash. \square

Ejemplo 2.3.13. Esto nos pudo haber servido para probar nuestro resultado del índice de Morse de otra manera: una vez llegado a la matriz

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array} \right)$$

tenemos que el flujo se puede descomponer en dos partes, la estable y la inestable. En la parte inestable es de la forma

$$x \cdot t = e^{I_k t} x = (e^t x_1, e^t x_2, \dots, e^t x_k)$$

que a su vez se descompone como el producto de los flujos $x_i \cdot t = e^t x_i$, pero el índice homotópico del origen en cada uno de estos es \mathbb{S}^1 , como muestra la figura:

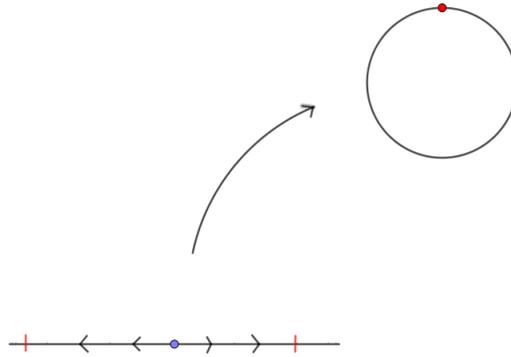


Figura 2.19: El índice homotópico del origen en el flujo $x_i \cdot t = e^t x_i$.

Por otro lado la parte inestable se descompone como el producto de flujos $x_i = e^{-t} x_i$ con $i = k, \dots, n$ y su índice homotópico es \mathbb{S}^0 :

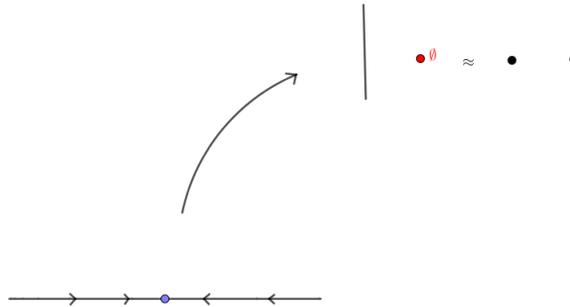


Figura 2.20: El índice homotópico del origen en el flujo $\dot{x} = -x$.

De dónde si S denota al producto de los orígenes $S = \{(0, \dots, 0)\}$ se tiene que

$$h(S) = \bigwedge_{i=1}^k \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^k.$$

Capítulo 3

Índice de Conley de una descomposición

Supongamos que tenemos una descomposición atractor-repulsor de un conjunto aislado e invariante S . Es decir, existen un atractor A y un repulsor R tales que todo punto está en A, R o bien una órbita que los conecta. ¿Existe alguna relación entre los índices homotópicos de A, R y S ? La respuesta es sí, y la relación está dada por la llamada sucesión coexacta de Puppe que estudiaremos en breve.

Esto se corresponde con la teoría de Morse. Existe un operador de frontera ∂ que a cada punto crítico de índice n le asocia la suma orientada de puntos críticos de índice $n - 1$ adyacentes a través del flujo, lo que da lugar a la *homología de Morse*.

3.1. La sucesión coexacta de Puppe

En esta sección asumiremos que los espacios son métricos o metrizable (en particular, compactamente generados).

Comenzamos con dos construcciones bastante importantes en la topología algebraica: La suspensión y el cono de un mapeo.

Definición 3.1.1 (Suspensión). Dado un espacio punteado X , definimos la *suspensión* de X , denotada por ΣX como el cociente

$$\Sigma X := (X \times [0, 1]) / ((X \times 0) \cup (X \times 1) \cup (x_0 \times [0, 1])).$$

Donde x_0 es el punto distinguido de X .

Observación 3.1.2. La suspensión como la definimos algunas veces se conoce como suspensión reducida ya que colapsamos el meridiano correspondiente a x_0 a un punto. En estos casos la suspensión se define como el cociente de $X \times [0, 1]$ por $X \times 0$ y $X \times 1$.

Ejemplo 3.1.3. Podemos ejemplificar el uso de la suspensión observando que la suspensión del disco es la bola en dimensión tres. Es decir $\Sigma D^2 \cong \overline{B_1(0)}$.

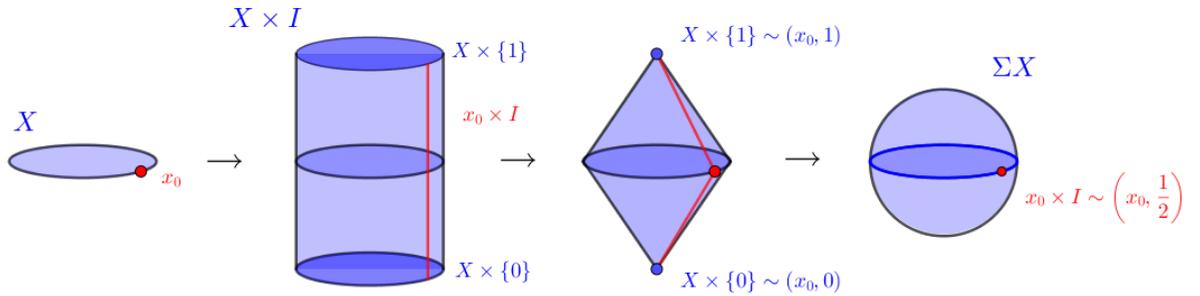


Figura 3.1: La suspensión del disco unitario es la bola cerrada de dimensión tres.

Definición 3.1.4 (Cono de una aplicación). Dada $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios punteados, definimos el *cono de f* denotado por T_f , como el cociente

$$T_f := \left((X \times [0, 1]) \amalg_f Y \right) / ((X \times 0) \cup (x_0 \times [0, 1]))$$

donde $(X \times [0, 1]) \amalg_f Y$ es la identificación de la unión ajena $(X \times [0, 1]) \amalg Y$ con $(x, 1) \sim f(x) \in Y$.

Observación 3.1.5. Notamos que tenemos una inclusión canónica $Y \hookrightarrow T_f$ dada por $y \mapsto y$.

Ejemplo 3.1.6. Consideramos $X = \mathbb{S}^1, Y = D^2$ y $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow D^2$ la inclusión estandar del círculo en el disco. Observamos que T_f es homeomorfo a una esfera:

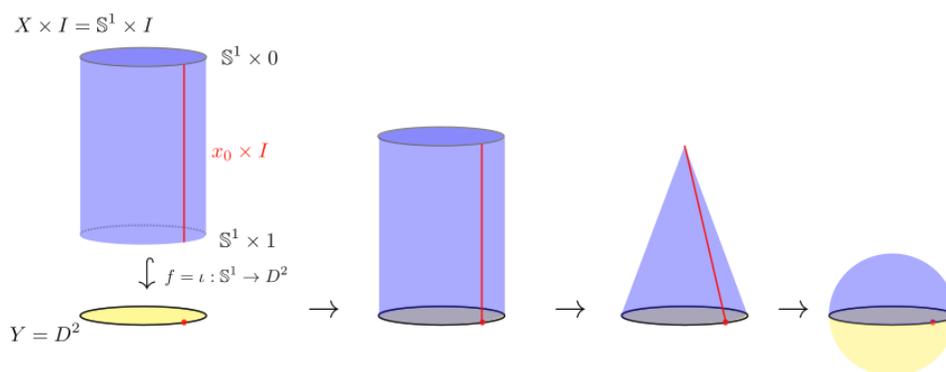


Figura 3.2: El cono sobre la inclusión $\iota : \mathbb{S}^1 \rightarrow D^2$ es homeomorfo a \mathbb{S}^2 .

El cono de una aplicación es relevante por la siguiente característica que tiene la inclusión $Y \hookrightarrow T_f$: Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow W$ son continuas, entonces $g \circ f \sim c$ (el único mapeo constante entre espacios punteados) si y sólo si existe $\beta : T_f \rightarrow W$ que resuelve el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & W \\ \downarrow & \nearrow \beta & \\ T_f & & \end{array}$$

Recordamos la siguiente definición:

Definición 3.1.7. Dados X, Y dos espacios topológicos punteados, denotamos por $[X; Y]$ al conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$.

Fijando W un espacio topológico punteado, una aplicación continua $\varphi : X \rightarrow Y$ induce un morfismo $\varphi^\# : [Y; W] \rightarrow [X; W]$ dado por $\varphi^\# : f \mapsto f \circ \varphi$. Definimos el kernel y la imagen de $\varphi^\#$ como

$$\ker \varphi^\# = \{[g] \in [Y; W] \mid g \circ \varphi \sim c : X \rightarrow W\},$$

$$\text{Im } \varphi^\# = \{[h \circ \varphi] \in [X; W] \mid [h] \in [Y; W]\}$$

dónde $c : X \rightarrow W$ es la única aplicación constante.

Diremos que una sucesión de espacios punteados

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \tag{3.1}$$

es *coexacta* si para cualquier espacio punteado W la sucesión

$$[X; W] \xleftarrow{\varphi^\#} [Y; W] \xleftarrow{\psi^\#} [Z; W]$$

es exacta: es decir si $\ker \varphi^\# = \text{Im } \psi^\#$.

Usando la construcción del cono, obtenemos la siguiente caracterización importante para que una sucesión sea coexacta. La demostración se puede encontrar en [Spa]

Proposición 3.1.8. *La sucesión 3.1*

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

es *coexacta* si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones

- $\psi \circ \varphi \sim c : X \rightarrow Z$, es decir el problema

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\psi} & Z \\ \downarrow & \nearrow & \\ T_\varphi & & \end{array}$$

tiene solución.

- Existe una aplicación $h : Z \rightarrow T_\varphi$ tal que $h \circ \psi \sim j : Y \hookrightarrow T_\varphi$, con j la inyección canónica.

Ahora, supongamos que tenemos un espacio punteado (X, x_0) subespacio cerrado de un espacio (Y, x_0) . Sea $\iota : X \rightarrow Y$ y $\pi : Y \rightarrow Y/X$ la inclusión y proyección canónicas, y consideremos la sucesión

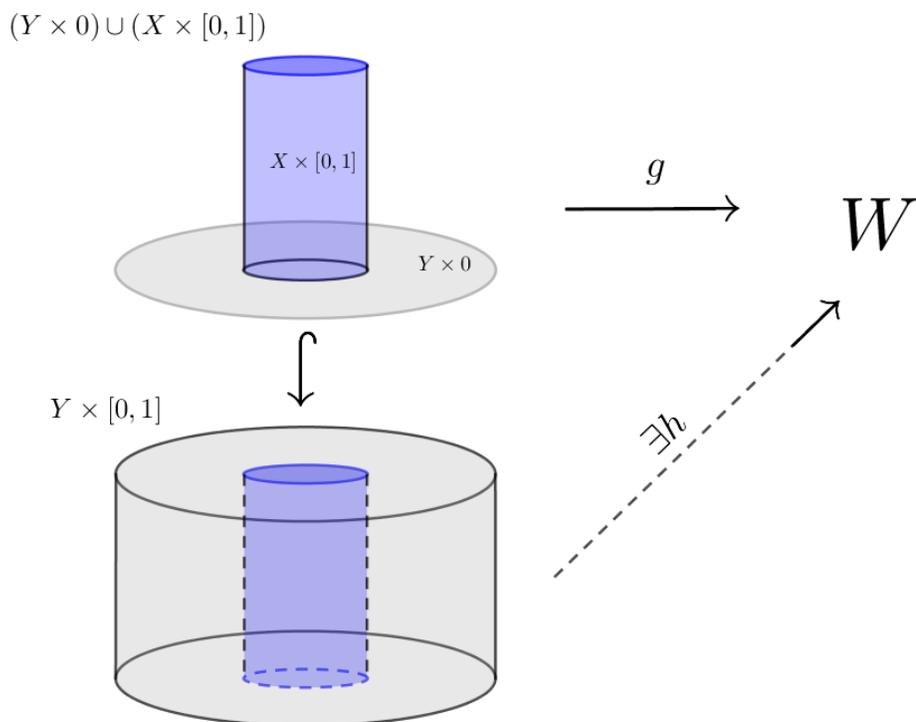
$$X \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{\pi} Y/X. \quad (3.2)$$

Entonces $\pi \circ \iota = c : X \rightarrow Y/X$, por lo que ya tenemos una de las dos condiciones de la proposición anterior. Para que se cumpla la segunda, basta que ι sea una *cofibración*.

