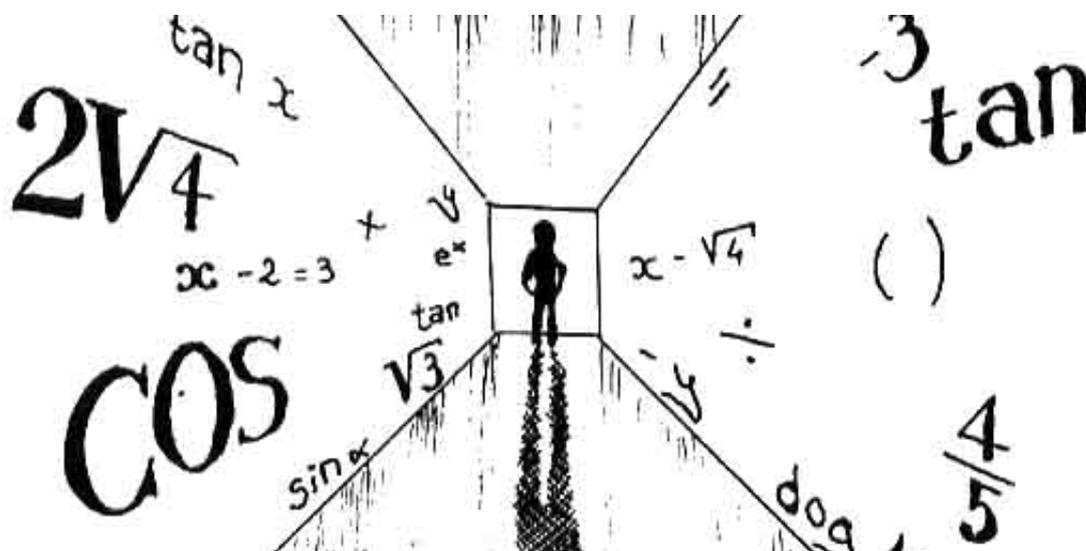

Mémoire Magistère 3^{ème} année



Résumé. Ce mémoire présentera dans une première partie, un descriptif de mon cursus au sein du magistère et ce qu'il m'a apporté. Ensuite, une seconde partie sera consacrée à une présentation généraliste (historique, motivations, grandes questions ouvertes) du domaine de recherche dans lequel j'effectuerai ma thèse. Enfin, on trouvera en annexe les divers mémoires que j'ai réalisés lors de ma scolarité au sein de cette formation.

Valérie Robert

26 novembre 2013

Table des matières

1	Introduction	3
2	Parcours au sein du magistère	3
2.1	Première année de magistère	3
2.1.1	Cours suivi	3
2.1.2	Projet TER	3
2.1.3	Stage	3
2.2	Deuxième année de magistère	4
2.2.1	Cours Semestre 1	4
2.2.2	Cours Semestre 2	4
2.2.3	Projet TER	4
2.3	Troisième année de magistère	5
2.3.1	Cours supplémentaire suivi	5
2.3.2	Stage	5
3	Présentation du domaine de recherche : Application des méthodes CART et forêts aléatoires au problème d'estimation de l'état de charge d'une batterie électrique	5
3.1	Contexte appliqué	5
3.2	Contexte théorique	8
3.2.1	Méthode d'apprentissage statistique	8
3.2.2	CART	9
3.2.3	Forêts aléatoires	13
3.3	Perspectives et questions ouvertes	14
4	Conclusion	15
5	Annexes : mémoires et documents rédigés dans le cadre du magistère	15
5.1	Première année du magistère	15
5.1.1	Projet TER : Sur la transcendance de e et de π	15
5.1.2	Rapport de stage : Influence des paramètres environnementaux sur le comportement des prédateurs supérieurs dans le canal du Mozambique	29
5.2	Deuxième année de magistère, projet TER : Constructibilité à la règle et au compas	45
5.3	Troisième année de magistère, rapport de stage : Application des méthodes CART et forêts aléatoires à l'estimation de l'état de charge d'une batterie électrique	75

1 Introduction

Durant mes deux années en classe préparatoire au lycée Leconte de Lisle à la Réunion, les mathématiques se sont révélées être une discipline réellement passionnante avec l'introduction de nouveaux concepts et théories jamais abordées lors de la Terminale.

Grâce à ces deux années, j'ai redécouvert les mathématiques sous un nouvel aspect, elles me sont apparues comme indispensables et pleines d'avenir et j'avoue que certains théorèmes ont été pour moi source d'émerveillement.

Par ailleurs, cela m'a donné envie d'enseigner ces mathématiques et de susciter ainsi chez les élèves, le même engouement que j'ai ressenti pour cette matière. C'est pour cela que j'ai décidé d'intégrer en 2006 la Licence troisième année intitulée *Mathématiques Fondamentales et Appliquées* (L3 MFA) de l'université Paris-SUD ainsi que la première année du Magistère de mathématiques. Je voulais par ce biais, développer au mieux ma culture mathématique, et je savais par ailleurs, que ces deux formations me fourniraient un environnement mathématique fécond, et me permettraient ensuite, de concrétiser mon projet professionnel .

2 Parcours au sein du magistère

2.1 Première année de magistère

2.1.1 Cours suivi

La première année de magistère a été l'occasion d'assister à un cours très intéressant intitulé *Espaces de Banach et mesures complexes* dispensé par M. Patrick Gérard. Ce cours s'est révélé être un des cours les plus utiles lors de la poursuite de mes études. En effet, les théorèmes de Banach, de compacité et de convergence faible abordés dans ce cours magistral, ont été au centre d'un cours d'analyse de M1 et m'a permis ainsi, d'avoir de solides bases pour appréhender la première année de master. J'ai également retrouvé ces notions lors de ma préparation à l'agrégation, et j'ai pu alors retravailler ces concepts en toute sérénité, et me concentrer sur d'autres points du programme d'agrégation moins familiers.

2.1.2 Projet TER

Comme je le disais précédemment, j'ai toujours été émerveillée et intriguée par les mathématiques et lorsque ce sujet de TER *Transcendance de e et de π* a été proposé par M. Stéphane Fischler, je n'ai pas hésité une seconde. En effet, j'avais déjà entendu parler de la transcendance de π qui a notamment de jolies implications en géométrie. Mais pouvoir le démontrer rigoureusement était une aubaine afin de satisfaire ma curiosité mathématique. Ainsi, ce premier projet de recherche n'a fait que confirmer mon attrait pour les mathématiques et j'ai entrevu les mécanismes et les qualités requises pour effectuer un travail de recherche : une bibliographie préliminaire sur le sujet, une motivation sans faille et de l'opiniâtreté pour pouvoir mener à terme une démonstration récalcitrante par exemple.

2.1.3 Stage

Lors de la première année de magistère, j'ai également effectué un stage obligatoire dans un laboratoire de recherche. Etant originaire de la Réunion, j'ai donc contacté le laboratoire d'Informatique et de Mathématiques (LIM) de là-bas afin d'y faire mon stage.

J'ai été alors encadré par M. Khalid Addi, professeur au sein de ce laboratoire sur le sujet suivant : *Influence des paramètres environnementaux sur le comportement des prédateurs supérieurs dans le canal du Mozambique*.

Ainsi, ce sujet mêlant mathématiques et environnement m'a beaucoup plu et pendant un mois, j'ai fait partie d'une équipe et j'ai touché du bout des doigts ce microcosme qu'est le monde de la recherche.

Une des expériences pendant ce stage que j'ai trouvé très formatrice, est cette participation au sixième colloque de WIOMSA (Western Indian Ocean Marine Science Association) qui s'est tenu à la Réunion du 24/08/09 au 29/08/09.

En effet, j'ai exposé en anglais mon travail effectué lors du stage, et cela m'a donné l'opportunité d'avoir une première expérience d'un passage en public et ce dans une langue étrangère, ce qui était nouveau pour moi à cette époque. Je garde un très bon souvenir de ce stage car les expériences y ont été variées et très enrichissantes.

2.2 Deuxième année de magistère

2.2.1 Cours Semestre 1

La deuxième année de magistère en parallèle avec le master 1 de *Mathématiques Fondamentales et Appliquées* a consisté au premier semestre à suivre un cours intitulé *Théorie spectrale et analyse harmonique* enseigné par M. Frédéric Paulin.

Là aussi, ce fut un cours très instructif et surtout très utile, étant donné que les opérateurs compacts, les fonctions harmoniques et les espaces de Hilbert sont un pan central du programme d'agrégation.

Ainsi, ce cours complet sur cette thématique, a permis de se familiariser avec des notions incontournables par la suite, mais surtout d'assimiler quelques techniques de démonstration réapplicables dans d'autres situations.

2.2.2 Cours Semestre 2

Le cours du semestre 2 dispensé par M. Emmanuel Breuillard quant à lui, consistait en une *Introduction à la théorie analytique des nombres*.

Ce cours s'est révélé vraiment intéressant et a réveillé ma curiosité mathématique, même si parfois il était d'un niveau assez relevé.

En effet, les nombres premiers m'ont toujours fasciné, et de pouvoir comprendre le lien avec la fonction ζ de Riemann grâce à l'hypothèse de Riemann, a été source d'une grande satisfaction.

Mieux encore, on a pu lors d'un devoir à la maison, aboutir à une formulation équivalente de l'hypothèse de Riemann.

2.2.3 Projet TER

Le projet TER que j'ai réalisé en seconde année de magistère, se rapproche du thème de celui effectué en première année puisqu'il s'intitule *Constructibilité à la règle et au compas*. Il a été encadré par M. Daniel Perrin qui m'a beaucoup conseillé et aidé dans la suite de ma scolarité, notamment pour les concours d'enseignement.

Ainsi, ce sujet autour de la constructibilité à la règle et au compas est historiquement très ancien. Mais c'est avec l'arrivée de la théorie des groupes, des corps et celle de Galois que l'on a réussi à résoudre ces problèmes anciens que sont la quadrature du cercle, la duplication du cube ou encore la constructibilité de polygones réguliers à la règle et au compas.

Ainsi, ce projet TER a été riche d'enseignements, m'a fait découvrir la théorie de Galois et aborder cette fois-ci un pan fondamental de l'algèbre étudié pour l'agrégation. Je reste de plus, très satisfaite d'avoir réussi à réaliser moi-même la construction d'un polygone régulier à 17 côtés à la règle et au compas (voir annexes).

Après l'obtention de mon master 1, j'ai décidé naturellement de passer le concours de l'agrégation et donc d'interrompre pendant un an le magistère, afin d'intégrer le M2 *Formation de Professeurs Agrégés en mathématiques* (FPA).

2.3 Troisième année de magistère

2.3.1 Cours supplémentaire suivi

L'agrégation en poche, j'ai alors effectué un report de stage pour suivre le M2 recherche *Probabilités et statistiques* d'Orsay.

J'ai repris ainsi le magistère en cours, et la troisième année de magistère consistait alors à suivre et à valider un cours supplémentaire du M2. Etant vraiment passionnée par ce M2, j'ai donc suivi et validé 5 cours supplémentaires : *Grandes déviations*, *Transitions de phase*, *Concentration et sélection de modèles*, *Statistiques et théorie de l'information*, *Modèles pour la classification non supervisée*.

Même si j'avais choisi le M2 orienté plus vers les statistiques car c'est une discipline enclin à de nombreuses applications variées, les cours de probabilités m'ont permis d'élargir ma culture scientifique et de garder une certaine ouverture d'esprit. Par exemple, grâce au deux cours *Grandes déviations* et *transitions de phase* de M. Raphaël Cerf, j'ai pu approfondir certaines notions survolées dans le programme de statistiques de l'agrégation et avoir les réponses aux quelques questions que je me posais.

De plus, j'y ai rencontré celui qui allait devenir mon futur maître de stage.

2.3.2 Stage

Au second semestre de ce M2, j'ai alors effectué un stage obligatoire de 4 mois en partenariat avec le CEA sous la direction de M. Gilles Celeux, M. Patrick Pamphile et Mme Krystyna Biletska. Celui-ci portait sur l'*application des méthodes CART et forêts aléatoires au problème d'estimation de l'état de charge d'une batterie électrique*.

Ce stage a fait le lien entre la théorie apprise lors des cours de ce M2 et la mise en pratique de celle-ci qui n'est pas toujours évidente. En effet, lors de ce stage, j'ai eu affaire à une très grande base de données et il a fallu d'une part, savoir les gérer et d'autre part, appliquer les méthodes d'apprentissages sur celle-ci. Un travail bibliographique s'est avéré alors nécessaire.

Ainsi, ce stage m'a apporté une expérience des plus concrètes dans le monde de la recherche, de mettre en lumière l'importance des partenariats et dialogues entre les différents acteurs du développement de la recherche en mathématiques appliquées.

Enfin, et non des moindres, ce stage m'a ouvert les portes de la thèse que j'effectuerai pendant les trois ans à venir, sous la direction de M. Gilles Celeux et de M. Patrick Pamphile que je remercie chaleureusement de m'avoir fait confiance. Elle sera par conséquent, dans le prolongement de mon stage et s'intitulera *Modèles de classification pour l'analyse de données temporelles*. La prochaine partie de ce mémoire sera par conséquent consacrée à la présentation du contexte de ma thèse et je reste très motivée pour la suite de mes aventures dans le monde envoûtant que constituent les mathématiques.

3 Présentation du domaine de recherche : Application des méthodes CART et forêts aléatoires au problème d'estimation de l'état de charge d'une batterie électrique

3.1 Contexte appliqué

Une batterie élémentaire est un système électrochimique complexe.

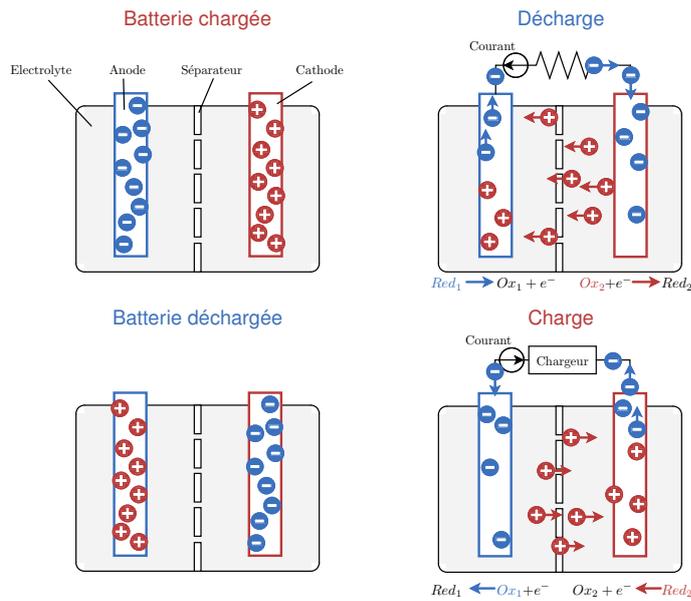


FIGURE 1 – Charge/Décharge d'une batterie élémentaire

En effet elle se compose de deux électrodes (anode et cathode) et d'un électrolyte qui permet de faire passer les ions d'une électrode à une autre (voir figure 1).

Lorsque la batterie est chargée, les ions se retrouvent à la cathode et inversement lorsque la batterie est déchargée. Lors du phénomène de décharge, un dispositif est branché et un courant circule. Les électrons se déplacent alors dans le sens contraire donné au courant. Pour rejoindre la cathode, les ions utilisent l'électrolyte et l'anode est dit "réducteur". De manière analogue, on peut décrire le phénomène de charge.

Ensuite, rappelons quelques définitions utiles pour la suite dans la compréhension de la problématique.

Définition 1. Tension. La *tension* U de la batterie est la différence des potentiels entre deux électrodes.

Définition 2. Courant. Le *courant* est la charge électrique traversant un conducteur par une unité de temps et portée par les électrons dans une électrode (courant électronique) ou par les ions dans un électrolyte (courant ionique).

Définition 3. Charge, décharge. La *quantité de charge*, fournie par la batterie durant sa décharge, est calculée comme une intégrale de courant de décharge sur une période de décharge $[t_1; t_2]$:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I_t dt.$$

Elle est mesurée en ampère-heure (Ah).

Définition 4. Capacité C . C'est la quantité maximale de charge, qui peut être obtenue en déchargeant complètement à courant constant, la batterie initialement complètement chargée.

Définition 5. Régime de courant. Il est défini comme la *vitesse* à laquelle une quantité de charge équivalente à $\frac{C}{n}$ est extraite de la batterie (décharge) ou fournie à la batterie (charge) durant n heures.

Définition 6. Capacité nominale : C_{nom} . C'est une capacité obtenue sous le régime de décharge nominal i.e. sous certaines conditions de décharge préconisées par le constructeur.

Capacité disponible : C_{disp} . Elle est définie comme la capacité fournie par une batterie, qui n'est pas complètement chargée initialement, sous le régime de décharge non nominal.

Remarque. La température, le régime du courant et l'historique de l'utilisation de la batterie influencent la capacité nominale.

Définition 7. On définit l'état de charge de la batterie ([14]) notée **SOC** (State Of Charge) par :

$$SOC = \frac{C_{disp}}{C_{nom}}$$

Remarque. Cette quantité est souvent difficile à estimer car il y a :

- une influence de la **température interne** : la capacité nominale augmente lorsque la température interne augmente,
- une influence de l'**état de santé** SOH (State Of Health) : la capacité nominale diminue au cours du vieillissement de la batterie,
- une influence du **régime de courant**.

Cependant, nous pouvons répertorier plusieurs méthodes existantes pour estimer l'état de charge d'une batterie ([15],[8]).

Nous citerons la plus usuelle qui est une méthode physique, la méthode coulométrique. En effet, elle consiste à estimer le SOC à l'instant t de la manière suivante :

$$SOC_t = SOC_0 + \frac{1}{C_{nom}} \int_{t_0}^t I(\tau) d\tau \quad (1)$$

Ainsi, cette méthode décrit le SOC à l'instant t comme le SOC à l'instant initial t_0 plus la somme des courants distribués entre t et t_0 .

