Feuille d'exercices n° 7 : Loi faible et loi forte

Exercice 1. [Premiers temps de passage et loi forte]

Soit $X_1, X_2, ...$ des v.a. i.i.d. telles que $\mathbb{P}(0 < X_1 < \infty) = 1$, et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ leur somme. On pose $T_t = \min\{n \geqslant 0 : S_n \geqslant t\} \in \mathbb{N}$ pour $t \geqslant 0$ réel.

1. Noter que, pour $t \geqslant 0$, $S_{T_t - 1} < t \leqslant S_{T_t}$
2. En déduire :
$$\frac{T_t}{t} \to \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]} \in [0, \infty[\text{ p.s., quand } t \to \infty.$$

Exercice 2. [Loi faible dans L^2 et covariance]

Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. On suppose que pour tout $n \geq m$, $\mathbb{E}[X_n X_m] \leq r(n-m)$, avec $r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{n\to\infty} r(n) = 0$. On pose $S_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$.

1. Montrer :
$$\mathbb{E}[S_n^2] \leqslant 2n(r(0) + r(1) + \ldots + r(n-1))$$
2. En déduire $S_n/n \to 0$ dans L^2.

Exercice 3. [Loi faible sous hypothèse L^1 par troncature]

Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{E}[X_1] = 0$. On pose $S_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$.

1. On suppose $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$.
   (a) Montrer que
   $$\mathbb{P}(|S_n| \geqslant n\varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X_1^2]}{\varepsilon^2 n}.$$
   (b) En déduire que $S_n/n \xrightarrow{L^2} 0$.
2. On suppose $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$). Pour $R \geq 0$, on introduit les quantités tronquées suivantes :
$$X_i^{<R} = X_i \mathbb{1}_{|X_i| < R} - \mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{|X_1| < R}] \quad \text{et} \quad S_n^{<R} = \sum_{i=1}^n X_i^{<R}.$$
   (a) Montrer que
   $$\mathbb{E}[|S_n^{<R}|] \leq R\sqrt{n}.$$
   (b) Montrer que
   $$\mathbb{E}[|S_n - S_n^{<R}|] \leq 2n\mathbb{E}[|X_1| \mathbb{1}_{|X_1| > R}].$$
   (c) En déduire que $S_n/n \xrightarrow{L^1} 0$.

Exercice 4. [Loi forte sous hypothèse L^2]

Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables al'eatoires i.i.d. telles que $\mathbb{E}[X_1] = 0$. On pose $S_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$

1. On suppose $\mathbb{E}[X_1^4] < \infty$.
   (a) Montrer que :
   $$\mathbb{E}[S_n^4] = 3n(n-1)(\mathbb{E}[X_1^2])^2 + n\mathbb{E}[X_1^4].$$

(b) En déduire que $S_n/n \to 0$ p.s.

2. On suppose maintenant $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$.

   (a) Montrer que :
   $$\mathbb{E}[S_n^2] = n\mathbb{E}[X_1^2]$$

   (b) En déduire que $S_{n^2}/n^2 \to 0$ p.s.

   (c) Vérifier que
   $$\max_{n^2+1 \leqslant k \leqslant (n+1)^2-1} \left| \frac{S_{n^2}}{n^2} - \frac{S_k}{k} \right| \leqslant \frac{2}{n} \left| \frac{S_{n^2}}{n^2} \right| + \frac{1}{n^2} \sum_{j=n^2+1}^{(n+1)^2-1} |X_j|$$

   (d) Remarquer que
   $$\left(\frac{1}{n^2} \sum_{j=n^2+1}^{(n+1)^2-1} |X_j| \right)^2 \leqslant \frac{2}{n^3} \sum_{j=n^2+1}^{(n+1)^2-1} X_j^2$$

   (e) En déduire que $S_n/n \to 0$ p.s.