Definición 3.1.9 (Cofibración). Una inclusión $\iota : X \hookrightarrow Y$ es una *cofibración* si para cualquier espacio W y cualquier aplicación continua $g : (Y \times 0) \cup (X \times [0, 1]) \rightarrow W$ el siguiente problema de levantamiento tiene solución:

$$\begin{array}{ccc} (Y \times 0) \cup (X \times [0, 1]) & \xrightarrow{g} & W \\ \downarrow & \nearrow h & \\ Y \times [0, 1] & & \end{array}$$

Esto se representa en el siguiente dibujo:



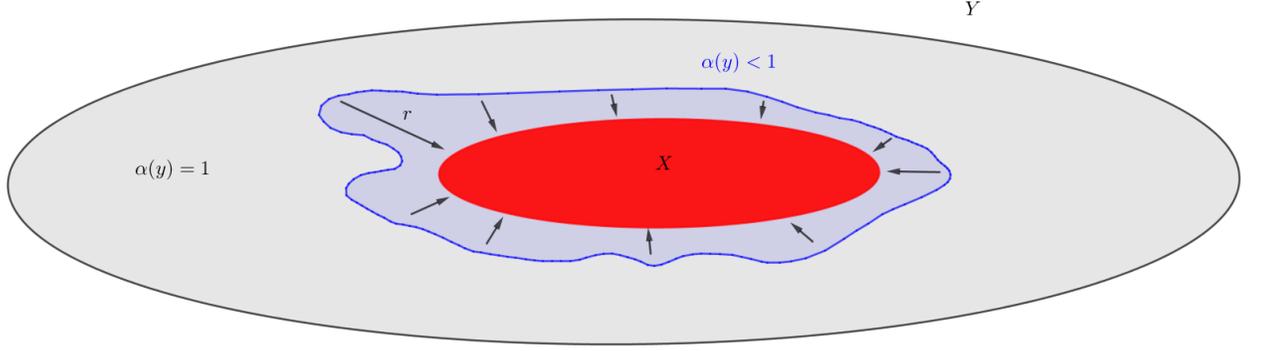
Como veremos más adelante, esta condición es equivalente a que el par (X, Y) sea un retracts por deformación de vecindad. Recordamos la definición:

Definición 3.1.10 (Par NDR). Sea Y un espacio topológico y $X \subset Y$ cerrado. Decimos que X es un *retracts por deformación de vecindad* de Y si existe $\alpha : Y \rightarrow [0, 1]$ y una homotopía $r : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ que cumplen:

- $\alpha(y) = 0$ si y sólo si $y \in X$ (es decir $\alpha^{-1}(0) = X$),
- $r(y, 0) = y$ para todo $y \in Y$,
- $r(x, t) = x$ para todo $x \in X$ y cualquier $t \in [0, 1]$,
- $r(y, 1) \in X$ para todo y con $\alpha(y) < 1$

Abreviaremos esto diciendo que (X, Y) es un par *NDR* (del inglés "Neighbourhood Deformation Retract").

Un par NDR tiene entonces la información de una vecindad de X , en particular todos los $y \in Y$ tales que $\alpha(y) < 1$, que se deforma por retracción a X . Esto se representa en la siguiente figura.



Si X, Y es un par NDR y α, r son como en la definición 3.1.10 entonces la función

$$G : Y \times [0, 1] \rightarrow (Y \times 0) \cup (X \times [0, 1])$$

definida por

$$G(y, \sigma) = \begin{cases} (r(y, 1), \sigma - 2\alpha(y)), & 0 \leq \alpha(y) \leq \frac{\sigma}{2}, \\ \left(r(y, 2 - 2\frac{\alpha(y)}{\sigma}), 0\right), & \frac{\sigma}{2} < \alpha(y) < \sigma, \\ (y, 0), & \sigma \leq \alpha(y) \leq 1, \end{cases}$$

es continua y satisface $G(y, 0) = (y, 0)$ y $G(x, \sigma) = (x, \sigma)$ para cualquier $y \in Y$, $x \in X$, $\sigma \in [0, 1]$. El siguiente resultado da equivalencias útiles de la definición de par NDR .

Proposición 3.1.11. *Sea (X, x_0) sea un subespacio cerrado de un espacio métrico (Y, x_0) . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\iota : X \rightarrow Y$ es una cofibración.
2. Existe una función continua $G : Y \times [0, 1] \rightarrow (Y \times 0) \cup (X \times [0, 1])$ tal que $G(y, 0) = (y, 0)$ y $G(x, \sigma) = (x, \sigma)$ para $x \in X, y \in Y, \sigma \in [0, 1]$.
3. X, Y es un par NDR .

Si se satisface cualquiera de estas condiciones, la sucesión 3.2 es coexacta.

Ahora enunciamos el teorema de la sucesión coexacta de Puppe. Este más adelante nos permitirá relacionar los varios índices en una descomposición atractor-repulsor.

Teorema 3.1.12. *Sea (X, x_0) un subespacio cerrado del espacio métrico (Y, x_0) . Supongamos que X, Y es un par NDR y sean $r : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ y $\alpha : Y \rightarrow [0, 1]$ como en la definición 3.1.10. Sea $\delta : Y/X \rightarrow \Sigma X$ definido por*

$$\delta([y]) = \begin{cases} (r(y, 1), 1 - 2\alpha(y)) & 0 < \alpha(y) < \frac{1}{2} \\ [X \times 0] & \text{de otra manera} \end{cases}$$

para $y \in Y$. Entonces la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\iota} & Y & \xrightarrow{\pi} & Y/X & \longrightarrow & \\ & & & & \delta & & \\ \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma\iota} & \Sigma Y & \xrightarrow{\Sigma\pi} & \Sigma(Y/X) & \longrightarrow & \\ & & & & \Sigma\delta & & \\ \Sigma(\Sigma X) & \xrightarrow{\Sigma(\Sigma\iota)} & \Sigma(\Sigma Y) & \xrightarrow{\Sigma(\Sigma\pi)} & \Sigma(\Sigma(Y/X)) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

es coexacta.

Demostración. Usaremos con frecuencia la Proposición 3.1.8.

Sea $\eta_X : (Y \times 0) \cup (X \times [0, 1]) \rightarrow \Sigma X$ la proyección que colapsa $(Y \times 0) \cup (x_0 \times [0, 1]) \cup (X \times 1)$ a un punto. Entonces $\eta_X \circ G(y, 0) = c$ es el morfismo constante y $\eta_X \circ G(y, 1) = \delta \circ \pi$ por construcción. Así definida, $\eta_X \circ G$ define una homotopía entre c y $\delta \circ \pi$.

Sea $j : \Sigma X \rightarrow T_\pi$ la inclusión canónica y $k : Y/X \rightarrow T_\pi$ dada por

$k([y]) = [y, 1]$. Observamos que $j \circ \delta \sim k : Y/X \rightarrow T_\pi$, a través de la homotopía $H : Y/X \times [0, 1] \rightarrow T_\pi$ dada por

$$H([y], \sigma) = \begin{cases} [r(y, 1), 1 - 2\alpha(y)], & 0 \leq \alpha(y) \leq \frac{\sigma}{2}, \\ [r\left(y, 2 - 2\frac{\alpha(y)}{\sigma}\right), 1 - \sigma], & \frac{\sigma}{2} < \alpha(y) < \sigma, \\ [y, 1 - \sigma], & \sigma \leq \alpha(y) \leq 1. \end{cases}$$

Por nuestra caracterización en la Proposición 3.1.8 la sucesión $Y \rightarrow Y/X \rightarrow \Sigma X$ es coexacta.

3.2. Pares regulares

Para poder aplicar la sucesión coexacta de Puppe, necesitamos pares de índice 'suficientemente bonitos'. Estos se conocen como *pares regulares* y como probaremos a continuación todo par de índice se puede deformar en uno regular.

Definición 3.2.1 (Par regular). Un par de índice (N_1, N_0) para un conjunto aislado S de un flujo local $X \subset \Gamma$ es *regular* si la función $\tau : N_1 \rightarrow [0, \infty]$ definida por

$$\tau(\gamma) = \begin{cases} \sup\{t > 0 \mid \gamma \cdot [0, t] \subset N_1 \setminus N_0\}, & \gamma \in N_1 \setminus N_0, \\ 0, & \gamma \in N_0 \end{cases}$$

es continua.

No cualquier par de índice es regular, como muestra el siguiente dibujo.

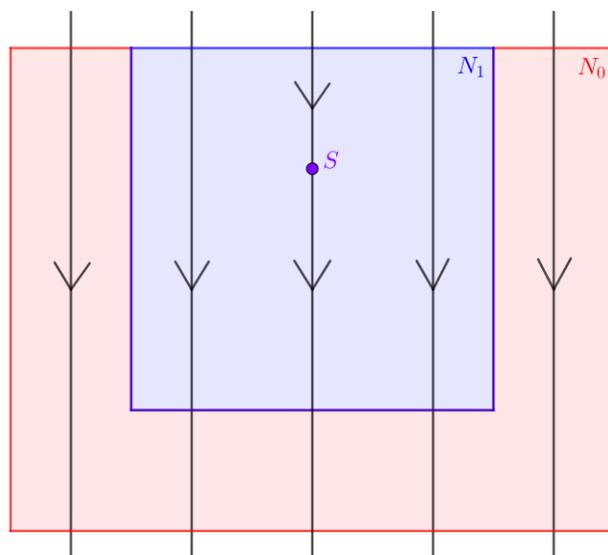


Figura 3.3: Un par de índice que no es regular.

El siguiente lema nos da una condición suficiente para que un par de índice sea regular:

Lema 3.2.2. Sea (N_1, N_0) un par de índice para el conjunto aislado e invariante S en el flujo local X . Si para cualquier $\varepsilon > 0$ y todo $\gamma \in N_0$ se cumple que $\gamma \cdot [0, \varepsilon] \not\subset \overline{N_1 \setminus N_0}$ entonces el par (N_1, N_0) es regular.

Demostración. Sea $\tau : N_1 \rightarrow [0, \infty]$ como en la definición 3.2.1 y sea $\gamma \in N_1$.

Caso 1: Si $0 < \tau(\gamma) \leq \infty$, escojamos $T \in (0, \tau(\gamma))$. Así, por definición, $\gamma \cdot [0, T] \subset N_1 \setminus N_0$ y entonces existe una vecindad U de γ en Γ tal que $U \cdot [0, T] \cap N_0 = \emptyset$. Así $\gamma' \cdot [0, T] \subset N_1 \setminus N_0$ para todo $\gamma' \in U \cap N_1$ y por tanto $\tau(\gamma') > T$ para todo $\gamma' \in U \cap N_1$.

Caso 2: Supongamos ahora que $0 \leq \tau(\gamma) < \infty$ y sea $T \in (\tau(\gamma), \infty)$. Entonces $\gamma \cdot \tau(\gamma) \in N_0$ y por hipótesis $\gamma \cdot t \notin \overline{N_1 \setminus N_0}$ para algún $t \in [\tau(\gamma), T]$. Esto implica que existe una vecindad U de γ en Γ con $U \cdot t \cap \overline{N_1 \setminus N_0} = \emptyset$. Concluimos que $\tau(\gamma') \leq t \leq T$ para todo $\gamma' \in U \cap N_1$. Queda probada la continuidad de τ . \square

Vamos a ver que cualquier par de índice se puede deformar en uno regular (aquí es importante notar que seguimos trabajando en espacios métricos).