Cette méthode a l'avantage d'être facile à implémenter et nécessite la mesure du courant uniquement.

Cependant, elle présente quelques inconvénients. En effet, si le capteur de courant est imprécis, on a une accumulation de l'erreur. De plus, comme nous l'avons dit précédemment, il y a un changement de la C_{nom} . Enfin le SOC_0 est difficile à estimer en temps réel.

On peut alors définir la problématique.

Une batterie d'un véhicule électrique est soumise à plusieurs **charges/décharges** partielles et complètes. Les mesures suivantes sont prélevées à chaque instant : **température interne**, température externe, **courant** et **tension** de la batterie.

La problématique est donc la suivante : estimer **l'état de charge** de la batterie d'un véhicule électrique en temps réel à partir d'une très grande base de données : mesures instantanées de la **température interne**, **ambiante**, du **courant** et de la **tension**. Il y a là une volonté de trouver une méthode qui puisse prendre en compte une très grande base de données. C'est pourquoi les enjeux soulevés par cette problématique vont être les suivants :

1. Appliquer les méthodes **Classification And Regression Trees (CART)** et **forêts aléatoires** aux problèmes d'estimation de SOC car d'une part ils permettent de prendre en compte une **grande base de données** issues de roulages réels et contenant des mesures instantanées de la **température interne**, de la **température ambiante**, du **courant**, et de la **tension** de la batterie.
D'autre part, ce sont des méthodes applicables en temps réel.
2. Évaluer la **robustesse** des méthodes par rapport aux différentes utilisations de la batterie.
3. Réussir à adapter ces deux méthodes pour prendre en compte l'aspect temporel

3.2 Contexte théorique

3.2.1 Méthode d'apprentissage statistique

On considère un modèle de régression (dans notre cas non linéaire) : soit (X, Y) variable aléatoire dans $(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ et satisfaisant :

$$Y = f(X) + \epsilon, \quad (2)$$

où ϵ bruit centré, de variance σ^2 et f fonction de régression à estimer.

Comme la loi P de (X, Y) est inconnue, on veut reconstruire f à partir d'un échantillon :

$$\mathcal{L} = \{(x_t, y_t)\}_{t=1, \dots, n}$$

composé de n réalisations indépendantes de (X, Y) et où x_t sont les variables explicatives et y_t sont les variables à expliquer.

Le but de l'apprentissage supervisé ([9]) est de construire un modèle statistique en proposant un estimateur \hat{f} de la fonction f (2).

L'élaboration et la validation du modèle sont faites avec deux ensembles distincts de données :

$$\mathcal{L}_{app} = (x_t; y_t)_{t=1, \dots, k}, \quad (3)$$

appelé ensemble d'apprentissage, qui est utilisé pour construire le modèle, l'ensemble, dit de validation,

$$\mathcal{L}_{val} = (x_t; y_t)_{t=k+1, \dots, j}$$

qui est utilisé pour calibrer les paramètres du modèle, et l'ensemble dit de test,

$$\mathcal{L}_{test} = (x_t; y_t)_{t=j+1, \dots, n}$$

qui est utilisé évaluer la qualité du modèle choisi.

Ainsi, étant donné \mathcal{L}_{app} et \mathcal{L}_{test} , le problème consiste à estimer la fonction f , en minimisant le risque de l'estimateur \hat{f} :

$$R(f, \hat{f}) = \mathbb{E}_P \left[\|f - \hat{f}\| \right]_{\mu}$$

où P est la loi marginale de X , $\|\cdot\|_{\mu}$ est choisie ici comme la norme 2 sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^p, \mu)$, ou parfois comme la norme 1.

Mais on ne connaît pas P , donc \hat{f} est obtenu comme celui qui minimise la fonction contraste quadratique empirique ou erreur quadratique moyenne (MSE) :

$$R^*(\hat{f}) = \frac{1}{k} \sum_{(x_t, y_t) \in \mathcal{L}_{app}} (y_t - f(x_t))^2 \quad (4)$$

Par ailleurs, si nos estimateurs \hat{f} dépendent d'un paramètre α , on utilise l'échantillon de validation pour calibrer au mieux ce paramètre en choisissant $\hat{\alpha}$ qui minimise

$$\frac{1}{n - j + 1} \sum_{(x_t, y_t) \in \mathcal{L}_{val}} (y_t - \hat{f}(x_t, \alpha))^2.$$

Enfin, on valide notre modèle en souhaitant que la qualité de notre estimateur décrite par l'erreur quadratique moyenne des résidus ou erreur de généralisation (MSE residuals) (ou MAE residuals pour la norme 1) :

$$R_*(\hat{f}) = \frac{1}{n - k} \sum_{t=k+1}^n (\hat{f}(x_t) - y_t)^2 \quad (5)$$

soit la meilleure.

3.2.2 CART

La méthode CART est ainsi une méthode d'apprentissage statistique. Plus précisément, c'est une méthode de régression non paramétrique qui est utilisée pour construire des arbres de décision qui permettent de prendre un ensemble de décisions basé sur les données explicatives afin d'estimer la variable à expliquer. Ils servent ensuite, étant donné un nouvel échantillon de variables explicatives, à estimer la variable à expliquer relatif à celui-ci.

La construction des arbres de décision à partir de données est une discipline déjà ancienne. Les statisticiens en attribuent la paternité à Morgan et Sonquist (1963) qui, les premiers, ont utilisé les arbres de régression dans un processus de prédiction et d'explication (AID Automatic Interaction Detection). Il s'en est suivi toute une famille de méthodes, étendues jusqu'aux problèmes de discrimination et classement, qui s'appuyaient sur le même principe de la représentation par arbres (THAID – Morgan et Messenger, 1973 ; CHAID – Kass, 1980). On considère généralement que cette approche a connu son apogée avec la méthode CART (Classification and Regression Tree) de Breiman et al. décrite en détail dans une monographie intitulée Classification And Regression Trees de 1984 ([4]) et qui fait encore référence aujourd'hui.

Elle a été ensuite implémentée pour le logiciel R en 1997 par T. Therneau, B. Atkinson et B. Ripley sous le paquet `rpart` ([12]) et contient des parties implémentées en C, ce qui optimise le code. Il existe par ailleurs d'autres paquets similaires sur R comme `tree` ou `party`, mais `rpart` reste le plus largement utilisé, notamment pour sa rapidité.

Par ailleurs, pour ce qui est de la représentation visuelle des arbres, un paquet `rpart.plot` a été implémenté pour le logiciel R en 2012 par Stephen Milleborrow ([13]) et permet d'améliorer la représentation déjà existante dans `rpart`, pour plus de lisibilité et d'esthétisme (voir figure 2).

Les arbres de régression sont des arbres de décision binaires. Rappelons la définition rigoureuse de ces derniers :

Définition 8. *Un arbre binaire est une structure de données qui peut se représenter sous la forme d'une hiérarchie dont chaque élément est appelé **nœud**, le nœud initial étant appelé **racine**.*

*Dans un arbre binaire, chaque élément possède au plus deux éléments fils au niveau inférieur, habituellement appelés **nœud fils gauche** et **nœud fils droit**. Du point de vue de ces éléments fils, l'élément dont ils sont issus au niveau supérieur est appelé père.*

*Un nœud n'ayant aucun fils est appelé **feuille**. Le nombre de niveaux total, autrement dit la distance entre la feuille la plus éloignée et la racine, est appelé hauteur de l'arbre.*

Le niveau d'un nœud est appelé profondeur.

Le principe des arbres de régression consiste à partitionner de manière récursive et dyadique l'espace d'entrée \mathbb{R}^p dans lequel sont définies les variables explicatives .

Cette partition est réalisée à l'aide de conditions imbriquées sur les variables explicatives.

Définition 9. *Nous appelons **coupure** un élément de la forme*

$$S(j, d) \cup S(j, d)^c = \{x_t | x_t^j \leq d\} \cup \{x_t | x_t^j > d\}$$

où $j \in \{1, \dots, p\}$ est le numéro d'une variable explicative et d un seuil (voir figure 3).

Nous noterons $S_1, \dots, S_m, \dots, S_M$ les régions formant cette partition. Sur la figure 3, nous avons schématisé un arbre où S_1^1, \dots, S_1^3 représentent des coupures. Chaque région S_m est donc l'intersection

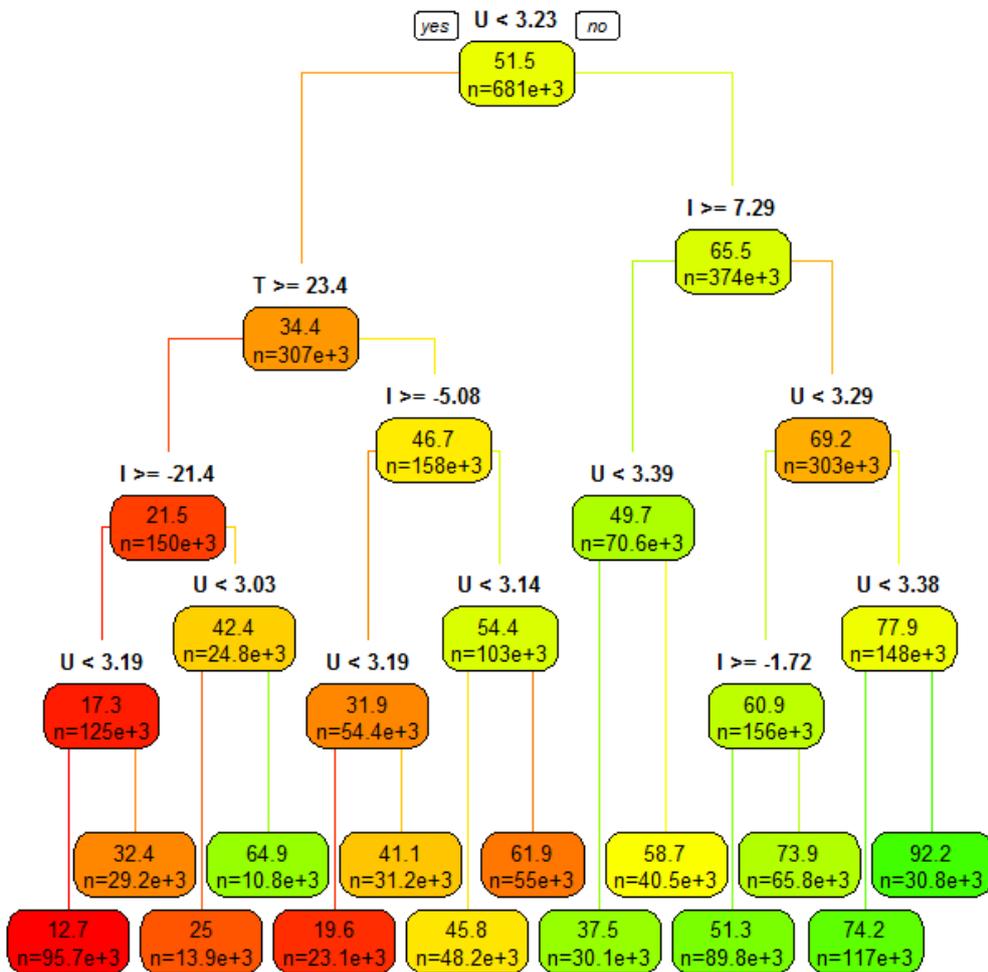


FIGURE 2 – Exemple d'arbre de régression avec le paquet rpart et rpart.plot de R (voir partie 3.3)

de coupures.

Dans notre cadre d'étude, nous associerons à chaque région S_m une valeur constante c_m . Nous cherchons donc un estimateur \hat{f} de f (cf. (2)) sous la forme :

$$\hat{f}(x) = \sum_{m=1}^M c_m \mathbf{1}_{x \in S_m}.$$

Par la suite, nous devons déterminer c_m et S_m de telle sorte que \hat{f} minimise (4).

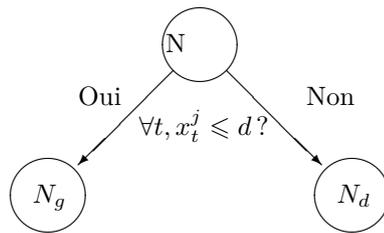


FIGURE 3 – Schématisation d'une coupure

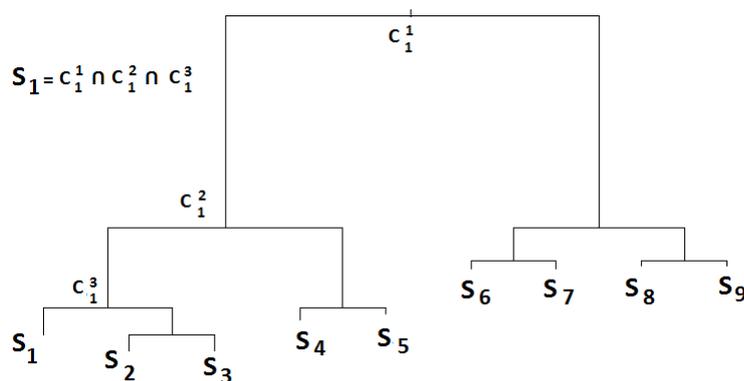


FIGURE 4 – Correspondance entre régions et feuilles de l'arbre

Coupure optimale.

On va préciser la règle de coupure qui permettra d'obtenir un tel estimateur :

Proposition 1. *Le découpage optimal $S(\hat{j}, \hat{d})$ est obtenu pour le couple (\hat{j}, \hat{d}) vérifiant :*

$$\begin{aligned} (\hat{j}, \hat{d}) &\in \operatorname{argmin}_{(j,d)} \left[\min_{c_1 \in \mathbb{R}} R^*(c_1 \mathbb{1}_{S(j,d)}) + \min_{c_2 \in \mathbb{R}} R^*(c_2 \mathbb{1}_{S(j,d)^c}) \right] \\ &\in \operatorname{argmin}_{(j,d)} \left[\min_{c_1 \in \mathbb{R}} \sum_{x_t \in S(j,d)} (y_t - c_1)^2 + \min_{c_2 \in \mathbb{R}} \sum_{x_t \in S(j,d)^c} (y_t - c_2)^2 \right] \end{aligned}$$

La méthode sélectionne alors la meilleure coupure, c'est-à-dire le couple (j, d) qui vise à diminuer à chaque étape l'erreur quadratique moyenne (MSE) (cf (4)) des nœuds fils.

Une fois la racine de l'arbre scindée en deux, on se restreint à chacun des nœuds fils et on recherche alors, suivant le même procédé, la meilleure façon de les découper en deux nouveaux nœuds, et ainsi de suite.

Remarques.

1. Une coupure est dite **admissible** si aucun des nœuds fils engendrés n'est vide.
2. Autrement dit, la meilleure segmentation $\hat{S} \in \mathcal{S}$ d'un nœud N est celle qui fera le plus décroître

$R^*(\hat{f}_N)$ i.e. :

$$\hat{S} = \operatorname{argmax}_{S \in \mathcal{S}} \Delta R(S, N), \quad (6)$$

où $\Delta R(S, N) = R^*(\hat{f}_N) - R^*(\hat{f}_{N_g}) - R^*(\hat{f}_{N_d})$.

- Il existe d'autres versions de cet algorithme comme MARS, C4.5 ou CHAID qui utilisent des critères autres que l'erreur quadratique moyenne (MSE) pour choisir les meilleures coupures ([12]). Par exemple, CHAID (CHI-squared Automatic Interaction Detector) utilise un test du Chi-deux et ne prend en compte que des variables qualitatives comparé à CART qui permet d'utiliser indifféremment les deux sortes de variables : qualitatives ou quantitatives.

La proposition suivante permet de simplifier le double problème d'optimisation 6 et permet de déterminer enfin les c_m :

Proposition 2. *En assimilant un nœud N et la partie correspondante $S(j, d)$ (j et d fixés), la valeur associée à N sera :*

$$\operatorname{argmin}_{c \in \mathbb{R}} R^*(c \mathbf{1}_{S(j,d)}) = \frac{1}{|\{x_t \in S(j, d)\}|} \sum_{x_t \in S(j,d)} y_t = \bar{Y}_{S(j,d)}$$

où la somme est prise sur toutes les variables à expliquer y_t telles que $x_t \in S(j, d)$.

D'où le problème de coupure optimale devient :

$$\begin{aligned} (\hat{j}, \hat{d}) &\in \operatorname{argmin}_{(j,d)} \left[\min_{c_1 \in \mathbb{R}} \sum_{x_t \in S(j,d)} (y_t - c_1)^2 + \min_{c_2 \in \mathbb{R}} \sum_{x_t \in S(j,d)^c} (y_t - c_2)^2 \right] \\ &= \operatorname{argmin}_{(j,d)} \left[\sum_{x_t \in S(j,d)} (y_t - \bar{Y}_{S(j,d)})^2 + \sum_{x_t \in S(j,d)^c} (y_t - \bar{Y}_{S(j,d)^c})^2 \right]. \end{aligned}$$

Conclusion. *Ainsi, l'arbre de régression T obtenu correspond à l'estimateur des moindres carrés \hat{f}_T de f sur l'espace des fonctions constantes par morceaux sur la partition formée par les feuilles définie par $(S_m)_{m=1, \dots, M}$. Ainsi, on a*

$$\hat{f}_T(x) = \sum_{m=1}^M \hat{c}_m \mathbf{1}_{x \in S_m} = \sum_{m=1}^M \bar{Y}_{S_m} \mathbf{1}_{x \in S_m}$$

La méthode CART peut être vue ainsi comme une *sélection de modèle* sur des sous-espaces de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^p, \mu)$ de *fonctions constantes par morceaux*, définies sur des partitions finies de \mathbb{R}^p .

