

Nombre de dérangements

Thomas CHEN

Un problème combinatoire standard est de compter le nombre de dérangement. A l'aide des séries entières, on est capable de trouver une formule close.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit D_n le nombre de dérangement dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ (c'est-à-dire des éléments de $\mathfrak{S}_n$ sans point fixe).

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$.
2. On considère la série génératrice exponentielle de $(D_n)_n$ (à savoir $\sum_{n \geq 0} D_n \frac{z^n}{n!}$) et on note D sa somme. Montrer que son rayon de convergence R est supérieur ou égal à 1. En déduire $D(z)$ pour $z \in D(0, 1)$.
3. Calculer D_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé :

1. On compte les permutations de $\mathfrak{S}_n$ comme suit :
 - On fixe le nombre de points fixes d'une permutation. Disons k .
 - On choisit les points fixes. Il y a $\binom{n}{k}$ choix.
 - On dérange les éléments restants (il ne doit pas y avoir de points fixes). Il y a, par définition, D_{n-k} choix.
 - On obtient alors de manière unique une permutation.

Ainsi,

$$|\mathfrak{S}_n| = n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k.$$

2. Clairement, $0 \leq \frac{D_k}{k!} \leq 1$ pour tout $k \geq 0$. Ainsi, D définit une série entière de rayon $R \geq 1$ par le lemme d'Abel. Remarquons qu'en divisant par $n!$, on a

$$1 = \sum_{k=0}^n \frac{D_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{p+q=n} \frac{D_p}{p!} \frac{1}{q!}.$$

On reconnaît un produit de Cauchy. En fait, pour tout $|z| < 1$,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{D_n}{n!} z^n \sum_{\ell \geq 0} \frac{z^\ell}{\ell!} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p+q=n} \frac{D_p}{p!} \frac{1}{q!} \right) z^n = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

donc $\forall |z| < 1, D(z)e^z = \frac{1}{1-z}$. On en déduit

$$\forall |z| < 1, D(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}.$$

3. Eh bien, calculons $D(z)$ pour $|z| < 1$. On a

$$\frac{e^{-z}}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n \sum_{\ell=0}^{+\infty} z^\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{p!} z^n.$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\forall k \geq 0, \frac{D_k}{k!} = \sum_{p=0}^k \frac{(-1)^p}{p!}.$$

On reconnaît à droite une série alternée. Notons $R_k = \sum_{n \geq k+1} \frac{(-1)^n}{n!}$. Alors

$$\forall k \geq 0, \frac{D_k}{k!} = \frac{1}{e} - R_k.$$

Ainsi,

$$\frac{k!}{e} + \frac{1}{2} = D_k + \frac{1}{2} + k!R_k.$$

Par le critère spécial des séries alternées, $|R_k| \leq \frac{1}{(k+1)!}$ pour $k \geq 1$, donc $|k!R_k| < \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, $\frac{1}{2} + k!R_k$ est compris entre 0 et 1 donc la partie entière de $D_k + \frac{1}{2} + k!R_k$ est D_k (car D_k est entier) pour tout $k \geq 1$. De fait,

$$\forall k \geq 1, D_k = \left\lfloor \frac{k!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$