Lema 3.2.3. *Sea (N_1, N_0) un par de índice para el conjunto aislado e invariante S en un flujo local métrico $X \subset \Gamma$. Entonces existe una función continua $g : N_1 \rightarrow [0, 1]$ tal que*

$$\blacksquare \quad g(\gamma) = 1 \Leftrightarrow \gamma \cdot [0, \infty) \subset N_1 \text{ y } \omega(\gamma) \subset S, \quad (3.3)$$

$$\blacksquare \quad g(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma \in N_0 \quad (3.4)$$

$$\blacksquare \quad \text{Si } t > 0, 0 < g(\gamma) < 1, \gamma \cdot [0, t] \subset N_1 \text{ entonces } g(\gamma \cdot t) < g(\gamma). \quad (3.5)$$

A dicha función le llamaremos función de Lyapunov.

Demostración. Construimos la función g en 3 pasos a través de 2 funciones auxiliares: l y k .

1. *Construcción de l :* Sea $l : N_1 \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$l(\gamma) = \frac{d(\gamma, N_0)}{d(\gamma, N_0) + d(\gamma, S)}$$

donde d es la métrica de X . La función l es continua y cumple que $N_0 = l^{-1}(0)$ y $S = l^{-1}(1)$.

2. *Construcción de k* : La función $k : N_1 \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$k(\gamma) = \sup\{l(\gamma \cdot t) \mid t \geq 0, \gamma \cdot [0, t] \subset N_1\} \quad (3.6)$$

es continua y cumple

- (i) $k(\gamma) = 1 \Leftrightarrow \gamma \cdot [0, \infty) \subset N_1, \omega(\gamma) \subset S$,
- (ii) $k(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma \in N_0$,
- (iii) si $\gamma \cdot [0, t] \subset N_1$ entonces $k(\gamma \cdot t) \leq k(\gamma)$.

Primero demostraremos que k es continua.

Sea $\gamma \in N_1$. Asumamos primero que $0 < k(\gamma) \leq 1$ y escojamos $\varepsilon \in (0, k(\gamma))$. Entonces existe una $t > 0$ tal que $\gamma \cdot [0, t] \subset N_1$ y $l(\gamma \cdot t) > k(\gamma) - \varepsilon$. Luego $\gamma \cdot [0, t] \subset N_1 \setminus N_0$ y entonces existe una vecindad U de γ en Γ tal que $U \cdot [0, t] \cap N_0 = \emptyset$ (por continuidad del flujo) y $l(\gamma' \cdot t) > k(\gamma) - \varepsilon$ para todo $\gamma' \in U \cap N_1$. Esto implica que $k(\gamma') > k(\gamma) - \varepsilon$ para todo $\gamma' \in U \cap N_1$. Queda mostrado que $k(\gamma) - k(\gamma') < \varepsilon$.

En segundo lugar, supondremos que $0 \leq k(\gamma) < 1$ y esta vez escojemos $\varepsilon \in (0, 1 - k(\gamma))$. Más aún, supongamos que existe una sucesión $\gamma_n \in N_1$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$ y $k(\gamma_n) > k(\gamma) + \varepsilon$ para toda n . Entonces existe una sucesión $t_n \geq 0$ tal que $\gamma \cdot [0, t_n] \subset N_1 \setminus N_0$ y $l(\gamma_n \cdot t_n) > k(\gamma) + \varepsilon$. La sucesión t_n tiene que estar acotada, ya que de otra forma tendríamos que $\gamma \cdot [0, \infty) \subset N_1 \setminus N_0$, lo que contradiría que $k(\gamma) < 1$. Entonces la sucesión t_n tiene que tener un punto de acumulación t' y obtenemos $\gamma \cdot [0, t'] \subset N_1 \setminus N_0$ y $l(\gamma \cdot t') \geq k(\gamma) + \varepsilon$, otra contradicción. Concluimos que tiene que existir una vecindad U de $\gamma \in \Gamma$ tal que $k(\gamma') \leq k(\gamma) + \varepsilon$ para todo $\gamma' \in U \cap N_1$. Esto demuestra que $k(\gamma) - k(\gamma') > -\varepsilon$ y por tanto la continuidad de k .

Pasemos a demostrar las diferentes propiedades de k .

Demostración de (iii): si $\gamma \cdot [0, t] \subset N_1$ entonces tenemos que

$$\{l((\gamma \cdot t) \cdot s) \mid s \geq 0, (\gamma \cdot t) \cdot [0, s] \subset N_1\} \subset \{l(\gamma \cdot s) \mid s \geq 0, \gamma \cdot [0, s] \subset N_1\}$$

por lo que el supremo del conjunto del lado izquierdo es inferior al supremo del conjunto del lado derecho, es decir $k(\gamma \cdot t) \leq k(\gamma)$.

Demostración de (ii): al ser el supremo de un conjunto de números positivos, la única manera en la que $k(\gamma) = 0$ es si $l(\gamma \cdot t) = 0$ para todo $t \geq 0$ tal que $\gamma \cdot [0, t] \subset N_1$, pero dado que $l^{-1}(0) = N_0$, esto es equivalente a que $\gamma \in N_0$.

Demostración de (i): verifiquemos que $k(\gamma) = 1$ si y sólo si $\gamma \cdot [0, \infty) \subset N_1$ y $\omega(\gamma) \subset S$.

Si γ es tal que $k(\gamma) = 1$ pero existiese un t_0 tal que $\gamma \cdot [0, t_0) \not\subset N_1$ entonces por compacidad de N_1 podemos asumir que existe un t' tal que $\gamma \cdot [0, t'] \subset N_1$ y que para todo $t \geq t'$, $\gamma \cdot t \notin N_1$. Entonces el supremo en la definición de k se toma sobre un compacto, y la única manera en la que sería 1 es si $\gamma \in S$, pero en ese caso $\gamma \cdot [0, \infty) \subset S \subset N_1$, una contradicción. Luego $\omega(\gamma)$ existe y es invariante, por tanto $\omega(\gamma) \subset S$.

Por otro lado, si $\gamma \cdot [0, \infty) \subset N_1$ y $\omega(\gamma) \subset S$, tenemos que el supremo de los valores de l es arbitrariamente cercano a 1 (por definición de ω) y así $k(\gamma) = 1$.

3. *Construcción de g* : sea

$$\hat{t}(\gamma) = \sup\{t > 0 \mid \gamma \cdot [0, t] \subset N_1\}.$$

Entonces la función $g : N_1 \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$g(\gamma) = \int_0^{\hat{t}(\gamma)} e^{-\xi} k(\gamma \cdot \xi) d\xi$$

satisface los requisitos del lema.

Las condiciones (3.3) y (3.4) se satisfacen ya que se cumplen para k . Solo tenemos que verificar (3.5), tomando $\gamma \in N_1$ con $0 < g(\gamma) < 1$ y suponiendo que

$$0 < t \leq t^* = \sup\{\xi > 0 \mid \gamma \cdot [0, \xi] \subset N_1 \setminus N_0\} < \infty.$$

Entonces

$$\begin{aligned} g(\gamma \cdot t) &= \int_0^{t^*-t} e^{-\xi} k(\gamma \cdot (t + \xi)) d\xi \\ &\leq \int_0^{t^*-t} e^{-\xi} k(\gamma \cdot \xi) d\xi \\ &< \int_0^{t^*} e^{-\xi} k(\gamma \cdot \xi) d\xi = g(\gamma). \end{aligned}$$

Para terminar, tenemos que verificar que g es continua. Sea $\gamma \in N_1$ cualquiera. Si $\gamma \in N_0$ entonces usando que $g(\gamma') \leq k(\gamma')$ para todo $\gamma' \in N_1$ concluimos que, por continuidad de k , g es continua. Si $\gamma \cdot [0, \infty) \subset N_1 \setminus N_0$ entonces tenemos la desigualdad

$$|g(\gamma') - g(\gamma)| \leq \int_0^T |k(\gamma' \cdot \xi) - k(\gamma \cdot \xi)| d\xi + \int_T^\infty e^{-\xi} d\xi$$

para $T \leq \hat{t}(\gamma')$.

Dado $T \geq 0$ afirmamos que existe una vecindad U de γ tal que para todo $\gamma' \in U$, $\hat{t}(\gamma') \geq T$. En efecto, si no fuera así existiría una sucesión $\gamma_k \rightarrow \gamma$ y $0 \leq t_k \leq T$ una sucesión acotada por T tal que $\gamma_k \cdot t_k \in N_0$ para todo k . Por estar acotada, t_k tiene un punto de acumulación. Podemos entonces asumir que $t_n \rightarrow t_1$ para algún t_1 . Pero entonces $\gamma_n \cdot t_n \rightarrow \gamma \cdot t_1 \in N_0$ por ser N_0 compacto. Esto contradice que $\gamma \cdot [0, \infty) \subset N_1 \setminus N_0$. Luego, dado $\varepsilon > 0$ podemos escoger T suficientemente grande de manera que

$$\int_T^\infty e^{-\xi} d\xi = e^{-T} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, habiendo fijado T , la función $\gamma \mapsto \int_0^T k(\gamma \cdot \xi) d\xi$ es continua, por lo que podemos escoger una vecindad U' de γ tal que para toda $\gamma' \in U'$ se cumpla que

$$\int_0^T |k(\gamma \cdot \xi) - k(\gamma' \cdot \xi)| d\xi < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego en $U \cap U'$ se cumple que

$$|g(\gamma') - g(\gamma)| < \varepsilon.$$

Finalmente si $\gamma \in N_1 \setminus N_0$ y $\gamma \cdot [0, \infty) \cap N_0 \neq \emptyset$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una $T > 0$ tal que $\gamma \cdot [0, T] \subset N_1 \setminus N_0$ y $k(\gamma \cdot T) < \varepsilon$. Entonces la desigualdad siguiente se cumple para todos los $\gamma' \in N_1$ tales que $\gamma' \cdot [0, T] \subset N_1 \setminus N_0$ y $k(\gamma' \cdot T) < 2\varepsilon$:

$$|g(\gamma) - g(\gamma')| \leq \int_0^T |k(\gamma' \cdot \xi) - k(\gamma \cdot \xi)| d\xi + 3\varepsilon.$$

Entonces la continuidad se sigue de la continuidad de k y queda demostrado el lema.

□

Podemos dibujar las curvas de nivel de la función g en nuestro ejemplo:

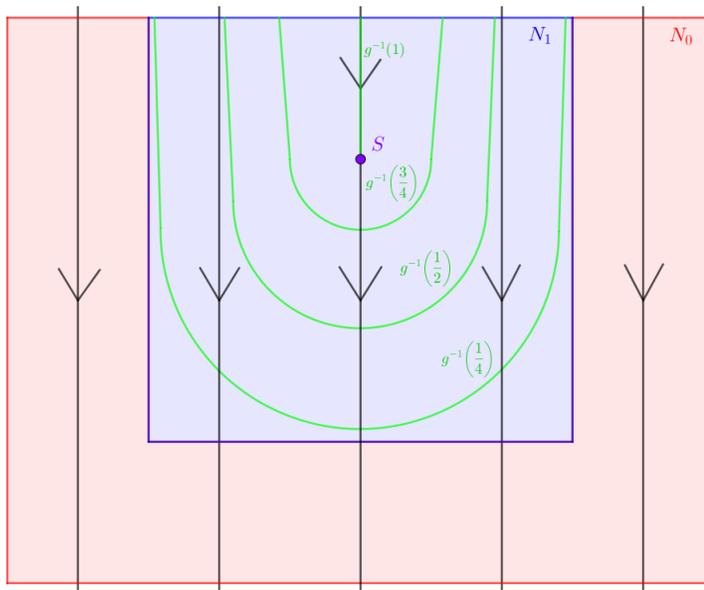


Figura 3.4: Las curvas de nivel de $g : N_1 \rightarrow [0, 1]$.