On peut maintenant exhiber un **pseudo-code** associé à l'algorithme CART :

- Commencer à la racine de l'arbre et associer à celle-ci toutes les observations $\{x_t = (x_t^1, \dots, x_t^p), y_t\}$ de l'échantillon d'apprentissage.
- Choisir la coupure optimale $\hat{S} = (x^{\hat{j}} < \hat{d})$ comme dans la proposition 1.
- Une fois la coupure optimale choisie, associer à chaque nœud fils la valeur présentée dans la proposition 2
- Si le **critère d'arrêt** choisi atteint un seuil fixé à l'avance, terminer l'algorithme et l'arbre construit sera dit **maximal**. Sinon, appliquer l'étape 2 à **chaque nœud fils** à son tour.

Intéressons-nous maintenant aux critères d'arrêt évoqués dans la troisième étape du pseudo-code.

Critères d'arrêt.

Il existe plusieurs règles d'arrêt qui permettent de décider si un noeud est une feuille :

Noeud pur. *Un noeud devient une feuille lorsqu'il n'existe plus de coupure admissible. On dit alors que le noeud est pur.*

Profondeur maximale. *L'arbre atteint une profondeur maximale notée `maxdepth` fixée par l'utilisateur. La profondeur par défaut sur `rpart` est 30 et nous conserverons cette valeur pour ne pas tenir compte de ce critère.*

Taille du noeud. *Elle consiste à ne pas découper N si le nombre d'observations de \mathcal{L}_n contenues dans N est inférieure à un certain nombre noté `nodesize`. La valeur par défaut est 25 sur `rpart` et nous la conserverons également.*

Paramètre de complexité c_p . *Elle consiste à ne pas découper le noeud N via la segmentation optimale \hat{S} si $\Delta R(S, N) \geq c_p$. La valeur par défaut dans `rpart` est 0.01. Par la suite, nous essaierons de calibrer au mieux ce paramètre.*

Les critères utilisés dans le package `rpart` peuvent être réglés par l'utilisateur.

3.2.3 Forêts aléatoires

La définition générale des forêts aléatoires est la suivante :

Définition 10. *Soit $(\hat{f}(\cdot, \Theta_1), \dots, \hat{f}(\cdot, \Theta_L))$ une collection d'estimateurs par arbre, où $(\Theta_1, \dots, \Theta_L)$ est une suite de variables aléatoires i.i.d., indépendante de l'échantillon d'apprentissage \mathcal{L}_n . L'estimateur par forêt aléatoire est obtenu par *agrégation* (c'est à dire en faisant la moyenne de cette collection d'estimateurs).*

Remarques. Le terme forêt aléatoire vient du fait que les estimateurs individuels sont, ici, explicitement des estimateurs par arbre.

Concernant le vocabulaire des forêts aléatoires, il existe une ambiguïté dans la littérature. En effet, Leo Breiman, dans son article de 2001 ([3]), définit les forêts aléatoires comme ci-dessus. Les forêts aléatoires sont donc pour lui une famille de méthodes.

Or, dans le même article, il présente un cas particulier de forêts aléatoires, appelées Random Forests-RI (Random Inputs), qu'il a ensuite implémentées et dont nous verrons juste après l'algorithme ([5],[11]).

Par suite, ce sont ces Random Forests-RI qui ont été utilisées dans de très nombreuses applications réelles. Et pour cause, le programme est accessible à tous, facile d'utilisation et la méthode atteint des performances exceptionnelles. Finalement, la dénomination "forêts aléatoires" désigne dans toute la suite les Random Forests-RI.

Comment construit-on de tels objets? Pour ce faire, on a besoin de la définition d'un échantillon bootstrap :

Définition 11. *Un échantillon bootstrap \mathcal{L}_n^Θ est obtenu en tirant aléatoirement n observations avec remise dans l'échantillon d'apprentissage \mathcal{L}_n , chaque observation ayant une probabilité $\frac{1}{n}$ d'être tirée. La variable aléatoire Θ représente alors ce tirage aléatoire. L'algorithme définissant les Random Forest-RI est le suivant :*

1. Pour $\ell = 1, \dots, L$ faire :
 - (a) Engendrer un échantillon bootstrap $\mathcal{L}_n^{\Theta_\ell}$.

-
- (b) Créer un arbre aléatoire T_ℓ associé à $\mathcal{L}_n^{\Theta_\ell}$ en répétant récursivement les trois étapes suivantes pour chaque nœud de l'arbre jusqu'à ce que *nodesize* soit atteint :
- (i) Choisir aléatoirement et uniformément m variables explicatives parmi p .
 - (ii) Prendre le meilleur couple variable explicative/seuil pour ces m variables au sens de la proposition 2.
 - (iii) Découper le nœud en deux nœuds fils comme dans l'algorithme CART.
2. Renvoyer la collection d'arbres $(T_\ell)_{\ell=1,\dots,L}$ obtenue.

Conclusion. *L'estimateur par forêt aléatoire est obtenue de la façon suivante pour tout $x \in \mathbb{R}^p$:*

$$\widehat{f}_{RF}^L(x) = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \widehat{f}_{T_\ell}(x).$$

Remarques.

1. Le tirage, à chaque nœud, des m variables se fait sans remise et uniformément parmi toutes les variables (chaque variable a une probabilité $\frac{1}{p}$ d'être choisie). Le nombre m ($m \leq p$) est fixé au début de la construction de la forêt et est donc identique pour tous les arbres. Généralement, pour des problèmes de régression on choisit $m = E(\frac{p}{5})$.
2. Pour les Random Forests-RI, il y a donc deux sources d'aléas pour engendrer la collection des estimateurs individuels : l'aléa dû au bootstrap et l'aléa dû au choix des variables pour découper chaque nœud d'un arbre. Ainsi, on perturbe à la fois l'échantillon sur lequel on lance la règle de base, et à la fois le cœur de la construction de la règle de base.
Ainsi, l'explication des performances des forêts aléatoires réside dans le fait que rajouter un aléa supplémentaire pour construire les arbres, rend ces derniers encore plus différents les uns des autres, sans pour autant dégrader leurs performances individuelles. L'estimateur agrégé est alors meilleur. ([1],[4]).

3.3 Perspectives et questions ouvertes

En théorie, les méthodes proposées sont capables de prendre en compte une très grande base de données, c'est d'ailleurs pour cela que nous les avons choisies. Mais en pratique, nous nous sommes rendus compte que certes elles prenaient en compte plus de données que la plupart des autres méthodes, mais pas assez pour celles que nous avons à traiter. L'une des perspectives serait d'essayer d'améliorer cet aspect restrictif.

Par ailleurs, lors du descriptif de ces méthodes, nous avons pu voir qu'à aucun moment elles ne prennent en compte l'aspect temporel de nos données. Certes, lors de mon stage, nous avons appliqué telles quelles ces deux méthodes à notre très grande base donnée mais les résultats n'ont pas été entièrement satisfaisants. C'est pour cela qu'on pourrait se demander si l'on ne peut pas adapter ces méthodes de régression à l'analyse de données temporelles. Affaire à suivre...

Références

- [1] Biau G., Devroye L., Lugosi G., *Consistency of random forests and other averaging classifiers*. Journal of Machine Learning Research 9 2015-2033, 2008.
 - [2] Breiman L., Friedman J.H., Olshen R.A., Stone J.H., *Classification and regression trees*. Chapman and Hall, 1984.
 - [3] Breiman L., *Random Forests*. Machine Learning, 45 (2001) 5-32. 2001.
-

-
- [4] Breiman L., *Bagging predictors*. Machine Learning, 24(1996) 123—140.
 - [5] Breiman L., *RfTools-for predicting and understanding data*. Technical report Berkeley University USA, 2004.
 - [6] Genuer R., *Forêts aléatoires : aspects théoriques, sélection de variables et applications*. Thèse Université Paris-Sud, Orsay 2010.
 - [7] Gey S., *Bornes de risque, détection de ruptures, boosting : trois thèmes statistiques autour de CART en régression*. Thèse Université Paris-Sud, Orsay 2002.
 - [8] Hansen T., Wang C-H., *Support vector based battery state of charge estimator*. Journal of Power Sources 141, 351-358, 2005.
 - [9] Hastie T., Tibshirani R., Friedman J., *The Elements of Statistical Learning*. Second edition, Springer 2009.
 - [10] Kim H., Loh WY, Shih YS, Chaudhuri P., *Visualizable and interpretable regression models with good prediction power*. IIE Transactions 39, 565-579, 2007.
 - [11] Liaw A., Wiener M., *Classification and regression by random forest*. R News, 2 (3) 18-22, 2002.
 - [12] Loh WY, *Classification and regression trees*. WIREs Data Mining Knowl Discov 1, 14-23, 2011.
 - [13] Milleborrow S., *Plotting rpart trees with prp*. <http://www.milbo.org/rpart-plot/prp.pdf>. 2012.
 - [14] Pang S., Farrell J., Du J., Barth M., *Battery state-of-charge estimation*. Proceedings of the American Control Conference, June 2001, vol. 2, p. 1644-1649 2001.
 - [15] Piller S., Perrin M., *Methods for state-of-charge determination and their application*. Journal of Power Sources 96 113-120, 2001.
 - [16] Therneau TM., Atkinson B., *RPART : recursive partitioning*. R port by B. Ripley. R package version 3.1-41, 2008.
 - [17] Venables WN., Ripley BD., *Modern Applied Statistics with S*. Fourth Edition, p258, 2002.
 - [18] Verikas A., Gelzinis A., Bacauskiene M., *Mining data with random forests : a survey and results of new tests*. Pattern recognition, 2011

4 Conclusion

Les trois années de magistères ont été pour moi l'occasion de m'épanouir dans le monde des mathématiques, de confirmer mon engouement pour cette discipline et de mettre aussi toutes les chances de mon côté afin de concrétiser mon projet professionnel . Elles ont été également le théâtre de mes plus belles rencontres tant amicales que professionnelles et j'en garde un excellent souvenir rempli d'anecdotes, de travail acharné et d'amour des mathématiques.

5 Annexes : mémoires et documents rédigés dans le cadre du magistère

5.1 Première année du magistère

5.1.1 Projet TER : Sur la transcendance de e et de π

Compte-rendu de projet:
Transcendance de e et de π

Valérie ROBERT

Mai 2009

Table des matières

1	Qu'est ce que la transcendance d'un nombre?	2
1.1	Définition	2
1.2	Historique	2
1.3	Exemples de nombres transcendants	2
1.4	Existence des nombres transcendants	3
2	Démonstration de la transcendance de e	3
2.1	Outils et déroulement de la preuve	3
2.2	Première étape : minorer J	4
2.3	Deuxième étape : majorer J	6
2.4	Conclusion	7
3	Démonstration de la transcendance de π	7
3.1	Outils et déroulement de la preuve	7
3.2	Utilisation de la relation d'Euler	8
3.3	Obtention de l'égalité	8
3.4	Etude du premier membre de l'égalité	9
3.5	Etude du second membre de l'égalité	11
3.6	Conclusion	12

1 Qu'est ce que la transcendance d'un nombre ?

1.1 Définition

Un nombre **transcendant** est un nombre réel ou complexe qui n'est racine d'aucune équation polynomiale du type :

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$$

où $n \geq 1$ et les coefficients a_k sont des **nombre entiers** et dont l'un au moins des a_n est non nul.

Remarque :

1. Un nombre réel ou complexe est donc transcendant si et seulement si il n'est pas algébrique.
2. Les nombres transcendants ne sont jamais rationnels. En revanche, tous les nombres irrationnels ne sont pas transcendants.

1.2 Historique

Tout d'abord, il semblerait que ce soit **Leibniz** qui s'interrogea le premier sur l'existence de nombres qui ne satisfont pas les polynômes à coefficients rationnels.

Ensuite, ce fut à **Liouville** de s'y intéresser et il prouva notamment l'existence de tels nombres.

J. Lambert quant à lui, conjectura que e et π étaient transcendants et ce ne fut qu'en 1873 que **Hermite** démontra la transcendance de e .

Quelques années plus tard, **Lindermann** proposa une démonstration de la transcendance de π en 1882 à laquelle nous allons nous attacher.

En 1900, **David Hilbert** a posé une importante question à propos des nombres transcendants, connue sous le nom de septième problème de Hilbert : Si a est un nombre algébrique non nul et différent de 1 et si b est un nombre algébrique irrationnel, alors le nombre a^b est-il nécessairement transcendant ? Grâce au théorème de Gelfond-Schneider, nous pouvons affirmer que la réponse est oui et il nous permet ainsi de fournir quelques exemples de nombres transcendants.

1.3 Exemples de nombres transcendants

A part les nombres e et π , il existe d'autres nombres dont la transcendance a été prouvée :

- e^π (constante de Gelfond)
- $2^{\sqrt{2}}$ (constante de Gelfond-Schneider) ou plus généralement a^b (voir le théorème de Gelfond-Schneider) où $a \neq 0$ et $a \neq 1$ et a est algébrique et b est algébrique mais non rationnel.
- La valeur de la fonction trigonométrique $\sin(1)$
- $\ln(a)$ si a est un rationnel strictement positif et différent de 1.
- $\Gamma(1/3), \Gamma(1/4), \Gamma(1/6)$

1.4 Existence des nombres transcendants

D'une part, l'argument de la diagonale de Cantor établit que les nombres réels (et donc les nombres complexes aussi) sont indénombrables. D'autre part, puisque les polynômes à coefficients entiers sont dénombrables, et comme chacun de ces polynômes possède un nombre fini de zéros, l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable. Ainsi, certains nombres réels (ou complexes) ne sont pas algébriques, et donc transcendants.

2 Démonstration de la transcendance de e

2.1 Outils et déroulement de la preuve

La preuve est basée sur un raisonnement par l'absurde. Ainsi, supposons que e n'est pas transcendant, id est algébrique et donc qu'il existe des entiers n , $q_0 \neq 0$ et q_1, \dots, q_n tels que :

$$\sum_{k=0}^n q_k e^k = 0 \quad (1)$$

Introduisons :

$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} f(u) du$$

où f est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et $\deg f = m$.

La preuve consiste à considérer

$$J = \sum_{k=0}^n q_k I(k)$$

où $I(t)$ est défini comme précédemment et l'on choisit :

$$f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \cdots (x-n)^p$$

avec p un nombre entier premier amené à être grand, et à obtenir deux inégalités sur J qui se contredisent.

Remarque : Ici $m = \deg f = (n+1)p-1$

2.2 Première étape : minorer J

On va intégrer m fois par parties la fonction $e^{t-u} f(u)$.

En posant $v'(u) = e^{t-u}$ on obtient :

$$\begin{aligned} I(t) &= [v(u)f(u)]_0^t - \int_0^t v(u)f'(u) du \\ &= [-e^{t-u}f(u)]_0^t - \int_0^t -e^{t-u}f'(u) du \\ &= -f(t) + f(0)e^t + \int_0^t e^{t-u}f'(u) du \end{aligned}$$

Procédons à la seconde intégration par parties :

$$\begin{aligned} I(t) &= -f(t) + f(0)e^t + \int_0^t e^{t-u}f'(u) du \\ &= -f(t) + f(0)e^t - f'(t) + f'(0)e^t + \int_0^t e^{t-u}f^{(2)}(u) du \\ &= e^t(f(0) + f'(0)) - (f(t) + f'(t)) + \int_0^t e^{t-u}f^{(2)}(u) du \end{aligned}$$

Ainsi, après $m+1$ intégrations par parties on obtient :

$$\begin{aligned} I(t) &= e^t \sum_{k=0}^m f^{(k)}(0) - \sum_{k=0}^m f^{(k)}(t) + \int_0^t e^{t-u} \underbrace{f^{(m+1)}(u)}_{=0} du \\ D'où : I(t) &= e^t \sum_{k=0}^m f^{(k)}(0) - \sum_{k=0}^m f^{(k)}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Ainsi, grâce à (1) et (2), on peut donner une expression simplifiée de J . En

effet,

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{k=0}^n q_k I(k) \\
 &= \sum_{k=0}^n q_k \left(e^k \sum_{j=0}^m f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m f^{(j)}(k) \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(q_k e^k \sum_{j=0}^m f^{(j)}(0) \right) - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f^{(j)}(k) \\
 &= \sum_{j=0}^m f^{(j)}(0) \underbrace{\left(\sum_{k=0}^n q_k e^k \right)}_{=0 \text{ par (1)}} - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f^{(j)}(k)
 \end{aligned}$$

Finalement, on a montré que :

$$J = - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f^{(j)}(k)$$

Maintenant, nous allons étudier $f^{(j)}(k)$ et montrer que J est non nul divisible par $(p-1)!$ mais pas par $(p)!$.

– Cas où $j < p$

comme $f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \dots (x-n)^p$, les entiers k tels que sont racines d'ordre p de f donc $f^{(j)}(k) = 0$ si $j < p$.

De plus $k=0$ est racine d'ordre $p-1$ de f , donc $f^{(j)}(k) = 0$ si $j < p-1$ et $k = 0$.

Enfin si $k=0$ et $j = p-1$, on a par la formule de Leibniz :

$$f^{(p-1)}(0) = (0-1)^p (0-2)^p \dots (0-n)^p (p-1)! = (p-1)! (-1)^{np} (n!)^p \quad (3)$$

Donc, $\forall j < p$, $(p-1)!$ divise $f^{(j)}(k)$. Remarquons également que si l'on suppose $p \leq n$, alors p ne divise pas $(n!)$ et donc par $(p)!$ ne divise pas $f^{(p-1)}(0)$ et a fortiori J . Ainsi $J \neq 0$

– Cas où $j \geq p$

La dérivation introduit un $p!$ qui divise alors $f^{(j)}(k)$.

Conclusion : J est un entier non nul qui est divisible par $(p-1)!$ mais pas par $(p)!$ donc on a :

$$\boxed{|J| \geq (p-1)!} \quad (4)$$

2.3 Deuxième étape : majorer J

Dans un second temps, on va majorer $|I(t)|$ pour pouvoir a fortiori majorer J .