Concluimos esta parte sobre pares regulares con un resultado clave:

Proposición 3.2.4. *Si (N_1, N_0) es un par de índice para S en un flujo local métrico X con $\varepsilon < 1$ y $g : N_1 \rightarrow [0, 1]$ la función de Lyapunov del lema previo, reemplazando a N por N_ε con $N_\varepsilon = \{\gamma \in N_1 \mid g(\gamma) \leq \varepsilon\}$ entonces (N_1, N_ε) es un par de índice regular para S en X .*

Demostración. Primero verificamos que (N_1, N_ε) es un par de índice para S .

- Tenemos que $S \subset g^{-1}(1) \subset g^{-1}[1 - \varepsilon, 1] \subset \text{int } \overline{N_1} \setminus N_\varepsilon$.
- Si $\gamma \in N_\varepsilon$ y $t \geq 0$ es tal que $\gamma \cdot [0, t] \subset N_1$, entonces $g(\gamma \cdot t) \leq g(\gamma) = \varepsilon$ y se sigue que $\gamma \cdot t \in N_\varepsilon$.
- Si $\gamma \in N_1$ y $\gamma \cdot [0, \infty) \not\subset N_1$, entonces existe $t \geq 0$ con $\gamma \cdot [0, t] \subset N_1$ y $\gamma \cdot t \in N_0 \subset N_\varepsilon$.

Para verificar que es regular podemos usar el lema 3.2.2. Sea $\delta > 0$ y $\gamma \in N_\varepsilon$. Supongamos que $\gamma \cdot [0, \delta] \subset N_1$. Entonces si $g(\gamma) > 0$:

$$g(\gamma \cdot [0, \delta]) < g(\gamma) \leq \varepsilon.$$

Es decir, $\gamma \cdot [0, \delta] \subset g^{-1}[0, \varepsilon] \not\subset \overline{N_1} \setminus N_\varepsilon$. Si $g(\gamma) = 0$ (es decir si $\gamma \in N_0$) el resultado sigue la misma demostración. \square

Regresando a nuestro ejemplo, N_ε se representa como sigue:

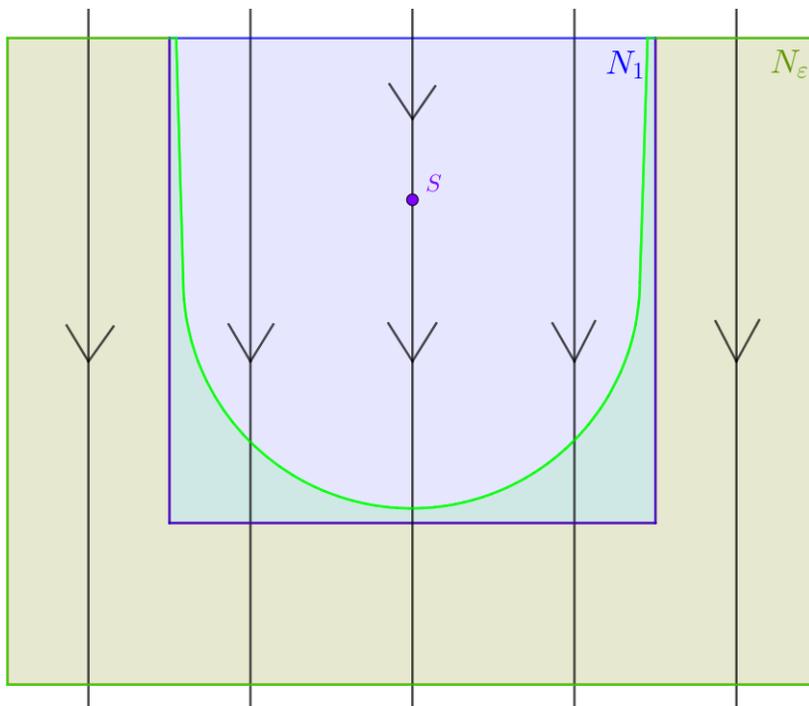


Figura 3.5: El nuevo par (N_1, N_ε) con N_ε marcado en verde.

3.3. La sucesión coexacta de un par atractor-repulsor

Recordamos que un conjunto aislado e invariante S tiene una descomposición atractor-repulsor (A, R) si A es un atractor en S , R un repulsor y todo punto $\gamma \in S$ es tal que $\gamma \in A \cup R$ o bien $\omega(\gamma) \subset A, \alpha(\gamma) \subset R$ (es decir, γ está en una órbita que 'empieza' en R y 'termina' en A).

Sea S un conjunto aislado e invariante en un flujo local métrico $X \subset \Gamma$, sea (A, R) una descomposición atractor-repulsor de S . Sabemos, por la existencia de pares de

índice que existe una filtración $N_0 \subset N_1 \subset N_2$ de conjuntos compactos tales que (N_2, N_0) sea un par de índice para S , (N_1, N_0) un par de índice para A y (N_2, N_1) un par de índice para R . Por la proposición 3.2.4 podemos suponer, sin pérdida de generalidad que (N_2, N_1) es regular. Por tanto la función $\tau : N_2 \rightarrow [0, \infty]$ dada por

$$\tau(\gamma) = \begin{cases} \sup\{t > 0 \mid \gamma \cdot [0, t] \subset N_2 \setminus N_1\}, & \gamma \in N_2 \setminus N_1 \\ 0, & \gamma \in N_1, \end{cases}$$

para $\gamma \in N_2$ es continua. Además, el par de espacios punteados $N_2/N_0, N_1/N_0$ con la inclusión $\iota : N_1/N_0 \rightarrow N_2/N_0$ es un par NDR : si ρ es un real positivo, construyendo las funciones $r : N_2/N_0 \times [0, 1] \rightarrow N_2/N_0$ y $\alpha : N_2/N_0 \rightarrow [0, 1]$ definidas por

$$r([\gamma], \sigma) = \begin{cases} [\gamma \cdot \sigma\tau(\gamma)], & 0 \leq \tau(\gamma) \leq \rho \\ [\gamma \cdot \sigma\rho], & \rho \leq \tau(\gamma) \leq \infty, \end{cases}$$

$$\alpha([\gamma]) = \begin{cases} \frac{\tau(\gamma)}{\rho}, & 0 \leq \tau(\gamma) \leq \rho \\ 1, & \rho \leq \tau(\gamma) \leq \infty \end{cases}$$

se cumplen las hipótesis del par NDR . En particular, podemos escoger $\rho = 2$ (ya que simplifica las expresiones) y tenemos un morfismo de conexión (que ya construimos antes para pares NDR arbitrarios)

$$\delta : N_2/N_1 \rightarrow \Sigma N_1/N_0$$

dado por

$$\delta([\gamma]) = \begin{cases} [\gamma \cdot \tau(\gamma), 1 - \tau(\gamma)], & 0 \leq \tau(\gamma) \leq 1 \\ [N_0 \times 0], & 1 \leq \tau(\gamma) \leq \infty, \end{cases}.$$

Entonces aplicando la sucesión coexacta de Puppe tenemos el siguiente resultado

Teorema 3.3.1. *Sea (A, R) una descomposición atractor-repulsor de S en el flujo local métrico X . Sea $N_0 \subset N_1 \subset N_2$ una filtración tal que $(N_2, N_0), (N_1, N_0)$ son pares de índice para S y A respectivamente y (N_2, N_1) un par de índice regular para R . Sean $\iota : N_1/N_0 \rightarrow N_2/N_0$ y $\pi : N_2/N_0 \rightarrow N_2/N_1$ la inclusión y proyección naturales.*

Tenemos entonces un morfismo de conexión δ que hace coexacta a la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc}
 N_1/N_0 & \xrightarrow{\iota} & N_2/N_0 & \xrightarrow{\pi} & N_2/N_1 & \longrightarrow & \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & \delta & & & \\
 \longrightarrow & \Sigma N_1/N_0 & \xrightarrow{\Sigma\iota} & \Sigma N_2/N_0 & \xrightarrow{\Sigma\pi} & \Sigma N_2/N_1 & \longrightarrow \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & \Sigma\delta & & & \\
 \longrightarrow & \Sigma(\Sigma(N_1/N_0)) & \longrightarrow & \dots & & &
 \end{array}$$

Pasando al tipo de homotopía:

Corolario 3.3.2. *Tenemos una sucesión coexacta*

$$\begin{array}{ccccccc}
 h(A) & \longrightarrow & h(S) & \longrightarrow & h(R) & \longrightarrow & \\
 & & & & & \searrow & \\
 \longrightarrow & \Sigma h(A) & \longrightarrow & \Sigma h(S) & \longrightarrow & \Sigma h(R) & \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Ejemplo 3.3.3. Calculemos la sucesión coexacta del Corolario 3.3.2.

Supongamos que tenemos el siguiente flujo en \mathbb{S}^1 , dado por el gradiente negativo de la función altura $h : (x, y) \mapsto y$.

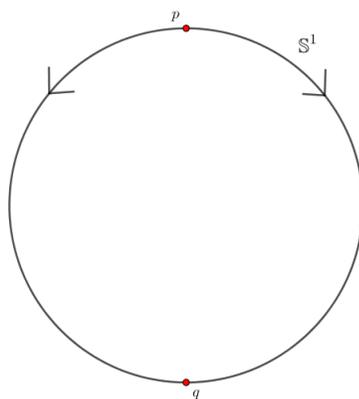


Figura 3.6: El flujo gradiente negativo de la función altura en el círculo.

Es claro que si $S = \mathbb{S}^1$, S es aislado e invariante y tiene una descomposición atractor-repulsor, con atractor q y repulsor p . Podemos considerar entonces a \mathbb{S}^1 , a N una vecindad compacta de q que excluya a p y al conjunto vacío. Es decir tenemos

una filtración $\emptyset \subset N \subset \mathbb{S}^1$ (como se puede ver en la figura que sigue).

Primero calculamos los índices de Conley de cada miembro de la descomposición:

- $h(p) = \mathbb{S}^1/N_1 \cong \mathbb{S}^1$.

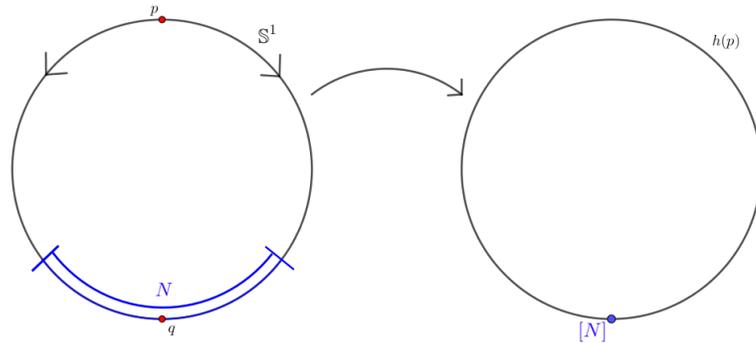


Figura 3.7: El índice homotópico del punto p .

- $h(q) = N/\emptyset \cong \mathbb{S}^0$.
- $h(S) = \mathbb{S}^1/\emptyset \cong \mathbb{S}^1 \coprod \{*\}$.

Resumimos la información en la siguiente tabla: usamos la notación N_1, N_0 para hacer referencia al par de índice de cada conjunto invariante aislado.

	N_1	N_0	N_1/N_0	h
p	\mathbb{S}^1	N	\mathbb{S}^1	\mathbb{S}^1
q	N	\emptyset	$N \sqcup \{*\}$	\mathbb{S}^0
S	\mathbb{S}^1	\emptyset	$\mathbb{S}^1 \sqcup \{*\}$	$\mathbb{S}^1 \sqcup \{*\}$

Podemos representar la sucesión coexacta de Puppe como sigue:

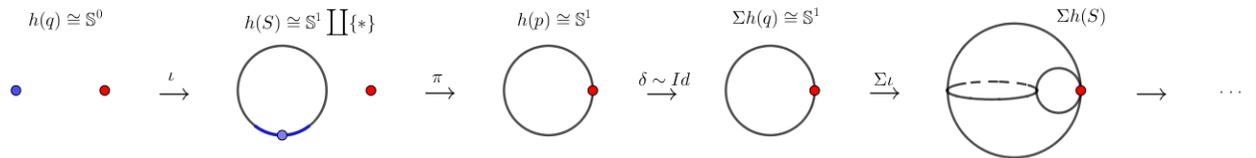


Figura 3.8: La sucesión larga de la descomposición del flujo en \mathbb{S}^1 .

También existe una perspectiva centrada en grupos de homología y cohomología. Recordamos los siguientes teoremas:

¿Quién es el morfismo $f_2 : CH_1(S) \rightarrow CH_1(p)$? El primer grupo de homología está generado por el círculo, al que luego solo le apachurramos un arco y pegamos un punto. De otra manera, mandamos al generador en homología a un generador de homología. Escogiendo orientaciones adecuadas tenemos que el morfismo es solo la identidad de \mathbb{Z} en \mathbb{Z} .

Para encontrar el morfismo $\partial : CH_1(p) \rightarrow CH_0(q)$ tenemos que δ era homotópico a la identidad, sin embargo, al pasar a homología reducida, como es el caso, estamos anulando el generador que corresponde a la componente conexa del punto distinguido. Es decir tenemos el morfismo cero de \mathbb{Z} en \mathbb{Z} .

Finalmente, para $g_2 : CH_0(q) \rightarrow CH_0(S)$ vemos que mandamos al generador en el generador, por lo que (de nuevo, tomando en cuenta la orientación) tenemos el morfismo identidad.

Así, tenemos la sucesión

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 .$$

Como mencionamos antes, el operador δ es un operador 'de frontera'. Esto se puede entender a través del siguiente teorema.

Teorema 3.3.6. *Sea (A, R) una descomposición atractor-repulsor de S aislado e invariante en un flujo métrico local X , y supongamos que $S = A \cup R$, es decir, que no hay orbitas conectantes entre A y R . Entonces δ es homotópico al morfismo constante.*

Demostración. Si $S = A \cup R$, entonces existe una filtración $N_0 \subset N_1 \subset N_2$ en X tal que (N_2, N_0) y (N_1, N_0) son pares de índice para S y A respectivamente, y (N_2, N_1) es un par de índice regular para R . Afirmamos que existe $T > 0$ tal que si $\gamma \cdot [-T, 0] \subset \overline{N_2} \setminus \overline{N_1}$ y si $\gamma \in N_1$ entonces $\gamma \cdot [0, T] \cap N_0 \neq \emptyset$.

En efecto, si no existiera dicho tiempo existirían sucesiones $\gamma_n \in N_1$, $t_n > 0$ tales que t_n diverge y $\gamma_n \cdot [-t_n, 0] \subset \overline{N_2} \setminus \overline{N_1}$ y $\gamma_n \cdot [0, t_n] \cap N_0 = \emptyset$. Por compacidad, γ_n tendría un punto de acumulación γ y este cumpliría $\gamma \cdot (-\infty, 0] \subset \overline{N_2} \setminus \overline{N_1}$ y $\gamma \cdot [0, \infty) \subset \overline{N_1} \setminus \overline{N_0}$. Pero entonces $\alpha(\gamma) \subset R$, $\omega(\gamma) \subset A$ y $\gamma \cdot \mathbb{R} \subset \overline{N_2} \setminus \overline{N_0}$ y entonces existiría una órbita conectante entre A y R . Esto contradice nuestra hipótesis, puesto que estamos asumiendo que $S = A \cup R$.

Sea $\delta : N_2/N_1 \rightarrow \Sigma N_1/N_0$ el morfismo de conexión como lo definimos. Construimos las familias de funciones $\delta_t : N_2/N_1 \rightarrow \Sigma N_1/N_0$ y $f_t : N_1/N_0 \rightarrow N_1/N_0$ como sigue:

$$\delta_t([\gamma]) = \begin{cases} [\gamma \cdot \tau(\gamma), t + 1 - \tau(\gamma)] & t < \tau(\gamma) < t + 1, \\ [N_0 \times 0] & \text{de otra manera,} \end{cases}$$

$$f_t([\gamma]) = \begin{cases} [\gamma \cdot t], & \gamma \cdot [0, t] \subset N_1 \setminus N_0, \\ [N_0], & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Dónde $t \leq T$. Notamos que $\delta_0 = \delta$, f_0 es la identidad, mientras que f_T es la constante $[N_0]$. Luego tenemos una homotopía $(\Sigma f_t) \circ \delta_t$ entre $(\Sigma f_0) \circ \delta_0 = \delta$ y $(\Sigma f_T) \circ \delta_T = c$. \square

Corolario 3.3.7. *Si S tiene una descomposición atractor-repulsor A, R y δ no es homotópico a la constante entonces existen órbitas de conexión entre A y R .*

La teoría de conexión se puede generalizar a descomposiciones de Morse arbitrarias y 'matrices de conexión'. Para más información se puede consultar [Handbook].

Capítulo 4

Perturbaciones del flujo y su índice de Conley

El propósito de este capítulo es exponer de manera formal a lo que nos referimos con 'perturbar el flujo', y ver que el índice de Conley es invariante bajo pequeñas perturbaciones. En la primera parte desarrollaremos el mecanismo detrás de flujos que varían respecto a un espacio de parámetros y sus conjuntos aislados e invariantes. En la segunda demostraremos que el índice de Conley es invariante bajo pequeños desplazamientos en el espacio de parámetros.

4.1. Familia de flujos a parámetros

Sea Λ un espacio métrico, compacto, localmente contráctil y conexo (por ejemplo el intervalo unitario o una variedad Riemanniana compacta y conexa): este será nuestro espacio de parámetros. Además sea X un espacio localmente compacto y métrico y sea Γ un flujo con $X \times \Lambda \subset \Gamma$ un flujo local tal que si $(x, \lambda) \in X \times \Lambda$ entonces $(x, \lambda) \cdot t \in X \times \Lambda$ para cualesquiera x, λ, t . De esta manera, $X \times \Lambda$ es un flujo local para cualquier λ . Tenemos dos proyecciones naturales

$$\begin{cases} \pi_X : X \times \Lambda \rightarrow X \\ \pi_\Lambda : X \times \Lambda \rightarrow \Lambda \end{cases} .$$

Ejemplo 4.1.1. Podemos considerar la familia de flujos obtenidos por las ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = x^2 - \lambda^2$$

con $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$. Esto se puede pensar como un flujo en $\mathbb{R}^2 \times \Lambda$ dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - \lambda^2 \\ \dot{\lambda} = 0 \end{cases}.$$

Notamos que si $\lambda = 0$ tenemos un punto singular, y cuando aumentamos su valor este se parte en dos puntos singulares, en particular $\pm\lambda$. Hacemos un esbozo de este flujo:

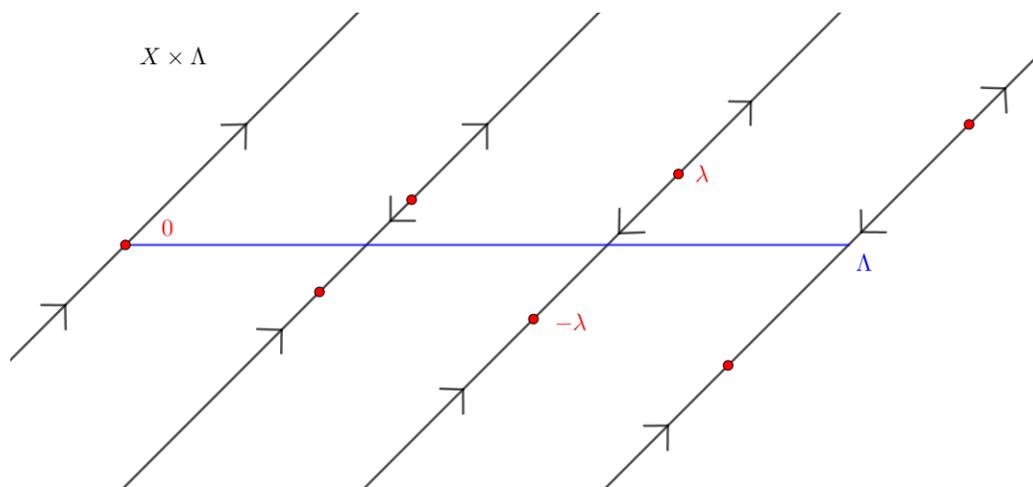


Figura 4.1: El flujo determinado por la ecuación diferencial $\dot{x} = x^2 - \lambda^2$.

El siguiente lema nos dice que la propiedad 'ser una vecindad aislante' es robusta bajo perturbaciones.

Lema 4.1.2. *Para cualquier compacto $N \subset X$, el conjunto*

$$\Lambda(N) = \{\lambda \in \Lambda \mid N \times \lambda \text{ es una vecindad aislante en } X \times \lambda\}$$

es abierto en Λ .

Demostración. Verificaremos que el complemento es un conjunto cerrado.

Supongamos que existe $\lambda \in \Lambda$ con una sucesión λ_k que converge a λ y un conjunto compacto $N \subset X$ tal que $N \times \lambda$ es una vecindad aislante en $X \times \lambda$ pero $N \times \lambda_k$ no es una vecindad aislante en $X \times \lambda_k$. Entonces existe una sucesión $x_k \in \partial N$ tal que $(x_k, \lambda_k) \cdot \mathbb{R} \subset N \times \lambda_k$ para todo k . Cualquier punto de acumulación $x \in \partial N$ cumple entonces que $(x, \lambda) \cdot \mathbb{R} \subset N \times \lambda$, por lo que $N \times \lambda$ no es aislante en $X \times \lambda$. \square

Observación 4.1.3. *El conjunto $\Lambda(N)$ puede ser vacío: en efecto podemos tener un compacto N que no sea vecindad aislante para ningún valor de λ .*

Observación 4.1.4. *En el ejemplo anterior, consideramos $N = [-1, 1]$. Entonces para cualquier $\lambda < 1$, tenemos que N es una vecindad aislante. En particular $\Lambda(N) = [0, 1)$ que es abierto en Λ .*

Consideramos el conjunto

$$\mathcal{S} = \{S \times \lambda \mid \lambda \in \Lambda, S \subset X \text{ compacto}, S \times \lambda \text{ es aislado e invariante en } X \times \lambda\}.$$

En otras palabras \mathcal{S} es la familia de conjuntos aislados e invariantes en para distintos valores de los parámetros. Para cualquier $N \subset X$ compacto definimos la sección $\sigma_N : \Lambda(N) \rightarrow \mathcal{S}$ dada por

$$\sigma_N : \lambda \mapsto \text{Inv}(N \times \lambda).$$

Equipamos a \mathcal{S} con la topología generada por $\{\sigma_N(U) \mid N \subset X \text{ compacto}, U \subset \Lambda(N) \text{ abierto}\}$.

Lema 4.1.5. *Sean N, N' subconjuntos compactos de X y sean U, U' subconjuntos abiertos de $\Lambda(N)$ y $\Lambda(N')$ respectivamente. Entonces*

1. $\Lambda(N, N') = \{\lambda \in \Lambda(N) \cap \Lambda(N') \mid \text{Inv}(N \times \lambda) = \text{Inv}(N' \times \lambda)\}$ es abierto en Λ .
2. $\sigma_N(U) \cap \sigma_{N'}(U') = \sigma_N(U \cap U' \cap \Lambda(N, N'))$.
3. $\sigma_N : \Lambda(N) \rightarrow \mathcal{S}$ es continua.

Demostración.