Comme $u \in [0, t]$ pour $t > 0$ et de même si $t < 0$ on peut écrire $|e^{t-u}| \leq e^{|t|}$

$$|I(t)| \leq \left| \int_0^t e^{t-u} f(u) du \right| \leq \int_0^t |e^{t-u} f(u)| du$$

D'où on en déduit que :

$$|I(t)| \leq |t| e^{|t|} \max_{u \in [0, t]} |f(u)| \quad (5)$$

Nota Bene : Dans la suite, on notera $\mathring{f}_t = \max_{u \in [0, t]} |f(u)|$

Par conséquent, grâce à (5) on obtient :

$$|J| \leq \sum_{k=0}^n |q_k I(k)| \leq \sum_{k=1}^n |q_k| k e^k \mathring{f}_k$$

Or,

$$\mathring{f}_k \leq |k^{p-1}(k-1)^p \cdots (k-n)^p| \leq n^{p-1}(n+1)^p \cdots (2n)^p \leq (2n)^m$$

avec $m=p(n+1)-1$ Finalement,

$$\boxed{|J| \leq c(2n)^{p(n+1)}} \quad (6)$$

où c est une constante indépendante de p .

2.4 Conclusion

Ainsi, si l'on choisit p suffisamment grand, par comparaison la factorielle l'emporte sur la puissance, et donc les inégalités (4) et (6) se contredisent, ce qui conclut la preuve.

3 Démonstration de la transcendance de π

3.1 Outils et déroulement de la preuve

Voici les outils nécessaires à la construction de la preuve :

Lemme 1 Si α n'est pas transcendant alors $i\alpha$ n'est pas transcendant.

Le théorème suivant sur les polynômes symétriques est la clef de voûte de la démonstration : **Théorème** Si $f \in A[t_1, \dots, t_n]$ est un polynôme symétrique de degré d , il existe $g \in A[t_1, \dots, t_n]$ de poids au plus égal à d tel que $f(t_1, \dots, t_n) = g(s_1, \dots, s_n)$

Corollaire Soient A et B des anneaux commutatifs et unitaires tels que $A \subset B$. Soient $P(X)$ un polynôme unitaire de $A[X]$ ayant toutes ses racines α_i dans B . Si x est polynôme en $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ à coefficients dans A et symétrique par rapport à $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, alors $x \in A$.

Là aussi, on raisonne par l'absurde, id est que π est algébrique et donc par le lemme que $i\pi$ l'est aussi. Il existe donc a_0, a_1, \dots, a_n avec $a_n \neq 0$ tels que :

$$\sum_{k=0}^n a_k (i\pi)^k = 0$$

Alors $a_n i\pi$ est racine du polynôme $X^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} a_n^k X^{n-k}$

Remarque : Toute cette petite manipulation a permis d'aboutir à un polynôme qui contrairement à l'autre est unitaire. on le notera Φ_1 .

et on pose $a = a_n$. On notera les racines dans \mathbb{C} de Φ_1 , $a\alpha_1, \dots, a\alpha_n$. De plus, comme $a_i\pi$ est l'une de ces racines on décidera de prendre $\alpha_1 = i\pi$.

Ainsi, la preuve consiste à partir d'un polynôme, de trouver une égalité le concernant et de montrer que le premier membre est un entier non nul alors que le second membre a une valeur absolue inférieure à $1/2$.

3.2 Utilisation de la relation d'Euler

Dans la suite de la preuve, on va utiliser une propriété fondamentale de π , à savoir $e^{i\pi} = -1$ et par conséquent si on reprend les notations, on a

$$\prod_{k=1}^n (e^{\alpha_k} + 1) = 0$$

Remarque importante : Ce qui est important ici c'est que ce polynôme est symétrique en les α_k .

Par ailleurs, si l'on développe le produit on obtient l'égalité suivante :

$$1 + \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k} + \sum_{k,j} e^{\alpha_k + \alpha_j} + \dots + e^{\alpha_1 + \alpha_n} = 0 \quad (7)$$

Maintenant, $\forall k \in [2 \dots n]$ on considère $\phi_k(X)$ ayant pour racines les sommes des $a\alpha_j$ pris k à k .

Comme les coefficients du polynôme ϕ_k sont des polynômes symétriques en les $a\alpha_i + a\alpha_j + \dots + a\alpha_k$ à fortiori en les $a\alpha_i$. Donc par le corollaire, on a que les coefficients de ϕ_k sont dans \mathbb{Z} .

Considérons $\prod_{k=1}^n \phi_k$ qui est donc un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ et qui a pour racines les $a\beta$ où les β sont les exposants non nuls dans (7).

On note $R(X)$ le polynôme unitaire obtenu à partir de $\prod_{k=1}^n \phi_k$ et on note $\deg R = s \geq 1$.

Conclusion : Ainsi on a obtenu un polynôme unitaire à coefficients dans \mathbb{Z} de ayant pour racines les complexes non nuls $a\beta_1 \dots a\beta_s$ et tels que par la relation (7) :

$$b + \sum_{k=1}^s e^{\beta_k} = 0 \quad (8)$$

où b est un entier positif non nul qui est produit par les termes d'exposants nuls.

3.3 Obtention de l'égalité

Soit p un nombre premier et considérons :

$$P(X) = \frac{(aX)^{p-1} R(aX)^p}{(p-1)!}$$

on a alors $\deg P = ps + p - 1$. Par ailleurs, posons :

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{ps+p-1} P^{(k)}(X)$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[e^{-\beta x}Q(\beta x)] &= -\beta e^{-\beta x}Q(\beta x) + \beta e^{-\beta x}Q'(\beta x) \\ &= -\beta e^{-\beta x}P(\beta x) \end{aligned}$$

Ainsi on en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \beta e^{-\beta x}P(\beta x) dx &= [-e^{-\beta x}Q(\beta x)]_0^1 \\ &= Q(0) - e^{-\beta}Q(\beta) \end{aligned}$$

On obtient alors en multipliant tout par e^β :

$$e^\beta Q(0) - Q(\beta) = S(\beta) \quad (9)$$

$$\text{avec } S(\beta) = \beta e^\beta \int_0^1 e^{-\beta x}P(\beta x) dx \quad (10)$$

Cette dernière égalité est valable pour tous les $a\beta_1 \cdots a\beta_s$ et en sommant les s égalités on obtient :

$$Q(0) \sum_{k=1}^s e^{\beta_k} - \sum_{k=1}^s Q(\beta_k) = \sum_{k=1}^s S(\beta_k) \quad (11)$$

Ainsi en remplaçant $\sum_{k=1}^s e^{\beta_k}$ par son expression grâce à (8) on a enfin l'égalité avec laquelle nous pourrions aboutir à une contradiction :

$$\boxed{bQ(0) + \sum_{k=1}^s Q(\beta_k) = -\sum_{k=1}^s S(\beta_k)} \quad (12)$$

3.4 Etude du premier membre de l'égalité

On va montrer que celui-ci est un entier non nul.

Etude de $\sum_{k=1}^s Q(\beta_k)$

La somme dans le premier membre fait intervenir les dérivées successives de P . En effet, on a :

$$\sum_{k=1}^s Q(\beta_k) = \sum_{k=1}^s \sum_{j=0}^{ps+p-1} P^{(j)}(\beta_k)$$

Remarque : On convient que $P^{(0)}(\beta_k) = P(\beta_k)$ Pour calculer et simplifier l'écriture on fait appel à la formule de Liebniz :

$$P^{(j)}(X) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} [(aX)^{p-1}]^{(i)} [R(aX)^p]^{(j-i)}$$

- Comme $a\beta_k$ est une racine de R , si $0 \leq j < p$ alors $P^{(j)}(\beta_k) = 0$
- En revanche si $p \leq j$, comme il faut dériver p fois R , $p!$ s'introduit au numérateur et se simplifie avec $(p-1)!$ ce qui laisse un p au numérateur. Donc, comme $\frac{1}{p} \sum_{k=1}^s P^{(j)}(\beta_k)$ est un polynôme symétrique en les $a\beta_k$ et à coefficients dans \mathbb{Z} , on en déduit grâce au corollaire, que $\sum_{k=1}^s P^{(j)}(\beta_k)$ est dans \mathbb{Z}

D'où comme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^s Q(\beta_k) &= \sum_{k=1}^s \sum_{j=0}^{ps+p-1} P^{(j)}(\beta_k) \\ &= \sum_{k=1}^s \sum_{j \geq p} P^{(j)}(\beta_k) \\ &= \sum_{j \geq p} \sum_{k=1}^s P^{(j)}(\beta_k) \end{aligned}$$

on a ainsi que $\sum_{k=1}^s Q(\beta_k)$ est un multiple de p , id est $\sum_{k=1}^s Q(\beta_k) = qp$ avec $q \in \mathbb{Z}$.

Etude de $Q(0)$

On a

$$Q(0) = \sum_{j=0}^{ps+p-1} P^{(j)}(0)$$

- Si $0 \leq j \leq p - 2$, comme X est en facteur $P^{(j)}(0) = 0$
- Si $j=p-1$ $P^{(p-1)}(0) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} [(aX)^{p-1}]^{(i)} [R(aX)]^{(p-1-i)}$.
Comme il y a X en facteur le seul terme non nul correspond à $i=p-1$ et donc on a $P^{(p-1)}(0) = a^{p-1} R(0)^p$
- si $j \geq p$ de même, un derivation introduit un $p!$ et donc il reste un p au numérateur et ainsi $P^{(j)}(0)$ est un multiple de p , id est il existe $q' \in \mathbb{Z}$ tel que $P^{(j)}(0) = q' p$

Conclusion

On a montré que :

$$\begin{aligned} bQ(0) + \sum_{k=1}^s Q(\beta_k) &= q' p + qp + b a^{p-1} R(0)^p \\ &= M p + b a^{p-1} R(0)^p \end{aligned}$$

avec $M \in \mathbb{Z}$

Ainsi comme $R(0) \neq 0$ et si l'on choisit $p > \text{Max}(b, |a|, |R(0)|)$, $bQ(0) + \sum_{k=1}^s Q(\beta_k)$ est un **entier non nul**.

3.5 Etude du second membre de l'égalité

le second membre de l'égalité est $-\sum_{k=1}^s S(\beta_k)$ où $S(\beta_k) = \beta_k e^{\beta_k} \int_0^1 e^{-\beta_k x} P(\beta_k x) dx$
Montrons que la valeur absolue du second membre est strictement inférieur à 1.

$$\begin{aligned} |P(\beta_k x)| &\leq \frac{|a \beta_k|^{p-1} H_k^p}{(p-1)!} \\ |S(\beta_k)| &\leq K_k \frac{|a \beta_k|^{p-1} H_k^p}{(p-1)!} \\ &\leq K_k H_k \frac{(|a \beta_k| H_k)^{p-1}}{(p-1)!} \end{aligned}$$

où $H_k = \sup_{0 \leq x \leq 1} |R(a \beta_k x)|$

et $K_k = |\beta_k e^{\beta_k}| \int_0^1 |e^{-\beta_k x}| dx$

Ainsi comme $\frac{(|a\beta_k|H_k)^{p-1}}{(p-1)!}$ est le terme général d'une série convergente, la série exponentielle à fortiori ce terme tend vers 0 quand $p \rightarrow \infty$. Donc il existe m_k tel que si $p \geq m_k$ on ait $|S(\beta_k)| \leq \frac{1}{2^s}$. Par conséquent, si $p \geq \max_{1 \leq k \leq s} m_k$:

$$\left| \sum_{k=1}^s -S(\beta_k) \right| \leq \frac{1}{2}$$

3.6 Conclusion

Ainsi si l'on prend un nombre premier p tel que $p \geq \max_{1 \leq k \leq s} m_k$ et $p > \max(b, |a|, |R(0)|)$ alors le premier membre de l'égalité (12) est **un entier non nul** alors que le second membre a **un module strictement inférieur à 1**, donc contradiction!!!!
 π est donc transcendant.

5.1.2 Rapport de stage : Influence des paramètres environnementaux sur le comportement des prédateurs supérieurs dans le canal du Mozambique

Rapport de stage (1^{ère} année de magistère) :

*Influence des paramètres environnementaux sur le
comportement des prédateurs supérieurs dans le canal du
Mozambique*



*Stagiaire : Robert Valérie
Juillet/Août 2009*

*Organisme d'accueil : Laboratoire
d'Informatique et de Mathématiques*

Table des matières

<i>1 Introduction</i>	<i>3</i>
<i>2 Cadre général</i>	<i>3</i>
<i>2.1 Zone d'étude.....</i>	<i>3</i>
<i>2.2 Paramètres environnementaux.....</i>	<i>5</i>
<i>2.2.1 Températures de surface.....</i>	<i>5</i>
<i>2.2.2 Concentration en chlorophylle.....</i>	<i>6</i>
<i>2.2.3 Anomalies de hauteur d'eau.....</i>	<i>7</i>
<i>2.2.4 Répartition des prédateurs.....</i>	<i>7</i>
<i>3 Observations et premiers résultats</i>	<i>9</i>
<i>3.1 Reproduction des sternes</i>	<i>9</i>
<i>3.2 Dynamique sterne/ thon.....</i>	<i>10</i>
<i>4 Modélisation du problème.....</i>	<i>11</i>
<i>4.1 Modèle général.....</i>	<i>11</i>
<i>4.2 La relation de Gompertz.....</i>	<i>12</i>
<i>4.3 Plan d'étude.....</i>	<i>12</i>
<i>5 Résultats.....</i>	<i>13</i>
<i>5.1 Simulations 2003.....</i>	<i>13</i>
<i>5.2 Simulations 2004.....</i>	<i>14</i>
<i>6 Conclusion.....</i>	<i>15</i>

1 Introduction

L'objectif de ce stage a été pour moi, d'étudier un système dynamique, en l'occurrence celui portant sur la population de prédateurs supérieurs, à savoir les thons et les sternes (*sterna fuscata*) en relation avec certains paramètres environnementaux dans le sud ouest de l'Océan Indien.

Dans un premier temps, il a été question de collecter des données statistiques concernant ces deux espèces grâce à une précieuse collaboration avec l'IRD, institut de recherche et développement et le laboratoire ECOMAR.

Ensuite, nous avons fait quelques observations qui nous conduisent à ébaucher un modèle général concernant ces deux espèces versus l'environnement. Ce modèle étant trop compliqué, nous nous sommes concentrés sur une partie du modèle, soit celle concernant les sternes.

Enfin, cette étude a été l'occasion de participer à un colloque : le 6ème congrès scientifique de WIOMSA (Western Indian Ocean Marine Science Association) qui s'est tenu à la Réunion et qui a permis de présenter notre travail (en anglais) et d'ouvrir de nouvelles perspectives et coopérations.

2 Cadre général

2.1 Zone d'étude

Celle-ci se situe dans le sud ouest de l'Océan Indien, et plus précisément dans le canal du Mozambique. Premièrement, dans cette région, les paramètres biologiques d'espèces d'oiseaux marins ont été suivis par l'équipe du laboratoire ECOMAR. En vue des données disponibles, nous avons décidé de s'intéresser aux

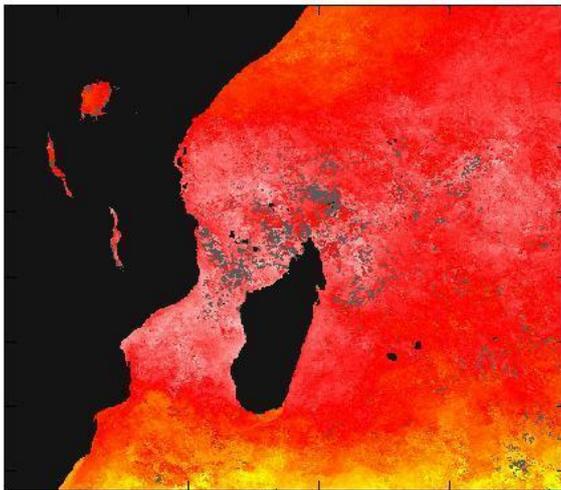
sternes fuligineuses dont le nom scientifique est *sterna fuscata* qui vivent principalement dans l'île d'Europa située ici comme nous le montre la carte suivante :



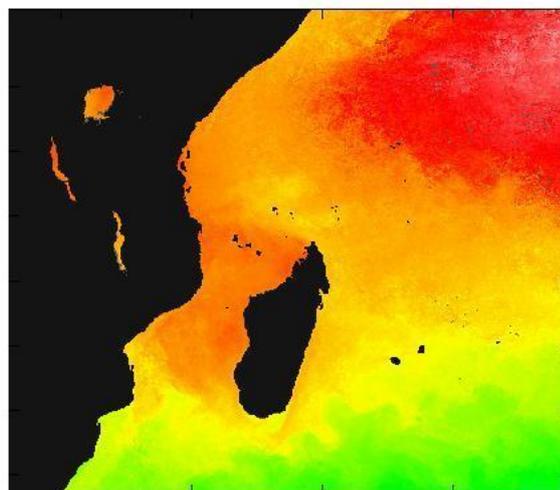
Deuxièmement, on peut noter que cette zone est le théâtre d'une pêche industrielle, notamment celle des thons. Enfin, dans cette région il ya des contrastes marqués concernant l'environnement océanique. C'est pourquoi on peut se demander si ces contrastes ont une influence sur le comportement des prédateurs supérieurs. Nous nous sommes donc focalisés sur 3 paramètres : à savoir les températures des eaux de surface, la concentration de chlorophylle et les anomalies de hauteur d'eau.

2.2 Paramètres environnementaux

2.2.1 Les températures de surface



Austral summer



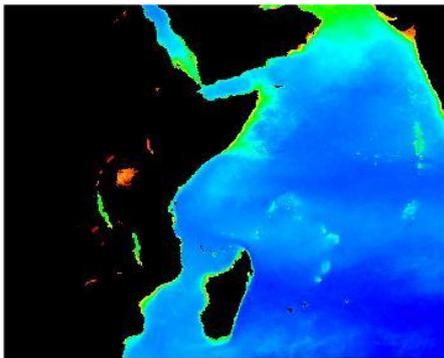
Austral winter

A gauche, on peut avoir la zone pendant l'été austral et à droite pendant l'hiver. Bien sûr, les températures sont plus hautes en été qu'en

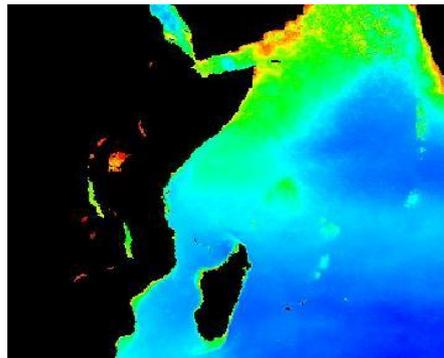
hiver. Par ailleurs on peut noter que la répartition n'est pas homogène et que le canal du Mozambique en rouge est l'un des endroits les plus chaudes de la zone considérée.

2.2.2 La concentration de chlorophylle

La concentration de chlorophylle se révèle être un excellent indicateur de la production primaire dans la zone. Considérons la carte suivante :



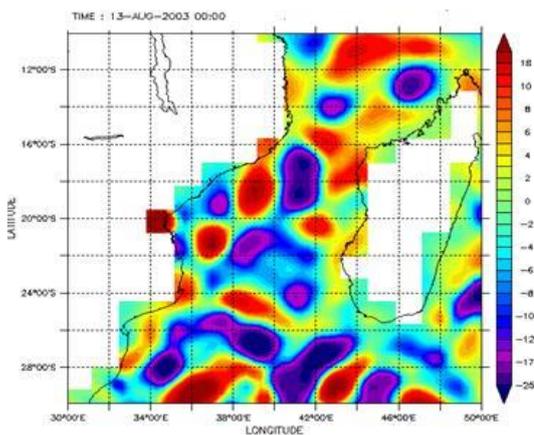
Austral summer



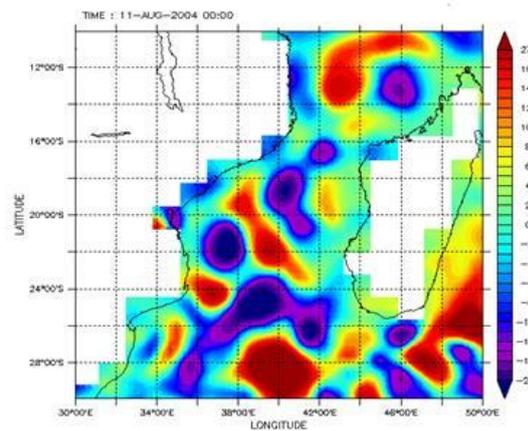
Austral winter

La première chose que l'on peut noter c'est que la encore la distribution n'est pas homogène et on peut ajouter qu'en hiver, les Seychelles en vert sous l'influence de l'upwelling de Somalie, ce qui est favorable à la production primaire.

2.2.3 Les anomalies de hauteur d'eau



Août 2003



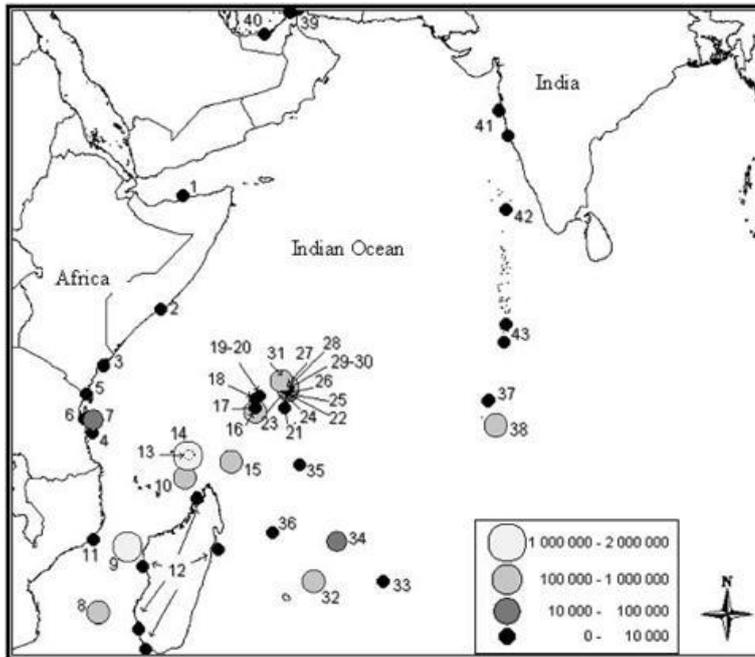
Août 2004

On voit que ces anomalies varient d'une année à l'autre pour une même période. Ainsi il existe une sensible variabilité de ce paramètre en relation avec les saisons mais aussi avec la zone géographique. Nous pouvons donc légitimement penser que ces 3 paramètres influencent les dynamiques de population des thons et des sternes.

2.2.4 Répartition des prédateurs

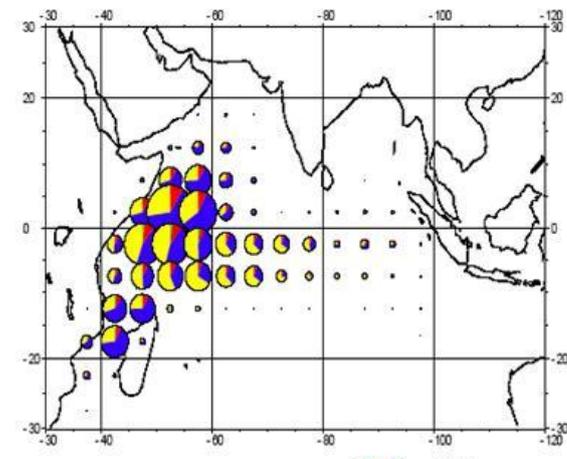
Intéressons nous maintenant aux prédateurs supérieurs considérés. D'une part, cette zone concentre de nombreuses et importantes populations de prédateurs supérieurs, en particulier celle d'oiseaux marins et de thons. D'autre part de 6 millions de couples d'oiseaux nichent dans le sud ouest de l'océan indien, dont 99 % sont

des sternes fuligineuses. Comme on peut le constater sur la carte suivante, les deux principaux foyers de population sont les Seychelles et le canal du Mozambique qui contiennent à elles-deux plus de 90 % des sternes fuligineuses de la zone étudiée.

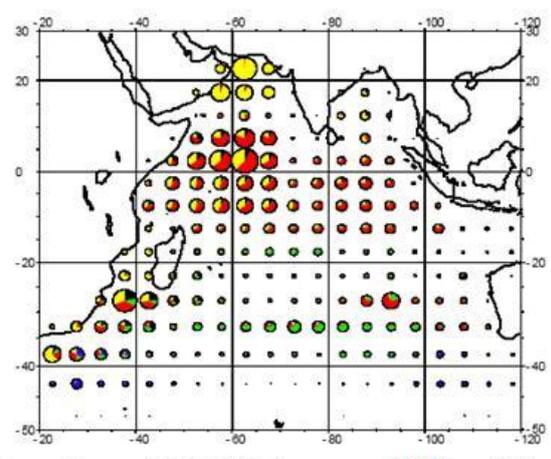


Distribution and sooty tern colony size (*Sterna fuscata*) in number of breeding pairs in the SWOI

Concernant la distribution de thon et la pêche de ces derniers, les Seychelles et le Canal du Mozambique sont les principales zones :



Purse seine : 450 000 t



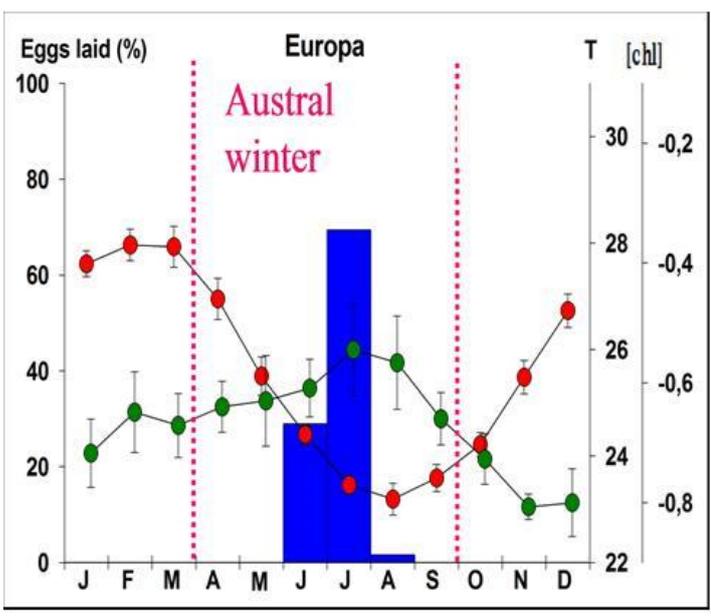
Longline : 300 000 t

Annual catches of tuna by the purse seiners and longliners in the Indian Ocean

Ainsi ceci s'avère intéressant étant donné que les oiseaux marins sont associés dans la chaîne alimentaire avec les thons pour se nourrir.

3 Observations et premiers résultats

3.1 Reproduction des sternes

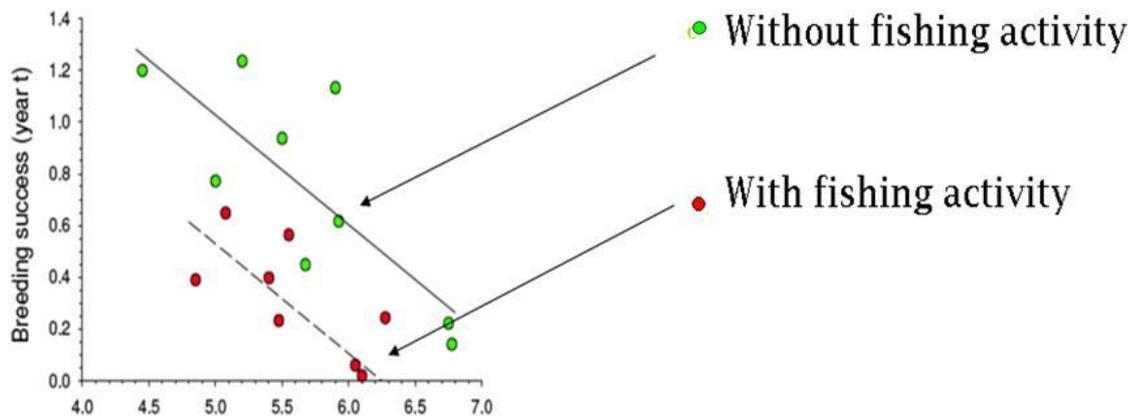


- Temperatures (T)
- Chlorophyll rate ([chl])
- Terns' clutch



Tout d'abord, la courbe en rouge représente les changements de température pendant l'année 2007, celle en verte les variations de la concentration de chlorophylle et enfin en bleu nous avons la ponte des sternes. Ainsi le graphe montre que les sternes pondent en hiver austral, spécialement en juin et juillet. De plus, la ponte est importante quand les températures sont les plus basses et quand la concentration de chlorophylle est la plus forte. Ainsi, on peut aisément suspecter une corrélation entre tous ces phénomènes.

3.2 Dynamique sterne/thon

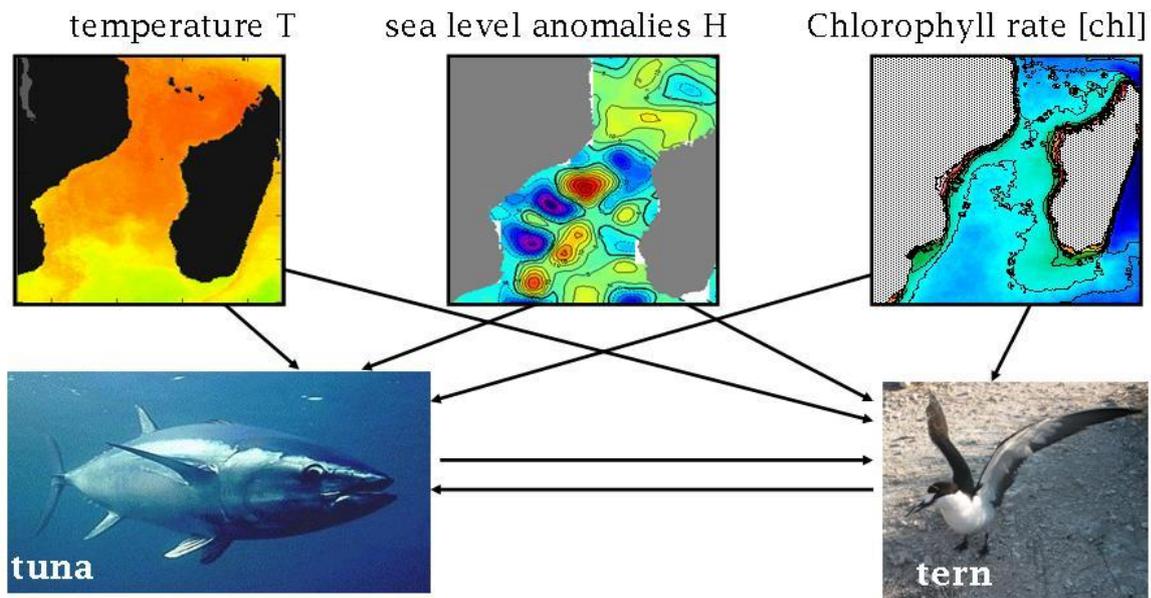


De plus, grâce à cet autre graphique, on peut supposer que le succès de reproduction des sternes est peut être conditionné par la dynamique de population des thons car il est plus important lorsque il y a de la pêche, et donc moins de thons.

4 Modélisation du problème

4.1 Modèle général

Ainsi toutes des observations nous conduisent à considérer le modèle suivant :



Et on peut même ajouter des flèches entre la concentration en chlorophylle et les températures par exemple. Bien sûr, comme on peut le constater, ce modèle est très compliqué et pour une première approche, on a choisi d'étudier une partie du modèle à savoir la dynamique de population des sternes versus l'influence environnementale :

4.2 La relation de Gompertz

D'une part, pour décrire cette dynamique, nous avons sélectionné la relation de Gompertz, un modèle classique utilisé par bon nombre de biologistes. D'autre part, on a ajouté 3 termes linéaires afin de prendre en compte l'influence de l'environnement :

$$dL/dt = a \exp(-\exp(b - c t)) + d T + e H + f [chl] \quad (1)$$

- L : tern growth



- t : time

- T : temperature

- a, b, c : biological parameters

- H : sea level anomalies

- d, e, f : environmental parameters

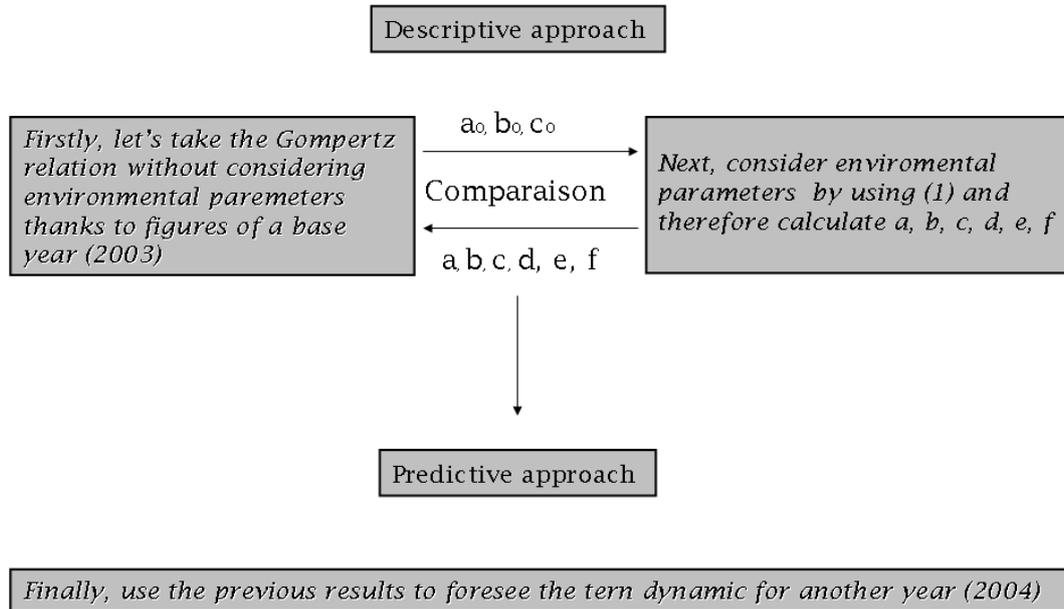
- $[chl]$ chlorophyll concentration

units : day, gram, degree Celsius,
cubic centimeter

4.3 Plan d'étude

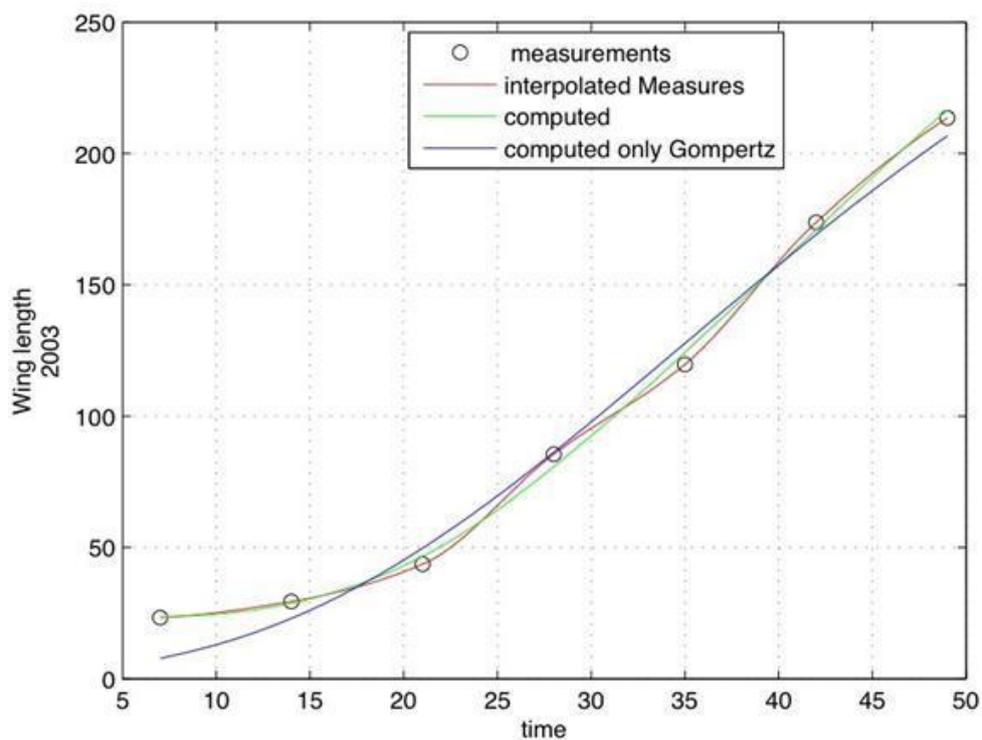
Celui est simple : on va commencer par une approche descriptive. En effet, on va prendre 2003 comme année de référence et étudier le modèle de Gompertz sans les termes modélisant les paramètres environnementaux d'une part, et d'autre part on fera l'étude en considérant ces derniers. L'objectif est d'identifier a, b, c, d, e, f et de comparer avec les mesures effectuées. Ensuite, avec ces résultats précédents, on tentera une approche prédictive avec l'année 2004. Plus précisément, on va utiliser a, b, c, d, e, f trouvés précédemment et

comparer avec les mesures faites et le modèle théorique sans les paramètres environnementaux :