1. Demostraremos que el complemento es cerrado. Sea $\lambda \in \Lambda(N) \cap \Lambda(N')$ tal que $\text{Inv}(N \times \lambda) = \text{Inv}(N' \times \lambda)$ y supongamos que existe una sucesión λ_k en $\Lambda(N) \cap \Lambda(N')$ que converge a λ con $\text{Inv}(N \times \lambda_k) \subsetneq \text{Inv}(N' \times \lambda_k)$. Sea $x_k \in X$ tal que $(x_k, \lambda_k) \in \text{Inv}(N' \times \lambda_k) \setminus \text{Inv}(N \times \lambda_k)$. Sea $t_k \in \mathbb{R}$ una sucesión con $(x_k, \lambda_k) \cdot t_k \notin N \times \lambda_k$. Si (y, λ) es un punto límite de $(x_k, \lambda_k) \cdot t_k$ entonces $(y, \lambda) \cdot \mathbb{R} \subset N' \times \lambda$ y por tanto $(y, \lambda) \cdot \mathbb{R} \subset N \times \lambda$ dado que $\text{Inv}(N' \times \lambda) = \text{Inv}(N \times \lambda)$. Pero como $(x_k, \lambda_k) \cdot t_k \notin N \times \lambda_k$, se tiene que $y \in \partial N$, contradiciendo que $\lambda \in \Lambda(N)$.
2. Se sigue de la definición de los conjuntos involucrados.
3. Si $N' \subset X$ es compacto y $U' \subset \Lambda(N')$ es abierto, entonces

$$\sigma_N^{-1}(\sigma_{N'}(U')) = U' \cap \Lambda(N, N')$$

y tanto U' como $\Lambda(N, N')$ son abiertos (por (1)), por lo que su intersección también lo es.

□

Proposición 4.1.6. $\pi_\lambda : \mathcal{S} \rightarrow \Lambda$ es un homeomorfismo local.

Demostración. Sea $S \times \lambda \in \mathcal{S}$ y $N \times \lambda$ una vecindad aislante en $X \times \lambda$. Por construcción $U := \sigma_N(\Lambda(N))$ es abierto en \mathcal{S} y contiene a $S \times \lambda$. Observamos que $\pi_\Lambda|_U : U \rightarrow \Lambda(N)$ tiene una inversa dada por $\sigma_N : \Lambda(N) \rightarrow U$.

En efecto, si $\lambda \in \Lambda(N)$, entonces $\pi_\Lambda \circ \sigma_N = \lambda$. Similarmente si $S \times \mu \in U$ quiere decir que $S \times \mu = \text{Inv}(N \times \mu)$ entonces $\sigma_N(\mu) = S \times \mu$.

El lema garantiza que σ_N es continua, y por construcción de la topología es abierta. □

Ejemplo 4.1.7. Consideramos la familia de flujos en \mathbb{R}^2 dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

con $\lambda \in \Lambda = [-1, 1]$. Podemos hacer un dibujo para algunos valores de λ :

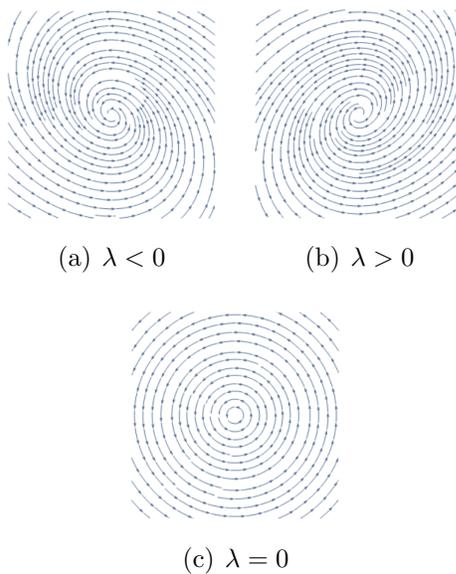


Figura 4.2: Tres campos correspondientes a distintos valores de λ .

Construcción de \mathcal{S} Sea N una bola cerrada alrededor del origen. Observamos que N es una vecindad aislante si y sólo si $\lambda \neq 0$. Así $\Lambda(N) = \Lambda \setminus \{0\}$. Por otro lado tenemos que el vacío siempre es una vecindad aislante del vacío, por lo que $\Lambda(\emptyset) = \Lambda$.

En este caso podemos describir a la colección de conjuntos aislados e invariantes \mathcal{S} como sigue: tenemos que $\{0\}$ es un conjunto aislado e invariante para todo $\lambda \neq 0$, y además de eso solo tenemos el vacío. Por tanto \mathcal{S} está dado por la unión de estos dos conjuntos:

$$\mathcal{S} = \{(\{0\}, \lambda) \mid \lambda \neq 0\} \cup \{(\emptyset, \lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$$

Análisis de las secciones Estudiemos las secciones. Estas las dividimos en algunos casos

- Si N es compacto y contiene al origen en su interior, entonces $\Lambda(N) = \Lambda \setminus \{0\}$ como mencionamos anteriormente. Además $\sigma_N(\Lambda(N)) = \{(\{0\}, \lambda) \mid \lambda \neq 0\}$.
- Si N es una vecindad aislante para $\lambda = 0$ entonces es una vecindad aislante del conjunto vacío. Se sigue que también es una vecindad aislante para cualquier otro parámetro y por tanto $\Lambda(N) = \Lambda$ y $\sigma_N(\Lambda(N)) = \{(\emptyset, \lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$.

Juntando ambos, y sabiendo que las secciones son homeomorfismos locales tenemos el siguiente dibujo que resume como se ve el espacio.

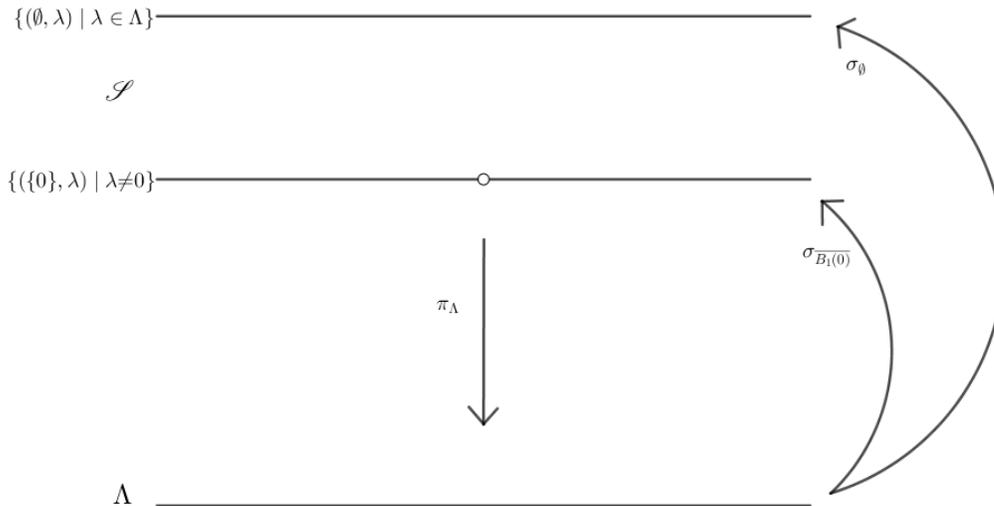


Figura 4.3: El espacio \mathcal{S} .

Ejemplo 4.1.8. Consideramos el flujo local en \mathbb{R} parametrizado por $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$ dado por la familia de ecuaciones

$$\dot{x} = x^2 + \lambda$$

Si $\lambda = 0$ tenemos el origen como conjunto aislado e invariante con una vecindad aislante dada por cualquier intervalo alrededor del cero. Para cualquier otro valor tenemos al vacío. Así

$$\mathcal{S} = \{(\{0\}, 0)\} \cup \{(\emptyset, \lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

Veremos que \mathcal{S} es un intervalo 'con dos orígenes' y por tanto no es Hausdorff. Basta con ver que para cualquier compacto N , cualquier abierto $\sigma_N(U)$ que contenga a $(\emptyset, 0)$ interseca a cualquier abierto que contenga a $(\{0\}, 0)$. Distinguimos tres casos:

- Si N contiene al origen en su interior, entonces $\Lambda(N) = \Lambda$. Además $\sigma_N(\Lambda(N)) = \{(\{0\}, 0)\} \cup \{(\emptyset, \lambda) \mid \lambda > 0\}$.
- Si N es no vacío o no contiene al origen, entonces $\Lambda(N) = \Lambda$ y $\sigma_N(\Lambda(N)) = \{(\emptyset, \lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$.
- Si N contiene al origen pero no en su interior, entonces $\Lambda(N) = (0, 1]$ y $\sigma_N(\Lambda(N)) = \{(\emptyset, \lambda) \mid \lambda > 0\}$.

Usando lo anterior, restringiéndonos a cualquier subconjunto abierto de $\Lambda(N)$ vemos que podemos 'separar' todo el segmento menos a los dos orígenes, $(\emptyset, 0)$ y $(\{0\}, 0)$. Se sigue que \mathcal{S} es un segmento con dos orígenes, no es Hausdorff, y la proyección es la esperada. Esto se resume en la figura:

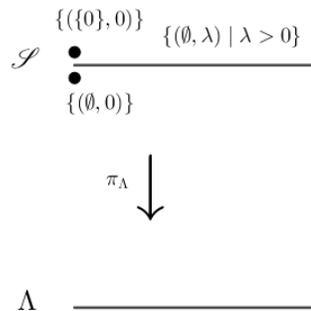


Figura 4.4: El espacio \mathcal{S} asociado al flujo.

Notamos que \mathcal{S} tiene una única componente conexa, y el índice homotópico solo es la constante $[*]$.

Observación 4.1.9. Si $\sigma : \Lambda \rightarrow \mathcal{S}$ es una sección continua, entonces el conjunto

$$\begin{aligned} \Lambda(N, \sigma) &:= \sigma^{-1}(\sigma_N(\Lambda(N))) \\ &= \{\lambda \in \Lambda \mid N \times \lambda \text{ es una vecindad aislante para } \sigma(\lambda) \text{ en } X \times \lambda\}. \end{aligned}$$

es abierto en Λ .

4.2. El índice es localmente constante en \mathcal{S}

En esta sección demostraremos que el índice se puede entender como una asignación localmente constante en \mathcal{S} . Notamos como en los ejemplos anteriores esto se cumple. Asumiremos que $S \subset X \times \Lambda$ es un conjunto invariante aislado que es la imagen de una sección $\sigma : \Lambda \rightarrow \mathcal{S}$.

Notación Si $\lambda \in \Lambda$ y $N \subset X \times \Lambda$ es compacto, denotaremos por $N(\lambda) = N \cap (X \times \lambda)$. Similarmente si $K \subset \Lambda$ es compacto consideraremos $N(K) = N \cap (X \times K)$. Observamos que si N_1, N_0 es un par de índice para S , tenemos una inclusión canónica

$$j : N_1(\lambda)/N_0(\lambda) \hookrightarrow N_1/N_0.$$

Ejemplo 4.2.1. Consideramos la familia a un parámetro de flujos en \mathbb{R} dada por la ecuación diferencial

$$\dot{x} = x^2 - \lambda^2$$

con $\lambda \in \Lambda = [-1, 1]$. Cuando $\lambda = 0$ tenemos un único punto singular, el origen. Si $\lambda \neq 0$ este se bifurca en dos puntos críticos.

Dibujamos el flujo en el producto, así como la inclusión j como sigue:

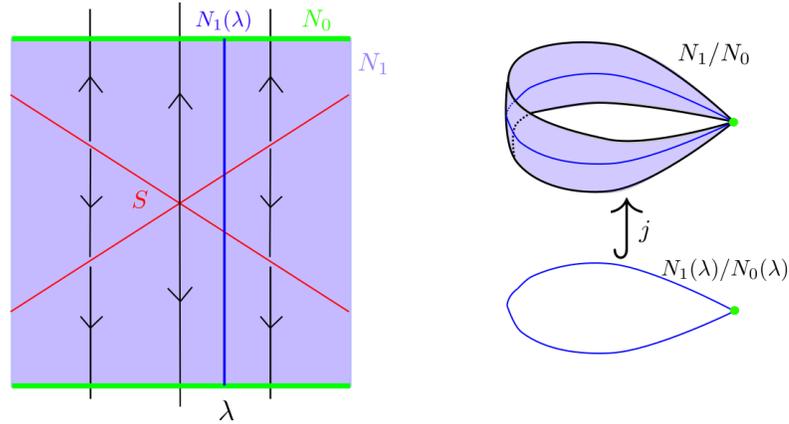


Figura 4.5: La inclusión $j : N_1(\lambda)/N_0(\lambda) \hookrightarrow N_1/N_0$.