5 Résultats

5.1 Simulations 2003

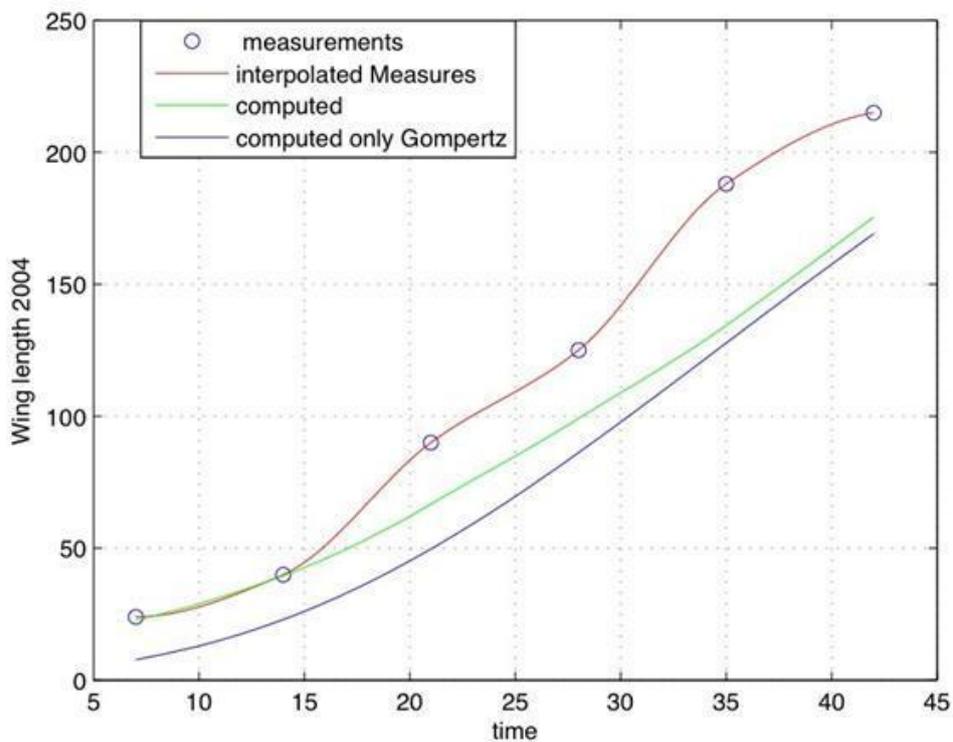


En abscisse, nous avons le temps en jours et en ordonnée la croissance des ailes en cm.

Alors, est représentée en bleue la courbe descriptive du modèle de Gompertz sans paramètres environnementaux, en vert celle où l'on a considéré ces derniers et enfin, les cercles représentent les mesures que nous avons du interpolé en utilisant la méthode des moindres carrés.

Ainsi, on remarque que nous avons de meilleurs résultats quand nous considérons les paramètres environnementaux.

5.2 Simulations 2004



Donc, nous avons fait le même travail avec les données de 2004, mais cette fois pour tracer la courbe représentant la relation de Gompertz plus les paramètres environnementaux, nous avons pris les

valeurs de a, b, c, d, e et f trouvés précédemment en 2003, le but étant de prévoir la dynamique de population des sternes.

Là encore, nous avons des résultats plus proches de la réalité quand l'on prend en compte l'influence environnementale. Mais bien entendu, il reste évident que le modèle n'est pas satisfaisant mais pour une première approche c'est assez encourageant.

6 Conclusion

Ainsi, il est indéniable que les paramètres environnementaux considérés influencent le comportement des sternes et pour approfondir la recherche nous pourrions nous demander si :

- *Est-ce que le modèle est valide?*
- *Les processus biologiques mis en jeu sont-ils suffisamment connus?*

Approfondissement de l'étude :

- *Comprendre mieux les interactions environnementales*
- *Prendre en compte l'interaction avec les thons*
- *Améliorer la précision du modèle*



5.2 Deuxième année de magistère, projet TER : Constructibilité à la règle et au compas

Compte-rendu de projet:
Constructions à la règle et au compas

Valérie ROBERT

Juin 2010

Table des matières

1	Nombres réels constructibles	2
1.1	Points constructibles	2
1.2	Quelques constructions élémentaires	3
1.3	Réels constructibles	6
1.4	Structure et propriétés de l'ensemble \mathcal{K} des nombres constructibles	6
1.5	Caractérisation des éléments de \mathcal{K}	9
2	Applications	16
2.1	Duplication du cube, trisection de l'angle	16
2.2	Quadrature du cercle	17
2.3	Les polygones réguliers	18

1 Nombres réels constructibles

La règle (non graduée) et le compas sont les outils de base permettant de travailler en géométrie.

Ainsi, Euclide a fondé sa géométrie sur un système d'axiomes qui assure en particulier qu'il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points donnés et qu'il est toujours possible de tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné. La géométrie euclidienne est donc la géométrie des droites et des cercles, donc de la règle et du compas.

Grâce à ces derniers, on peut dès lors, faire des constructions simples comme celles d'axe ou de centre de symétrie, de parallèle ou de perpendiculaire, ou plus élaborées comme le polygone à 17 côtés.

1.1 Points constructibles

On travaille dans tout ce qui suit, avec un plan euclidien \mathcal{E} .

On suppose donné un ensemble fini $\mathcal{P} = A_1, \dots, A_n$ de points de \mathcal{E} (avec $n \geq 2$), et on considère deux types de figures (que l'on dira *admissible* relativement à \mathcal{P}) :

1. les droites passant par deux points distincts de \mathcal{P} (que l'on construit à la règle),
2. les cercles, centrés en un point de \mathcal{P} et passant par un autre point de \mathcal{P} (que l'on construit au compas).

Définition 1.1. *Un point M du plan est dit **constructible** en un pas à la règle et au compas à partir de \mathcal{P} s'il existe des figures admissibles relativement à \mathcal{P} dont M est un point d'intersection.*

En d'autres termes, il est constructible à partir de \mathcal{E} si on peut le construire en un nombre fini de pas à partir de \mathcal{P} , id est, s'il existe des points M_1, M_2, \dots, M_r tels que $M_r = M$ et que pour $i = 1, \dots, r-1$, M_{i+1} est constructible en un pas à partir de $\mathcal{P} \cup M_1, \dots, M_i$.

1.2 Quelques constructions élémentaires

a) Médiatrice et perpendiculaire

Soit $[AB]$ un segment.

- La médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et B . On la construit en traçant les cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de centre A (resp B) passant par B (resp A) et en joignant leurs points d'intersection C et D , comme sur la figure 1.

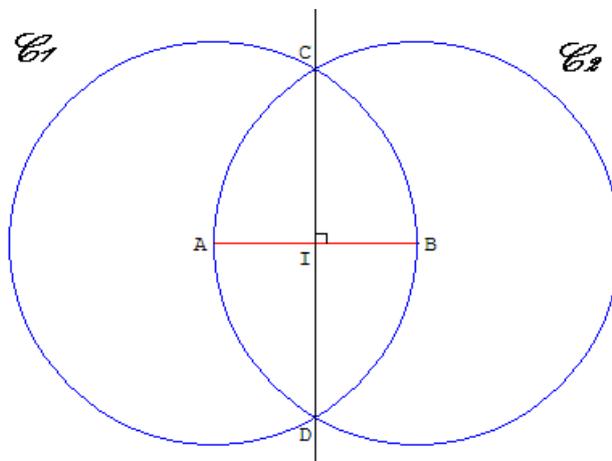


FIGURE 1

- La perpendiculaire à une droite (AB) passant par un point C n'appartenant pas à (AB) s'obtient en traçant les cercles de centres A et B qui passent par C . Ces cercles se recoupent en un point C' et la perpendiculaire est donc (CC') .

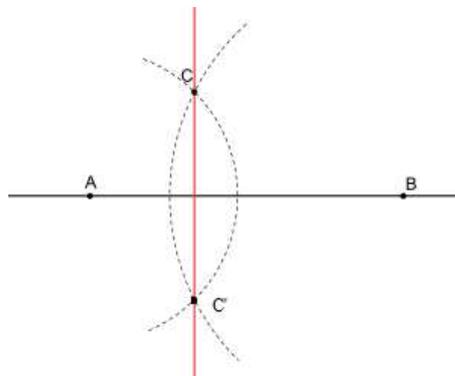


FIGURE 2

b) Parallèle et partage d'un segment

- Il s'agit de construire la parallèle à (AB) passant par C . Pour ce faire, on construit le milieu D du segment $[BC]$ (par exemple par la méthode des médiatrices), ensuite le cercle \mathcal{C} de centre D et passant par A . Enfin, il suffit de tracer la droite $[AD]$, le second point d'intersection entre le cercle et cette dernière étant noté E . La parallèle ainsi cherchée est la droite (EC) .

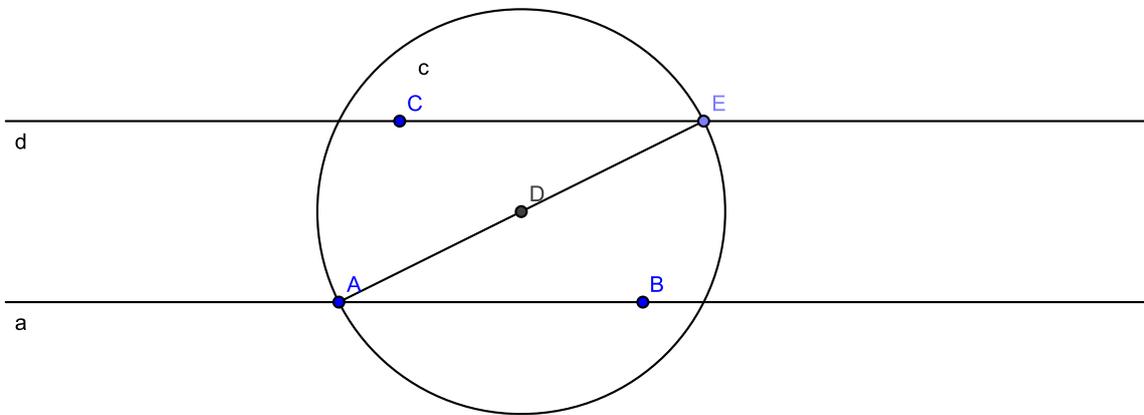


FIGURE 3

- Soit $[AB]$ un segment et p un entier. Il s'agit de partager ce segment en p parties égales. On trace dans un premier temps, une sécante à $[AB]$ passant par A . Ensuite, on prend un écartement de compas et on reporte cet écartement p fois à partir de A . Le dernier point obtenu après p écartements est noté G .

Puis on trace la droite (GB) .

Enfin, on construit à l'aide de la méthode précédente par exemple, les parallèles à (GB) qui passent par les points obtenus successivement après chaque écartement. Elles partagent ainsi, le segment en p parties égales (voir figure 4 où $p=5$).

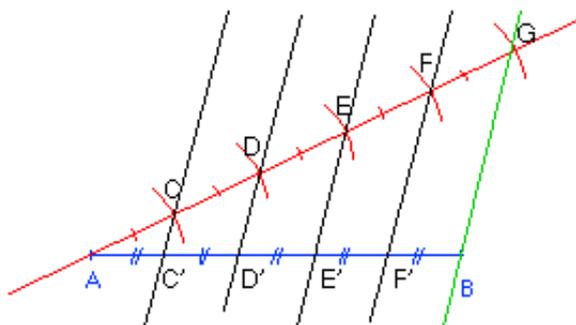


FIGURE 4

c) Report de compas et bissectrice

- Il s'agit lorsqu'on dispose de trois points O, A, B de construire le cercle de centre O et de rayon AB . On construit les parallèles à (AB) passant par O et à (OA) passant par B . Elles se coupent en C et comme $OABC$ est un parallélogramme, on a $AB = OC$. On construit alors le cercle de centre O passant par C .

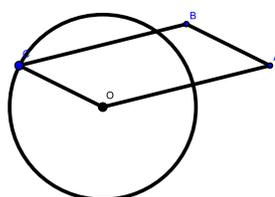


FIGURE 5

- On considère l'angle \widehat{xOy}

On pointe le compas au sommet de l'angle et on trace un premier arc de cercle. On marque les points d'intersection de cet arc avec les deux côtés de l'angle (sur la Figure 5 ils sont notés M et N).

Ensuite, on pointe successivement le compas aux points d'intersection M et N et on trace deux arcs de cercle de même rayon (en gardant le même écartement du compas entre les deux opérations). Enfin on note P le point d'intersection de ces deux arcs.

Ainsi la droite qui relie le sommet de l'angle et le point d'intersection des deux derniers cercles noté P est la bissectrice de l'angle \widehat{xOy} .

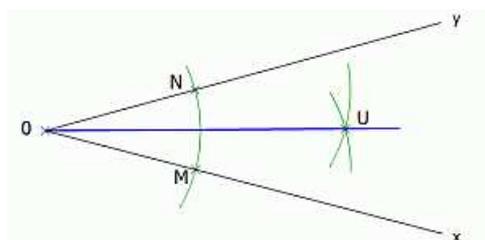


FIGURE 6

1.3 Réels constructibles

Définition 1.2. *Si t est un réel, on dit que t est un nombre constructible si et seulement si le point de l'axe Ox d'abscisse t est un point constructible (même résultat en remplaçant Ox par Oy et abscisse par ordonnée).*

1.4 Structure et propriétés de l'ensemble \mathcal{K} des nombres constructibles

Nous allons montrer que l'ensemble \mathcal{K} des nombres constructibles est un sous-corps de \mathbb{R} qui contient \mathbb{Q} et qui est stable par racine carrée.

Dans cette partie, on se donne O et I deux points dans \mathcal{E} et on prend O comme origine et OI comme unité de longueur. On construit la droite (OI) que l'on prend comme axe des x . Ensuite, on construit le point I' symétrique de I par rapport à O et on trace la médiatrice de $[II']$ et un point J de cette médiatrice tel que $OI = OJ$. Ainsi, on prend O, I, J comme repère orthonormé et (OJ) comme axe des y .

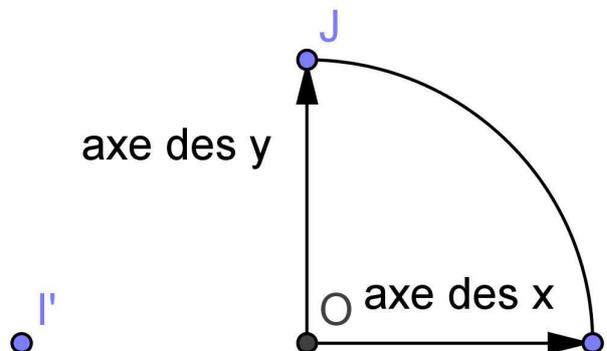


FIGURE 7

a) Les rationnels sont constructibles

Proposition 1.3. *Les nombres rationnels sont constructibles.*

Démonstration. Il suffit de montrer que le point $(\frac{p}{q}, 0)$ est constructible où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Pour ce faire, à partir du point $P = (p, 0)$ qui est constructible, on prend le segment $[OP]$ et on le partage en q parties égales en utilisant la méthode du § b) du 1.2 .

b) Structure de corps

Théorème 1.4. *L'ensemble des nombres constructibles \mathcal{K} est un sous-corps de \mathbb{R} .*

Démonstration. Il faut montrer que \mathcal{K} est stable par $+$, $-$, \times et \div , ie si x et y sont constructibles alors $x+y$, $x-y$, xy et $\frac{x}{y}$ sont constructibles.

1. Si $x \in \mathcal{K}$, alors $-x \in \mathcal{K}$.

En effet, si A est le point de (Ox) d'abscisse x , en utilisant le cercle de centre O passant par A , on construit le point A' de (Ox) d'abscisse $-x$.

2. Si x et y sont dans \mathcal{K} , alors $x + y \in \mathcal{K}$.

Soient A et B les points de (Ox) tels que $\overline{OA} = x$ et $\overline{AB} = y$; A est constructible et B aussi en utilisant le cercle de centre A et de rayon $|y|$. Ainsi, $\overline{OB} = x + y$ et donc $x + y \in \mathcal{K}$.

3. Si x et y sont dans \mathcal{K} , alors $xy \in \mathcal{K}$

. Enlevons le cas trivial où $xy=0$.

Soient A le point de (Ox) tel que $\overline{OA} = x$ et B le point de (Oy) tel que

$$\overline{OB} = y.$$

La parallèle à (IB) passant par A coupe (Oy) en C . D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OI}}$, d'où $\overline{OC} = xy$.

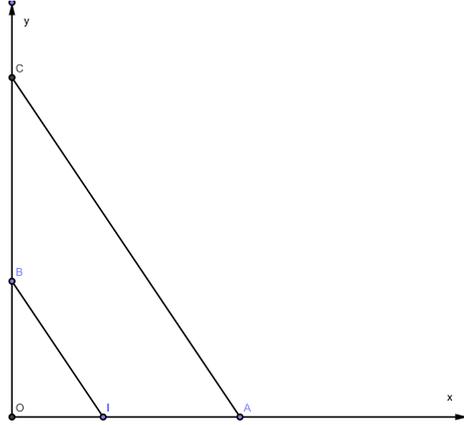


FIGURE 8

4. Si $x \in \mathcal{H}$, alors $\frac{1}{x} \in \mathcal{H}$.

Soit A sur (Ox) tel que $\overline{OA} = x$. La parallèle à (AJ) passant par I coupe (Oy) en B . D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{\overline{OB}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OA}}$. D'où $\overline{OB} = \frac{1}{x}$.

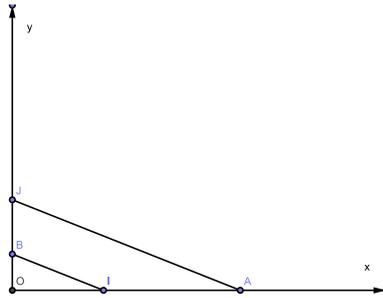


FIGURE 9

c) Stabilité par racine carrée

Proposition 1.5. *Si $x \in \mathcal{K}$ et $x \geq 0$, alors \sqrt{x} est dans \mathcal{K} .*

Démonstration. Supposons $x > 0$ et soit A le point de l'axe (Ox) tel que $\overline{IA} = x$. On se ramène au cas $x > 1$ (si $x < 1$, on construit d'abord la racine de $\frac{1}{x}$ puis on prend l'inverse). On trace le demi-cercle de diamètre OM situé dans le demi-plan $y \geq 0$, puis la perpendiculaire à (OM) en I . Elle recoupe le demi-cercle en A . Le triangle OAM est rectangle donc $\cos \widehat{MOA} = \frac{OA}{OM} = \frac{OI}{OA}$. On en déduit que $OA^2 = OM \times OI = x$. Ainsi $OA = \sqrt{x}$ et on prend l'intersection du cercle de centre O passant par A avec l'axe des x pour obtenir le point cherché.

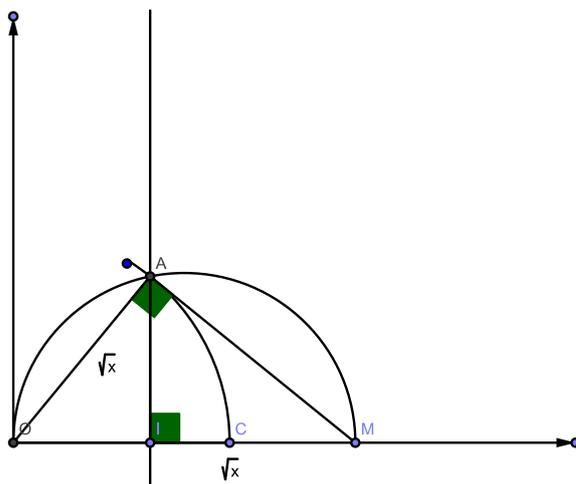


FIGURE 10

Remarque. Ainsi, grâce à ces propriétés que possède l'ensemble des nombres constructibles, on peut d'ores et déjà donner de nombreux exemples de nombres constructibles tels $-\frac{2}{3}$, $\sqrt[4]{3}$, $\frac{2+3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

1.5 Caractérisation des éléments de \mathcal{K}

Théorème 1.6 *Soit x un nombre réel. Alors x est constructible si et seulement si il existe une suite $\mathbb{K}_0, \mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_r$ de sous-corps de \mathbb{R} vérifiant les conditions suivantes :*

1. on a $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$,

2. on a $\mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \dots \subset \mathbb{K}_r$, plus précisément, pour chaque $i = 1, 2, \dots, r$, il existe $d_i \in \mathbb{K}_{i-1}$ tel que $\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{i-1}(\sqrt{d_i})$,
3. on a $x \in \mathbb{K}_r$.

Remarques importantes.

1. Pour $i = 1, \dots, r$ on a $\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{i-1}(\sqrt{d_i})$, et donc :

$$[\mathbb{K}_i : \mathbb{K}_{i-1}] = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{i-1} \\ 2 & \text{sinon car } X^2 - d_i \text{ est le polynôme minimal de } \sqrt{d_i} \text{ sur } \mathbb{K}_i. \end{cases}$$

Dans les deux cas, on a :

$$\begin{aligned} [\mathbb{K}_r : \mathbb{Q}] &= [\mathbb{K}_r : \mathbb{K}_{r-1}] \times [\mathbb{K}_{r-1} : \mathbb{K}_{r-2}] \times \dots \times [\mathbb{K}_1 : \mathbb{Q}] \\ &= 2^j \text{ pour } 1 \leq j \leq r. \end{aligned}$$

De plus, on a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(x) \subset \mathbb{K}_r$ donc $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ est un diviseur de 2^j , c'est donc une puissance de 2 que nous noterons 2^p . Ainsi la famille à $2^p + 1$ éléments : $1, x, x^2, \dots, x^{2^p}$ est liée dans $\mathbb{Q}(x)$ et il existe alors $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^p}$ dans \mathbb{Q} non tous nuls tels que $\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{2^p} x^{2^p} = 0$.

Conclusion : *Tout nombre constructible est algébrique sur \mathbb{Q} et son degré est une puissance de 2.*

2. La réciproque du théorème 1.6 est fautive

Contre-exemple : Considérons le polynôme $P(X) = X^4 - X - 1$. Nous allons montrer grâce à un prochain théorème, que celui-ci est irréductible sur \mathbb{Q} et qu'il possède une racine réelle α non constructible. Ainsi, on aura $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$ qui est une puissance de 2, et donc α est de degré une puissance de 2 mais non constructible.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin d'un lemme préliminaire :

Lemme 1.7. *Soit $\mathcal{P} = M_0 = O, M_1 = I, M_2, \dots, M_r$ un ensemble fini de points de points de \mathcal{E} dont toutes les coordonnées sont dans un sous-corps \mathbb{K} de \mathbb{R} . Soit $M = (x, y)$ un point construit en un pas à partir de \mathcal{P} . Alors, il existe un élément $d \in \mathbb{K}$ tel que $x, y \in \mathbb{K}(\sqrt{d})$.*

Démonstration. Notons \mathcal{D} l'ensemble des droites joignant deux points de \mathcal{P} et \mathcal{C} l'ensemble des cercles centrés en un point de \mathcal{P} et passant par un point de \mathcal{P} .

On sait que M est un point constructible donc il est intersection de deux éléments de \mathcal{D} et/ou de \mathcal{C} . Il faut donc distinguer trois cas :

1. Si $M = (x, y)$ est intersection de deux droites Δ_1 et Δ_2 de \mathcal{D} alors il vérifie l'équation à coefficients dans \mathbb{K} de chacune des deux droites :

$$\begin{cases} ax + by + c & = 0 \\ a'x + b'y + c' & = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on déduit x et y :

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} \qquad y = \frac{-ac' + a'c}{ab' - a'b}.$$

On voit alors que x et y appartiennent à $\mathbb{K}(\sqrt{1})$.

2. Si $M = (x, y)$ est l'intersection d'une droite et d'un cercle, alors M vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} ax + by + c & = 0 \\ x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma & = 0. \end{cases}$$

Si on suppose $b \neq 0$ (si $b = 0$ alors on a $a \neq 0$ et on procèdera de même) alors la première équation se réécrit $y = px + q$ avec $p, q \in \mathbb{K}$. On reporte cela dans la deuxième équation et on montre alors que x est solution de l'équation du second degré suivante :

$$(1 + p^2)x^2 + (2pq + \alpha + \beta p)x + q^2 + \beta q + \gamma = 0.$$

Alors si on note d le discriminant de cette équation, il est dans \mathbb{K} et on a ainsi x qui est dans $\mathbb{K}(\sqrt{d})$. On en conclut aussi grâce aux équations que y est dans $\mathbb{K}(\sqrt{d})$.

3. Si $M = (x, y)$ est intersection de deux cercles de \mathcal{C} , alors M vérifie :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma' & = 0 \\ x^2 + y^2 + \alpha'x + \beta'y + \gamma' & = 0. \end{cases}$$

Par différence, on se ramène au cas précédent.

Démonstration du Théorème 1.6. On montre par récurrence sur r la propriété $P(r)$ suivante :

Si $\mathcal{P} = M_0 = O, M_1 = I, M_2, \dots, M_r$ sont des points du plan tels que, pour $i = 1, \dots, r-1, M_{i+1}$ soit construit en un pas à partir de \mathcal{P} , alors il existe une suite de corps $\mathbb{K}_0, \dots, \mathbb{K}_r$ vérifiant les conditions du

théorème 1.6 et tels que les coordonnées de tous les M_i soient dans \mathbb{K}_r .

La propriété est vraie pour $r = 0$.

Supposons la propriété vraie pour r et montrons $P(r+1)$.

Les coefficients des points M_0, \dots, M_r sont dans \mathbb{K}_r par hypothèse de récurrence. On rajoute un point $M = M_{r+1}$ construit en un pas à partir des M_i . D'après le lemme 1.7 les coordonnées de M sont dans un corps $\mathbb{K} = \mathbb{K}(\sqrt{d})$ avec $d \in \mathbb{K}_r$, et on ajoute ainsi \mathbb{K}_{r+1} à la suite des \mathbb{K}_i .

Théorème 1.7. *Soit x un nombre réel algébrique de polynôme minimal P . Alors x est constructible si et seulement si le corps de décomposition de P , $D_P(\mathbb{Q})$ est de degré une puissance de 2 sur \mathbb{Q} .*

Remarque. Pour démontrer ce dernier, il est nécessaire de faire appel à la théorie de Galois, notamment à son théorème fondamental et d'en préciser le cadre, mais également à quelques résultats d'algèbre.

Rappels sur la théorie de Galois

Définition 1.8. *Soit $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ une extension de corps. Le groupe de Galois G associé à cette extension est l'ensemble des automorphismes de \mathbb{L} fixant \mathbb{K} .*

Définition 1.9. *Notons \mathcal{F} l'ensemble des extensions intermédiaires, \mathcal{M} est l'ensemble des sous-corps \mathbb{M} tels que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{M} \subseteq \mathbb{L}$ et \mathcal{G} l'ensemble de tous les sous-groupes de G . On définit alors deux applications :*

$$\begin{aligned} * : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ \mathbb{M} &\longmapsto \mathbb{M}^* \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dagger : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ H &\longmapsto H^\dagger \end{aligned}$$

telles que si $\mathbb{M} \in \mathcal{F}$, alors \mathbb{M}^* est le groupe des automorphismes de \mathbb{L} laissant invariant \mathbb{M} . Si $H \in \mathcal{G}$, alors H^\dagger est le corps fixe de H , c'est à dire l'ensemble des x de \mathbb{L} tels que $f(x) = x$ pour tout f de H .

Et on remarque de plus, que les applications sont décroissantes.

Théorème fondamental 1.10. *Si $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ est une extension finie et normale alors :*

1. Le groupe de Galois G est d'ordre $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$.
2. Si \mathbb{M} est une extension intermédiaire, alors :

$$\begin{cases} [\mathbb{L} : \mathbb{M}] &= \text{card}(M^*) \\ [\mathbb{M} : \mathbb{K}] &= \text{card}(G)/\text{card}(M^*). \end{cases}$$

3. Les applications $*$ et \dagger sont bijectives, réciproques l'une de l'autre et sont décroissantes.

Remarque. Une extension algébrique $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ est dite normale si et seulement si tout morphisme de corps fixant \mathbb{K} est un automorphisme de \mathbb{L} . Par exemple, un corps de décomposition d'un polynôme est une extension normale.

Résultats d'algèbre utiles

Lemme 1.11. Si G est un groupe fini, considérons l'action de conjugaison de G sur lui-même. Notons C_i les classes de conjugaison associées, à savoir, pour tout g de G , $C_i(g) = \{xgx^{-1}, x \in G\}$ pour chaque $i \leq \text{card}(G)$. Alors le cardinal de chacune des classes de conjugaison divise l'ordre de G .

Démonstration. Ici, chacune des classes de conjugaison est en fait une orbite sous l'action de G . Or, une orbite $w(x)$ est de cardinal un diviseur de $\text{card}(G)$. En effet, on a l'égalité suivante :

$$\text{card}(w(x)) = \frac{\text{card}(G)}{\text{card}(\text{stab}_G(x))}$$

où $\text{Stab}_G(x) = \{g \in G, gxg^{-1} = x\}$ qui est un sous-groupe de G .

Lemme 1.12. Si A est un groupe fini, dont l'ordre est divisible par un nombre premier p , alors il admet un élément d'ordre p .

Lemme 1.13. Si $\text{card}(G) = p^r$, alors $Z(G)$ (l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tout élément de G) contient un élément d'ordre p .

Démonstration. Les cardinaux des classes divisent p^r par le lemme 1.11. Comme celle de 1 est réduite à 1, on déduit, grâce à l'équation aux classes ($1 + C_1 + \dots + C_k = p^r, k \leq p^r$) qu'il y en a d'autres qui sont de cardinal 1. Or, les classes de cardinal 1 sont celles des éléments du centre. Il en résulte que le centre n'est pas réduit à $\{1\}$ Comme c'est un sous groupe, son cardinal divise p^r , donc c'est un multiple de p . On conclut en utilisant le lemme 1.12.

Corollaire 1.14. *Si G est un groupe fini, et $\text{card}(G)=2^r$ alors il existe une suite croissante $G_0 \subset \dots \subset G_r$ de sous-groupes distingués de G tels que $\text{card}(G_i) = 2^i$ pour tout $0 \leq i \leq r$.*

Démonstration. On montre par récurrence sur n la propriété $P(r)$ suivante : Si G est un groupe fini, et $\text{card}(G)=2^r$ alors il existe une suite croissante $G_0 \subset \dots \subset G_r$ de sous-groupes distingués de G tels que $\text{card}(G_i) = 2^i$ pour tout $0 \leq i \leq r$.

Le cas $r = 0$ est trivial.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et supposons $P(r)$. Soit G un groupe fini de cardinal 2^{r+1} . Alors $Z(G)$ admet un élément x d'ordre 2 par le lemme 1.13.

Considérons le sous-groupe $\langle x \rangle$ engendré par cet élément qui est donc de cardinal 2. Le quotient $G/\langle x \rangle$ existe et est de cardinal 2^r . On lui applique l'hypothèse de récurrence, donc il existe une suite croissante $G_0 \subset \dots \subset G_r$ de sous-groupes distingués de G tels que $\text{card}(G_i)=2^i$ pour tout $0 \leq i \leq r$. Ensuite, on considère leur image réciproque dans G et on obtient alors $P(r+1)$.

Démonstration du Théorème 1.7. Soit x un nombre réel algébrique de polynôme minimal P . Notons $[D_P(\mathbb{Q}) : \mathbb{Q}]$ le degré de $D_P(\mathbb{Q})$ sur \mathbb{Q} (cette extension vérifie les hypothèses du Théorème fondamental 1.10) et G le groupe de Galois associé.

Supposons que x soit constructible. D'après le Théorème 1.6, il existe une suite de sous-corps de \mathbb{R} , $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_r$ avec $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{K}_r$ et pour $1 \leq i \leq r-1$, $[\mathbb{K}_{i+1} : \mathbb{K}_i]=2$.

On pourra démontrer que cette suite peut être prolongée en une suite $\mathbb{K}_1 \subset \dots \subset \mathbb{K}_r \subset \dots \subset \mathbb{K}_q$ avec pour $1 \leq i \leq q-1$ $[\mathbb{K}_{i+1} : \mathbb{K}_i]=2$ où \mathbb{K}_q est une extension normale de \mathbb{Q} contenant $D_P(\mathbb{Q})$. Comme $[D_P(\mathbb{Q}) : \mathbb{Q}]$ est un diviseur de $[\mathbb{K}_q : \mathbb{Q}]=2^{q-1}$, on en conclut que le corps de décomposition de P , $D_P(\mathbb{Q})$, est de degré une puissance de 2 sur \mathbb{Q} .

Réciproquement, supposons qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $[D_P(\mathbb{Q}) : \mathbb{Q}]=2^r$. Par le 1. du Théorème fondamental 1.10 de Galois, on en déduit que $\text{card}(G)=2^r$.

Par le corollaire 1.14, on en déduit qu'il existe une suite croissante $G_0 \subset \dots \subset G_r$ de sous-groupes distingués de G tels que $\text{card}(G_i) = 2^i$ pour tout $0 \leq i \leq r$.

Notons pour $0 \leq i \leq r$, \mathbb{K}_i le corps fixe de G_{r-i}^\dagger . Le 3. du Théorème fondamental de Galois 1.10, montre que $[\mathbb{K}_{i+1} : \mathbb{K}_i]$ est égal à 2. Enfin, en utilisant le Théorème 1.6, on en conclut que x est constructible.

Retour sur la réciproque du Théorème 1.6 Comme nous l'avons dit précédemment, cette réciproque est fautive et désormais, nous disposons des outils nécessaires pour le prouver.