Primero verificaremos que la inclusión nos define un morfismo de sistemas conexos simples entre los índices de Conley. La segunda parte consistirá en demostrar que j es de hecho una equivalencia homotópica, al menos localmente. Recordamos la definición de morfismo de sistemas conexos simples.

Definición 4.2.2 (Morfismo de sistemas conexos simples). Si I, J son dos sistemas conexos simples, entonces $\Phi : I \rightarrow J$ se dice ser un *morfismo de sistemas conexos simples* si Φ es una colección de clases de homotopía de aplicaciones de I_O en J_O sujeta a las condiciones:

- Para cada $X \in I_O, Y \in J_O$, $\Phi(X, Y) := \{[f] : X \rightarrow Y \mid [f] \in \Phi\}$ es no vacía y consta de un sólo elemento,
- Dadas $f : X \rightarrow X' \in I_M, g : Y \rightarrow Y' \in J_M$ se cumple que $[g^{-1} \circ \varphi \circ f] \in \Phi(X, Y)$ dónde $\varphi \in \Phi(X', Y')$.

Proposición 4.2.3. Sea (N_1, N_0) un par de índice para S en $X \times \Lambda$. Entonces la inyección $j : N_1(\lambda)/N_0(\lambda) \rightarrow N_1/N_0$ induce un morfismo entre los sistemas conexos simples $\mathcal{S}(\sigma(\lambda), X \times \lambda)$ y $\mathcal{S}(S, X \times \Lambda)$ que es independiente de la elección de par de índices.

Demostración. Sea (N'_1, N'_0) otro par de índice para S en $X \times \Lambda$, sea $T > 0$ tal que

$$\begin{cases} (x, \mu) \cdot [-T, T] \subset N_1 \setminus N_0 \Rightarrow (x, \mu) \in N'_1 \setminus N'_0 \\ (x, \mu) \cdot [-T, T] \subset N'_1 \setminus N'_0 \Rightarrow (x, \mu) \in N_1 \setminus N_0 \end{cases}$$

y definamos $f(\lambda)_t : N_1(\lambda)/N_0(\lambda) \rightarrow N'_1(\lambda) \setminus N'_0(\lambda)$ y $g_t : N'_1/N'_0 \rightarrow N_1/N_0$ dadas por

$$f(\lambda)_t[x, \lambda] = \begin{cases} [(x, \lambda), 3t], & (x, \lambda) \cdot [0, 2t] \subset N_1 \setminus N_0, (x, \lambda) \cdot [t, 3t] \subset N'_1 \setminus N'_0 \\ [N'_0(\lambda)] & \text{de otra manera, } (x, \lambda) \in N'_1, \end{cases}$$

$$g_t[x, \mu] = \begin{cases} [(x, \mu) \cdot 3t], & (x, \mu) \cdot [0, 2t] \subset N'_1 \setminus N'_0, (x, \mu) \cdot [t, 3t] \subset N_1 \setminus N_0 \\ [N_0], & \text{de otra manera, } (x, \mu) \in N_1 \end{cases}$$

para $t \geq T$. Entonces la composición $g_t \circ j(\lambda) \circ f(\lambda)_t$ está dada por

$$g_t \circ j(\lambda) \circ f(\lambda)_t[x, \lambda] = \begin{cases} [(x, \lambda) \cdot 6t] & (x, \lambda) \cdot [0, 6t] \subset N_1 \setminus N_0 \\ [N_0] & \text{de otra manera} \end{cases}$$

para $(x, \lambda) \in N_1(\lambda)$ y por tanto es homotópica a la inyección j .

□

Necesitaremos un lema antes de seguir.

Lema 4.2.4. *Si N es una vecindad aislante para S en un flujo local métrico $X \subset \Gamma$, entonces existe una vecindad N' de N que también es vecindad aislante para S .*

Demostración. Si el enunciado fuese falso existiría una sucesión γ_k en $X \setminus N$ tal que $d(\gamma_k \cdot t, N) \leq \frac{1}{k}$, pero cualquier punto de acumulación de γ_k satisfecería $\gamma \in \overline{X \setminus N} \cap \text{Inv}(N)$, lo que es una contradicción. □

El siguiente lema será fundamental para demostrar que la inyección es localmente una equivalencia homotópica.

Lema 4.2.5. *Sea (N_1, N_0) un par de índice para S en $X \times \Lambda$ y sea $\lambda_0 \in \Lambda$ un valor fijo. Entonces existe una vecindad compacta K de λ_0 en Λ y tiempos $T_1 > 2T_0 > 0$ tales que se cumplen los siguientes enunciados.*

1. $N \times K$ es una vecindad aislante de $S(K)$ y $U \times K$ es una vecindad de $S(K)$ en $X \times K$, donde N, U se definen como sigue:

$$N = \overline{\pi_X(N_1(K) \setminus N_0(K))} = \pi_X(\overline{N_1(K) \setminus N_0(K)}) \quad (4.1)$$

$$U = \text{int} \bigcap_{\lambda \in K} \pi_X(N_1(\lambda) \setminus N_0(\lambda)). \quad (4.2)$$

2. Para todos $x \in X, \mu, \lambda \in K$ y $T \geq T_1$ se cumplen las siguientes implicaciones:

$$(x, \mu) \cdot [-T_0, T_0] \subset N \times K \Rightarrow x \in U, \quad (4.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\pi_X((x, \mu) \cdot [0, T]), \lambda) \subset \overline{N_1(K) \setminus N_0(K)}, \\ (x, \mu) \cdot [T_0, T] \not\subset U \times K \end{array} \right\} \Rightarrow (\pi_X((x, \mu) \cdot T), \lambda) \cdot [0, T] \cap N_0 \neq \emptyset \quad (4.4)$$

Demostración. Para demostrar 1 escogemos vecindades aislantes N^1 y N^2 de S en $X \times \Lambda$ tales que $\overline{N_1} \setminus N_0$ es una vecindad de N^1 en $X \times \Lambda$ y N^2 es una vecindad aislante de $\overline{N_1} \setminus N_0$ en $X \times \Lambda$. Por la observación 4.1.9 el conjunto

$$\Lambda(\pi_X(N^1(\lambda_0)), \sigma) \cap \Lambda(\pi_X(N^2(\lambda_0)), \sigma)$$

es una vecindad abierta de λ_0 . Luego por ser Λ localmente compacto tenemos que existe una vecindad compacta K de λ_0 contenida en $\Lambda(\pi_X(N^1(\lambda_0)), \sigma) \cap \Lambda(\pi_X(N^2(\lambda_0)), \sigma)$. Esto implica que

$$\pi_X(N^1(\lambda_0)) \times K, \quad \pi_X(N^2(\lambda_0)) \times K$$

son vecindades aislantes para $S(K)$ en $X \times K$. Más aún afirmamos que podemos achicar a K de manera que

$$\pi_X(N^1(\lambda_0)) \times K \subset N_1 \setminus N_0,$$

$$\pi_X(N_1(\lambda) \setminus N_0(\lambda)) \subset \pi_X(N^2(\lambda_0)), \forall \lambda \in K.$$

La primera inclusión se sigue de la contención $N^1(\lambda_0) \subset \text{int } N_1 \setminus N_0$. Para demostrar la segunda inclusión procedemos por contradicción. Si no fuese cierta, existiría una sucesión $(x_k, \lambda_k) \in N_1 \setminus N_0$ tal que λ_k tiende a λ_0 y $(x_k, \lambda_0) \notin N^2$. Pero entonces cualquier punto de acumulación x_0 de x_k cumpliría que $(x_0, \lambda_0) \in \overline{N_1} \setminus N_0$ y $(x_0, \lambda_0) \in (X \times \Lambda) \setminus N^2$, contradiciendo que N^2 es una vecindad de $\overline{N_1} \setminus N_0$.

De estas dos condiciones se sigue que

$$\pi_X(N^1(\lambda_0)) \subset \pi_X(N_1(\lambda) \setminus N_0(\lambda)) \subset \pi_X(N^2(\lambda_0))$$

y por tanto se cumple 1.

Para demostrar 2 escogemos a la vecindad compacta K que acabamos de construir. Sabemos que existe un $T_0 \geq 0$ tal que se cumple 4.3, por el lema 2.1.9. Más aún, si 4.4 se cumple para algún $T_1 > 2T_0$ entonces se cumple para todo $T \geq T_1$, ya que la primera condición en 4.4 junto con 4.3 nos garantiza que $(x, \mu) \cdot [T_0, T - T_0] \subset U \times K$.

Entonces supongamos que 4.4 no se cumple para ningún $T = T_1 > 0$ y para ninguna vecindad de λ_0 en Λ . Entonces existen sucesiones $x_k \in X$, $\lambda_k \in K$, $\mu_k \in K$, $T_k > 2T_0$, $t_k \in [T_0, T_k]$ tales que T_k diverge, λ_k y μ_k tienden a λ_0 y

$$(\pi_X((x_k, \mu_k) \cdot [0, T_k]), \lambda_k) \subset \overline{N_1(K) \setminus N_0(K)}, \quad (4.5)$$

$$(x_k, \mu_k) \cdot t_k \notin U \times K, \quad (4.6)$$

$$(\pi_X((x_k \cdot \mu_k) \cdot T_k), \lambda_k) \cdot [0, T_k] \subset N_1 \setminus N_0. \quad (4.7)$$

Se sigue de 4.5 y 4.3 que $(x_k, \mu_k) \cdot [T_0, T_k - T_0] \subset U \times K$ y por tanto $t_k \geq T_k - T_0$. Sea $x_0 \in N$ un punto de acumulación de $\pi_X((x_k, \mu_k) \cdot T_k)$ y sea $\tau \geq 0$ un punto de acumulación de $T_k - t_k$. Entonces por 4.5 y 4.7 se sigue que $(x_0, \lambda_0) \cdot \mathbb{R} \subset \overline{N_1} \setminus \overline{N_0}$ y entonces $(x_0, \lambda_0) \in S$. Pero por 4.6 se sigue que $(x_0, \lambda_0) \cdot (-\tau) \notin U \times K$, contradiciendo que $S(K) \subset U \times K$. □

Finalmente llegamos al último teorema de esta sección.

Teorema 4.2.6. *Sea (N_1, N_0) un par de índice para S en $X \times \Lambda$, sea $\lambda_0 \in \Lambda$ un parámetro dado y K una vecindad compacta, contráctil de λ_0 en Λ que satisface las condiciones del lema anterior para tiempos $T_1 > 2T_0 > 0$. Entonces la inyección*

$$j(\lambda) = j_K(\lambda) : N_1(\lambda)/N_0(\lambda) \rightarrow N_1(K)/N_0(K)$$

es una equivalencia homotópica para cualquier $\lambda \in K$. Más aún, la aplicación $f(\lambda) = f_K(\lambda) : N_1(K)/N_0(K) \rightarrow N_1(\lambda)/N_0(\lambda)$ definida por

$$f_K(\lambda)[x, \mu] = \begin{cases} [(\pi_X((x, \mu) \cdot 3T), \lambda) \cdot T], & \text{si } (x, \mu) \cdot [0, 2T] \subset N_1 \setminus N_0, \\ & (\pi_X((x, \mu) \cdot [T, 3T]), \lambda) \subset N_1 \setminus N_0 \\ & (\pi_X((x, \mu) \cdot 3T), \lambda) \cdot [0, T] \subset N_1 \setminus N_0 \\ [N_0(\lambda)] & \text{de otra manera} \end{cases}$$

es un inverso homotópico de j .

Demostración. Notamos que la composición $f(\lambda) \circ j(\lambda)$ está dada por

$$f(\lambda) \circ j(\lambda)[(x, \lambda)] = \begin{cases} [(x, \lambda) \cdot 4T], & \text{si } (x, \lambda) \cdot [0, 4T] \subset N_1 \setminus N_0 \\ [N_0(\lambda)], & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

para $(x, \lambda) \in N_1(\lambda)$ que es homotópica a la identidad. La parte difícil es mostrar que la composición $j(\lambda) \circ f(\lambda)$ es homotópica a la identidad. Por ser K contractil existe una homotopía $r : K \times [0, 1] \rightarrow K$ tal que

$$r(\mu, 0) = \mu, \quad r(\mu, 1) = \lambda$$

para todo $\mu \in K$. Definimos $F : N_1(K)/N_0(K) \times [0, 1] \rightarrow N_1(K)/N_0(K)$ como

$$F([x, \mu], \xi) = \begin{cases} [(\pi_X((x, \mu) \cdot 3T), r(\mu, \xi)) \cdot T] & \text{si } (x, \mu) \cdot [0, 2T] \subset N_1 \setminus N_0, \\ & (\pi_X((x, \mu) \cdot [T, 3T]), r(\mu, \xi)) \subset N_1 \setminus N_0, \\ & (\pi_X((x, \mu) \cdot 3T), r(\mu, \xi)) \cdot [0, T] \subset N_1 \setminus N_0, \\ [N_0(K)] & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Notamos que por las propiedades de r se cumple que $F(-, 1) = j(\lambda) \circ f(\lambda)$ mientras que $F(-, 0) : N_1(K)/N_0(K) \rightarrow N_1(K)/N_0(K)$ está dada por

$$F([x, \mu], 0) = \begin{cases} [(x, \mu) \cdot 4T], & \text{si } (x, \mu) \cdot [0, 4T] \subset N_1 \setminus N_0 \\ [N_0(K)] & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

que es homotópica a la identidad. Solo falta verificar que F es continua.

En los cuatro casos siguientes la continuidad de F se verifica análogamente a las pruebas que hemos hecho, en particular hacemos referencia al lema 2.1.10:

1. $(x, \mu) \cdot [0, 2T] \not\subset \overline{N_1(K) \setminus N_0(K)}$,
2. $(\pi_X((x, \mu) \cdot [T, 3T]), r(u, \xi)) \not\subset \overline{N_1(K) \setminus N_0(K)}$,
3. $(\pi_X((x, \mu) \cdot 3T), r(u, \xi)) \cdot [0, T] \not\subset \overline{N_1(K) \setminus N_0(K)}$,
4. $(\pi_X((x, \mu) \cdot 3T), r(u, \xi)) \cdot T \in N_0$.

Por lo que podemos asumir que se cumplen las siguientes

$$(x, \mu) \cdot [0, 2T] \subset \overline{N_1(K) \setminus N_0(K)}, \quad (4.8)$$

$$(\pi_X((x, \mu) \cdot [T, 3T]), r(u, \xi)) \subset \overline{N_1(K) \setminus N_0(K)}, \quad (4.9)$$

$$(\pi_X((x, \mu) \cdot 3T), r(u, \xi)) \cdot [0, T] \subset N_1 \setminus N_0. \quad (4.10)$$

Ahora entra en juego el lema anterior. Dado que $T \geq 2T_0$, se sigue por 4.8 y 4.3 que $(x, \mu) \cdot [T, T + T_0] \subset U \times K$ donde U está definida por 4.2. Después, por

4.9, 4.10 y 4.4 que $(x, \mu) \cdot [T + T_0, 3T] \subset U \times K$. En particular $(x, \mu) \cdot 2T \notin N_0$. Así las condiciones 4.8 y 4.9 se pueden reemplazar por

$$(x, \mu) \cdot [0, 2T] \subset N_1 \setminus N_0, \quad (4.11)$$

$$(x, \mu) \cdot [T, 3T] \subset U \times K. \quad (4.12)$$

Pero las condiciones 4.10, 4.11 y 4.12 juntas son estables bajo variaciones pequeñas de $(x, \mu) \in N_1(K)$ y $\xi \in [0, 1]$. Esto demuestra la continuidad de F \square

Conclusión

La teoría de índice de Conley se centra en el estudio de subconjuntos invariantes e aislados de sistemas dinámicos. A cada uno de éstos le podemos asociar una vecindad aislante así como un conjunto de salida. El cociente de estos dos resulta ser independiente de nuestra elección inicial salvo homotopía, por lo que podemos asignar de manera precisa un tipo de homotopía a cada subconjunto aislado e invariante.

Más aún, este índice homotópico satisface muchas propiedades deseables: es fácilmente calculable para puntos críticos hiperbólicos, es aditivo y multiplicativo y detecta conjuntos aislados e invariantes. Además, si tenemos una descomposición atractor-repulsor, existe una relación estrecha entre los diferentes conjuntos invariantes dada en la forma de la sucesión coexacta de Puppe.

Finalmente el índice es robusto: bajo pequeños cambios del flujo, el índice permanece inalterado. Esto lo convierte en una potente herramienta en el estudio de sistemas dinámicos en áreas aplicadas, puesto que no depende de la precisión de los parámetros.

Estas características hicieron del índice de Conley una potente herramienta que se puede aplicar a un amplio espectro de situaciones. En particular se destaca la demostración de Floer (ver [Flo]) de la conjetura de Arnold en geometría simpléctica.

Capítulo 5

Apéndice A: Un ejemplo más

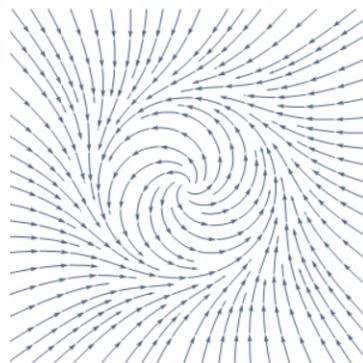
Ejemplo 5.0.1. Consideramos el flujo en el plano definido por la ecuación diferencial

$$\dot{z} = iz + (1 - |z|^2)z$$

dónde z es una coordenada compleja. Alternativamente se puede describir a través de la ecuación en variables reales

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} + (1 - x^2 - y^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Podemos hacer un esbozo del flujo:



Tenemos dos conjuntos aislados e invariantes relevantes: el origen y la órbita periódica que parametriza a la circunferencia unitaria. Los denotaremos por $\{0\}$ y C respectivamente. Comencemos con el origen. Podemos considerar un disco alrededor del mismo como vecindad aislante. El conjunto de salida no es más que la frontera, como muestra la figura.

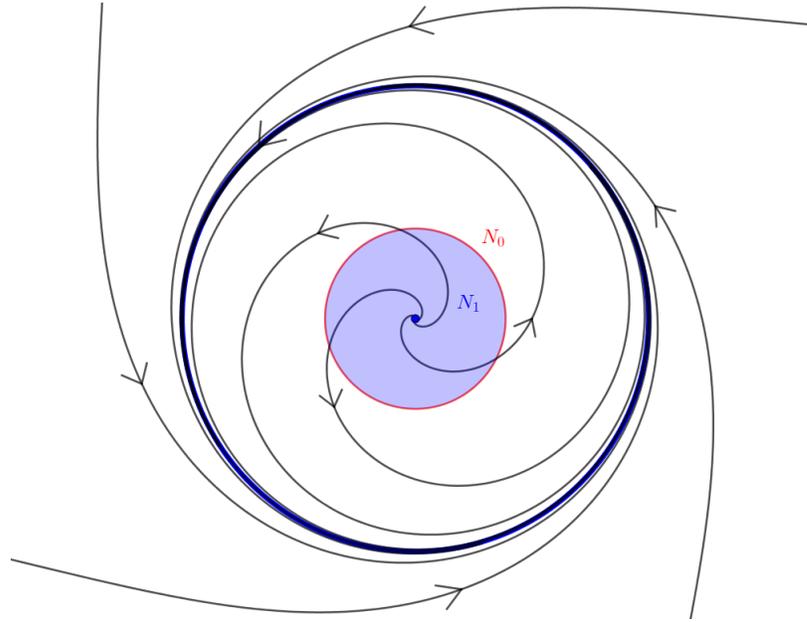


Figura 5.1: Un par de índice para $\{0\}$.

Por tanto tenemos que $h(\{0\}) = [N_1/N_0] = \mathbb{S}^2$. Así $CH^*(\{0\}) = (0, 0, \mathbb{Z}, 0, \dots)$.

Enseguida, podemos construir un anillo compacto alrededor de C para conseguir así una vecindad aislante N :

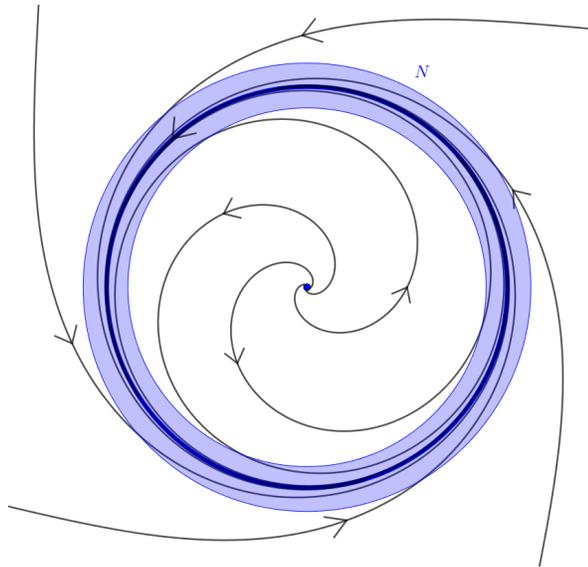


Figura 5.2: Una vecindad aislante para C .

Notamos que el conjunto de salida de N es vacío, por lo que $h(C) = [N/\emptyset] = [\mathbb{S}^1 \sqcup \{*\}]$. Así $CH^*(C) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, \dots)$.

Tenemos otro conjunto aislado e invariante: el disco unitario D . Una vecindad aislante puede darse como un disco ligeramente más grande. Su conjunto de salida es vacío, y por tanto $h(D) = [\mathbb{S}^0]$. Entonces $CH^*(D) = (\mathbb{Z}, 0, 0, \dots)$. Más aún, notamos que D tiene una descomposición atractor-repulsor: $\{0\}$ es un repulsor mientras que C es un atractor. La sucesión exacta atractor-repulsor entonces toma la forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & CH^0(\{0\}) & \longrightarrow & CH^0(D) & \longrightarrow & CH^0(C) & \longrightarrow \\
 & & & & & & & \searrow \\
 & & \longrightarrow & CH^1(\{0\}) & \longrightarrow & CH^1(D) & \longrightarrow & CH^1(C) & \longrightarrow \\
 & & & & & & & \searrow \\
 & & \longrightarrow & CH^2(\{0\}) & \longrightarrow & CH^2(D) & \longrightarrow & CH^2(C) & \longrightarrow \\
 & & & & & & & \searrow \\
 & & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

y explícitamente queda

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow \\
 & & & & & & & \searrow \\
 & & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow \\
 & & & & & & & \searrow \\
 & & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \\
 & & & & & & & \searrow \\
 & & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Bibliografía

- [Handbook] Konstantin Mischaikow, Marian Mrozek *Conley Index Handbook of Dynamical Systems Volume 2*, p.393
- [Fom] Anatoly Fomenko, Dimitri Fuchs *Homotopical Topology Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, 2016
- [Sal] Dietmar Salamon *Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 291, n°1, 1985
- [Arnold] Vladimir Arnol'd *Ordinary Differential Equations*
- [Flo] Andreas Floer *Witten's complex and infinite dimensional Morse theory* Journal of Differential Geometry, Vol. 30, 1989
- [Con] Charles C. Conley *Isolated Invariant Sets and the Morse Index* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol. 38, 1976
- [Smo] Joel Smoller *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations* Springer-Verlag New York, 1994
- [Per] Lawrence Perko *Differential Equations and Dynamical Systems* Springer-Verlag New York, 1991
- [Spa] Edwin H. Spanier *Algebraic Topology* Springer-Verlag New York, 1966
- [Mil] John Milnor *Topology from the Differentiable Viewpoint* Princeton University Press, 1997