Considérons donc le polynôme $P(X) = X^4 - X - 1$. Il se décompose dans $\mathbb{R}[X]$ en un produit de deux polynômes du second degré :

$$P(X) = X^4 - X - 1 = (X^2 + aX + b)(X^2 + a'X + b')$$

où $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. On a alors par identification, les relations suivantes :

$$\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' + aa' = 0 \\ ab' + a'b = -1 \\ bb' = -1. \end{cases} \iff \begin{cases} a' = -a \\ b + b' = a^2 \\ a(b' - b) = -1 \\ bb' = -1. \end{cases}$$

Il en résulte donc que b et b' sont racines de $X^2 - a^2X - 1 = 0$. Comme a et a' sont opposés, on peut supposer par exemple $a > 0$ d'où $b' < b$ et on

obtient alors :

$$\begin{cases} b = \frac{a^2 + \sqrt{a^4 + 4}}{2} \\ b' = \frac{a^2 - \sqrt{a^4 + 4}}{2} \\ b' - b = -\sqrt{a^4 + 4} \\ a\sqrt{a^4 + 4} = 1. \end{cases}$$

- Le polynôme $X^2 + aX + b$ a pour discriminant $\Delta_1 = -a^2 - 2\sqrt{a^4 + 4} < 0$ donc il a deux racines complexes μ et $\bar{\mu}$.
- Le polynôme $X^2 + a'X + b'$ a pour discriminant $\Delta_2 = 2\sqrt{a^4 + 4} - a^2 > 0$. Il a donc deux racines réelles α et β .
- A partir de $a\sqrt{a^4 + 4} = 1$, on en déduit que a^2 est racine du polynôme $X^3 + 4X - 1$. On pourra montrer que ce polynôme n'a pas de racine dans \mathbb{Q} et ainsi qu'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. D'où a^2 est algébrique sur \mathbb{Q} et de degré 3. Le Théorème 1.6 nous dit alors que a^2 n'est pas constructible, et donc que a n'est pas constructible. Comme $\alpha + \beta = -a' = a$, on peut affirmer que l'une au moins des deux racines n'est pas constructible. Ainsi, $P(X)$ a au moins une racine réelle non constructible.
- a n'étant pas constructible, n'appartient pas à \mathbb{Q} et la décomposition de $P(X)$ considérée plus haut, n'est pas une décomposition dans $\mathbb{Q}[X]$.

De plus $X^2 + aX + b$ n'a pas de racine réelle, d'où aucune autre décomposition ne peut se faire dans $\mathbb{Q}[X]$. $P(X)$ est alors irréductible dans \mathbb{Q} .

- $P(X)$ est le polynôme minimal de α sur \mathbb{Q} et son corps de décomposition est $D_P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(\mu, \bar{\mu}, \alpha, \beta)$. On a par identification, $\mu + \bar{\mu} = -a$ et donc $a^2 \in D_P(\mathbb{Q})$. Or, a^2 est algébrique sur \mathbb{Q} et de degré 3, il en découle alors que $[D_P(\mathbb{Q}) : \mathbb{Q}]$ est divisible par 3 et ainsi ce n'est pas une puissance de 2. Le Théorème 1.7 assure que α n'est pas constructible, et pourtant ce nombre est de degré 4 sur \mathbb{Q} , puisque P est irréductible sur \mathbb{Q} .

2 Applications

2.1 Duplication du cube, trisection de l'angle

1. Le problème de la duplication du cube consiste à considérer le cube unité de côté OI et de construire un cube de volume double, id est de construire le nombre $\sqrt[3]{2}$.

Proposition 2.1. $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible, donc la duplication du cube est impossible.

Démonstration. Considérons le polynôme $X^3 - 2$. Si ce polynôme n'était pas irréductible dans \mathbb{Q} , alors il se décomposerait dans \mathbb{Q} et un des facteurs serait forcément de degré 1. Ainsi, ce polynôme aurait une racine dans \mathbb{Q} . Or les seules racines de ce dernier sont $\sqrt[3]{2}, j\sqrt[3]{2}$ et $j^2\sqrt[3]{2}$. On va pouvoir conclure grâce à ce lemme suivant :

Lemme 2.2. $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt[3]{2}$ est rationnel, id est il existe p et q deux entiers avec $q \neq 0$ premiers entre eux tels que $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$. En élevant au cube on obtient : $2q^3 = p^3$ (1). Donc p est pair d'où il existe p' tel que $p = 2p'$ et en simplifiant dans (1) par 2 on a : $q^3 = 4p'^3$. Ainsi q aussi est pair, ce qui contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

Ainsi $\sqrt[3]{2}, j\sqrt[3]{2}$ et $j^2\sqrt[3]{2}$ ne sont pas rationnels, donc le polynôme $X^3 - 2$ est irréductible sur \mathbb{Q} . De plus il est unitaire donc c'est le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ sur \mathbb{Q} . Il en résulte que $\sqrt[3]{2}$ est algébrique sur \mathbb{Q} et de degré 3. Donc par la contraposée du Théorème 1.6, on en déduit

que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible, et donc que la duplication du cube est impossible.

2. La trisection de l'angle consiste à tracer les deux demi-droites qui partagent un angle quelconque donné en trois angles égaux. Ce problème est aussi impossible car nous allons montrer que $\cos \frac{\pi}{9}$ n'est pas constructible et donc que l'angle $\frac{\pi}{3}$ n'est pas trisectable.

Proposition 2.3. *le nombre $\cos \frac{\pi}{9}$ n'est pas constructible et donc a fortiori que l'angle $\frac{\pi}{3}$ n'est pas trisectable.*

Démonstration. On a $\cos 3\theta = 4 \cos^3\theta - 3 \cos \theta$, donc $\cos \frac{\pi}{9}$ est racine du polynôme $P(X) = 4X^3 - 3X - 1/2$. Montrons que ce dernier est irréductible sur \mathbb{Q} . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il le soit. Alors, un des facteurs de la décomposition est de degré 1 et a donc une racine dans \mathbb{Q} qu'on note $\alpha = \frac{p}{q}$ avec p, q deux entiers tels que $q \neq 0$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$. On en déduit que p divise q^3 et q^2 divise $8p^3$. D'où $\alpha = 1, -1, 1/2$ ou $-1/2$. Or ces quatre nombres ne sont pas racines de $P(X)$. On en conclut dans ce cas, que $P(X)$ est irréductible sur \mathbb{Q} . Ainsi $\frac{P(X)}{4}$ est le polynôme minimal de $\cos \frac{\pi}{9}$, et donc ce dernier est algébrique de degré 3 (qui n'est pas une puissance de 2) sur \mathbb{Q} .

Le Théorème 1.6 montre que $\cos \frac{\pi}{9}$ n'est pas constructible et *a fortiori* $\frac{\pi}{3}$ n'est pas un angle trisectable.

Remarque. On pourra démontrer que :

Un angle θ est trisectable si et seulement si le polynôme $4X^3 - 3X - \cos \theta$ est réductible dans $\mathbb{Q}(\cos \theta)[X]$.

2.2 Quadrature du cercle

La quadrature du cercle consiste à construire à la règle et au compas un carré ayant même aire qu'un cercle donné. Si ceci était possible alors on pourrait construire un carré dont la longueur du côté serait $\sqrt{\pi}$. Or d'après le Théorème suivant, ceci n'est pas possible :

Théorème 2.4 (Lindemann 1882). *Les nombres π et $\sqrt{\pi}$ ne sont pas algébriques sur \mathbb{Q} (donc non constructibles rendant la quadrature du cercle*

impossible).

2.3 Les polygones réguliers

Dans cette partie, le résultat le plus important est le suivant :

Théorème 3.1. *Soit n un entier supérieur ou égal à 3.*

Le polygone régulier à n côtés est constructible si et seulement si n est de la forme $n = 2^\alpha p_1 \cdots p_r$ avec $\alpha \geq 0, r \geq 0$, les p_i premiers, distincts et de la forme $2^{2^m} + 1$ (nombres de Fermat).

Remarque. Les seuls exemples de nombres de Fermat connus sont 3, 5, 17, 257 et 65537.

Construction effective du pentagone

Dans le cas $n = 5 = 2^{2^1} + 1$, on peut en effet construire à la règle et au compas le pentagone car 5 vérifie les hypothèses du théorème précédent. Maintenant, pour réaliser une construction effective de ce polygone, on va utiliser la théorie de Galois afin de construire $\cos \frac{2\pi}{5}$. Si on note ζ qui vaut $e^{\frac{2i\pi}{5}}$, alors

$$\zeta^5 - 1 = (\zeta - 1)(1 + \zeta + \cdots + \zeta^4) = 0$$

. De plus, \mathbb{Q} est inclus dans $\mathbb{Q}(\zeta)$ et $1 + \zeta + \cdots + \zeta^4$ est irréductible et unitaire sur \mathbb{Q} donc $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ est égal à 4.

Par le Théorème 1.6 et le Théorème 1.7, on en déduit qu'il existe une suite de sous-corps de \mathbb{R} :

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 = \mathbb{Q}(\zeta)$$

telle que chaque $i = 1, 2$,

$$[\mathbb{K}_i : \mathbb{K}_{i-1}] = 2.$$

Ensuite, on définit le groupe de Galois associé à l'extension $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta)$ $G = Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ (l'ensemble des automorphismes de corps $\sigma : \mathbb{Q}(\zeta) \rightarrow \mathbb{Q}(\zeta)$ tel que $\sigma|_{\mathbb{Q}} = Id_{\mathbb{Q}}$). De plus, on peut montrer que le groupe de Galois G s'injecte dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$, mais ici ils sont isomorphes donc $card(Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}))$ est égal à 4.

En effet, si σ appartient à $Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$, alors $\sigma(\zeta) = \zeta^{i_\sigma}$ où i_σ est tel que $pgcd(i_\sigma, n) = 1$. Ainsi, on a le lemme suivant :

Lemme 3.2.

$$\begin{aligned} \phi : Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) &\longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \\ \sigma &\longmapsto i_\sigma \end{aligned}$$

est un homomorphisme.

Enfin, le Théorème fondamental 1.10 de Galois assure qu'il existe une bijection entre :

1. les extensions intermédiaires :

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 = \mathbb{Q}(\zeta). \quad (1)$$

2. les sous groupes de $G = Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$:

$$G_2 = (Id) \subset G_1 \subset G_0 = G$$

qui sont tels que pour chaque $i = 0, 1, 2$,

$$\text{card}(G_i) = 2^{2-i}, \quad (2)$$

$$\mathbb{K}_i = \mathbb{Q}(\zeta)^{G_i} = \{x \in \mathbb{Q}(\zeta) \text{ tel que } \forall g \in G_i, g(x) = x\} \quad (3)$$

et inversement,

$$G_i = Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{K}_i) \quad (4)$$

Ainsi, il est toujours plus facile de trouver des sous-groupes que des extensions intermédiaires, là est tout l'intérêt du Théorème fondamental de Galois. Donc, il nous faut tout d'abord trouver des générateurs de $Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \approx (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$. Il est naturel d'essayer $\sigma_0 : \zeta \longmapsto \zeta^2$ et on se rend compte qu'il est bien d'ordre 4.

$\sigma_1 = \sigma_0^2 : \zeta \longmapsto \zeta^{-1}$ est donc d'ordre 2 et est générateur de G_1 .

$\sigma_2 = \sigma_0^4 : \zeta \longmapsto \zeta$ est d'ordre 1 et est générateur de G_2 .

Ainsi on remarque quelque chose qui va nous être utile dans la suite, à savoir : pour chaque $i = 1, 2$, si on note σ_i le générateur du groupe G_i , alors

$$\sigma_{i-1}^2 = \sigma_i. \quad (5)$$

Rappelons alors tout ce que nous savons :

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \overset{2}{\subset} \mathbb{K}_1 \overset{2}{\subset} \mathbb{K}_2 = \mathbb{Q}(\zeta).$$

$$\underbrace{G_2 = (Id)}_{=\langle \zeta \mapsto \zeta \rangle} \subset \underbrace{G_1}_{=\langle \zeta \mapsto \zeta^{-1} \rangle} \subset \underbrace{G_0 = G}_{=\langle \zeta \mapsto \zeta^2 \rangle}.$$

Ainsi, notre but ici va être de rechercher des éléments appartenant à chacun des corps et grâce à la relation (1), on sait qu'on va atteindre un élément de \mathbb{Q} , qui lui, sera alors constructible. Pour réaliser cela, il nous suffira grâce à la relation (3), de trouver des éléments qui restent fixes par les générateurs de chacun des groupes. Pour construire de tels éléments, on utilisera le lemme suivant :

Lemme 3.3. *Pour chaque $i = 1, 2$, on note σ_i le générateur du groupe G_i . Supposons que σ_i fixe x . Si y est tel que $y = \sigma_{i-1}(x)$ alors $x + y$ et xy sont fixes par σ_{i-1} , et donc appartiennent à \mathbb{K}_{i-1} .*

Démonstration. Soient x et y comme dans le lemme ci-dessus. Alors : $\sigma_{i-1}(x + y) = y + \sigma_{i-1}^2(x)$. Or d'après la relation (5), $\sigma_{i-1}^2 = \sigma_i$, d'où :

$$\begin{aligned} \sigma_{i-1}(x + y) &= y + \sigma_i(x) \\ &= y + x \end{aligned}$$

car σ_i fixe x . Ainsi $x + y$ appartient à \mathbb{K}_{i-1} . Comme σ_i pour tout $i = 1, \dots, 4$ est un morphisme d'algèbre, il en est de même pour xy .

Posons $w_1 = \zeta$ qui est bien fixe par $\sigma_0^4 : \zeta \mapsto \zeta$ (générateur du groupe G_2).

Ensuite, on pose $w_2 = \sigma_0^2(w_1)$. Alors, le lemme 3.3 affirme que :

$$\begin{aligned} z_1 &= w_1 + w_2 \\ &= \zeta + \zeta^{-1} \end{aligned}$$

est fixe par σ_0^2 (générateur du groupe G_1), et donc que z_1 appartient à \mathbb{K}_1 . Ensuite, on pose

$$\begin{aligned} z_2 &= \sigma_0(z_1) \\ &= \zeta^2 + \zeta^{-2}. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 + z_2 \\ &= \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^2 + \zeta^{-2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

est fixe par σ_0 (générateur du groupe G_0) et donc y_1 appartient à $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$. De même, le lemme 3.3 montre que :

$$\begin{aligned} y_3 &= z_1 z_2 \\ &= \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^2 + \zeta^{-2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

appartient à $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$.

Remarque. On sait par ailleurs, que z_1 et z_2 sont racines du polynôme du second degré à coefficients dans \mathbb{Q} :

$$P_0(X) = X^2 + X - 1$$

. **Conclusion** : On va réussir à construire $z_1 = 2 \cos(\frac{2i\pi}{17})$ et donc le point d'abscisse $\cos(\frac{2i\pi}{17})$, le tout est de savoir construire les solutions d'une équation du second degré.

Méthode pour construire les solutions d'une équation du second degré.

Soient x_1 et x_2 tels que :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= -b \\ x_1 x_2 &= c \end{cases}$$

avec $c \leq 0$. Pour construire ces deux points, il suffit de tracer le cercle Γ de centre $O(\frac{-b}{2}, \frac{1+c}{2})$ passant par les points $(0,1)$ et $(0,c)$. Alors x_1 et x_2 sont les deux points d'intersection du cercle avec l'axe des abscisses.

Démonstration. Cela vient de la proposition suivante :

Proposition 3.3 : Puissance d'un point par rapport à un cercle.

Soient M un point, Γ un cercle de centre O et de rayon R et (d) une droite passant par M et rencontrant le cercle en A et B . On appelle alors puissance du point M par rapport au cercle Γ le produit des mesures algébriques de MA et MB . Ce produit est indépendant de la droite choisie et vaut toujours :

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MO^2 - R^2 = P_\Gamma(M).$$

Démonstration. Soit A' construit tel que $[AA']$ soit un diamètre de Γ . On écrit alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} \\ &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'}) \\ &= MO^2 - R^2.\end{aligned}$$

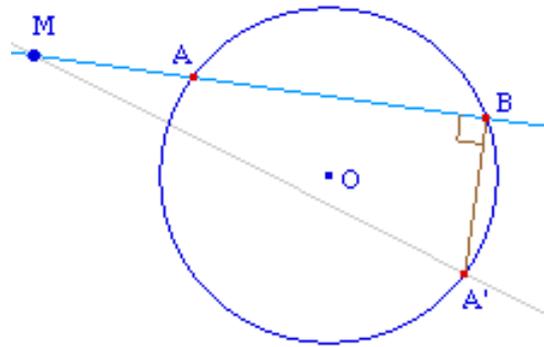


FIGURE 11

D'où $P_{\Gamma}(0) = x_1 x_2 = 1 \cdot c$ (voir figure 12 avec $c = -3$ et $b = -4$)

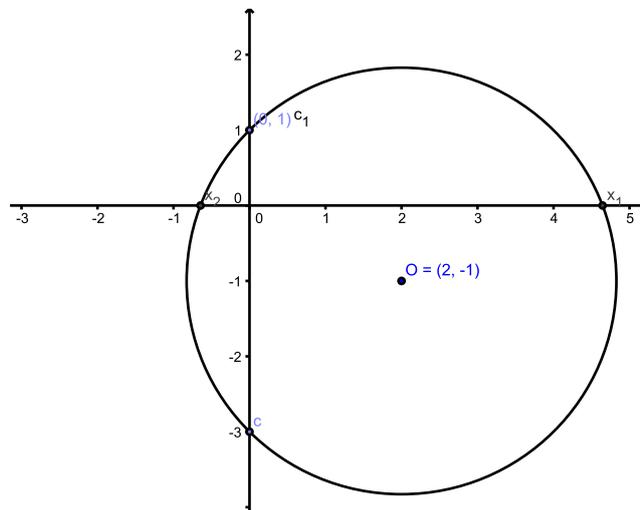


FIGURE 12

Ainsi, grâce à cette méthode on peut réaliser une construction du pentagone à la règle et au compas (voir figure 13).

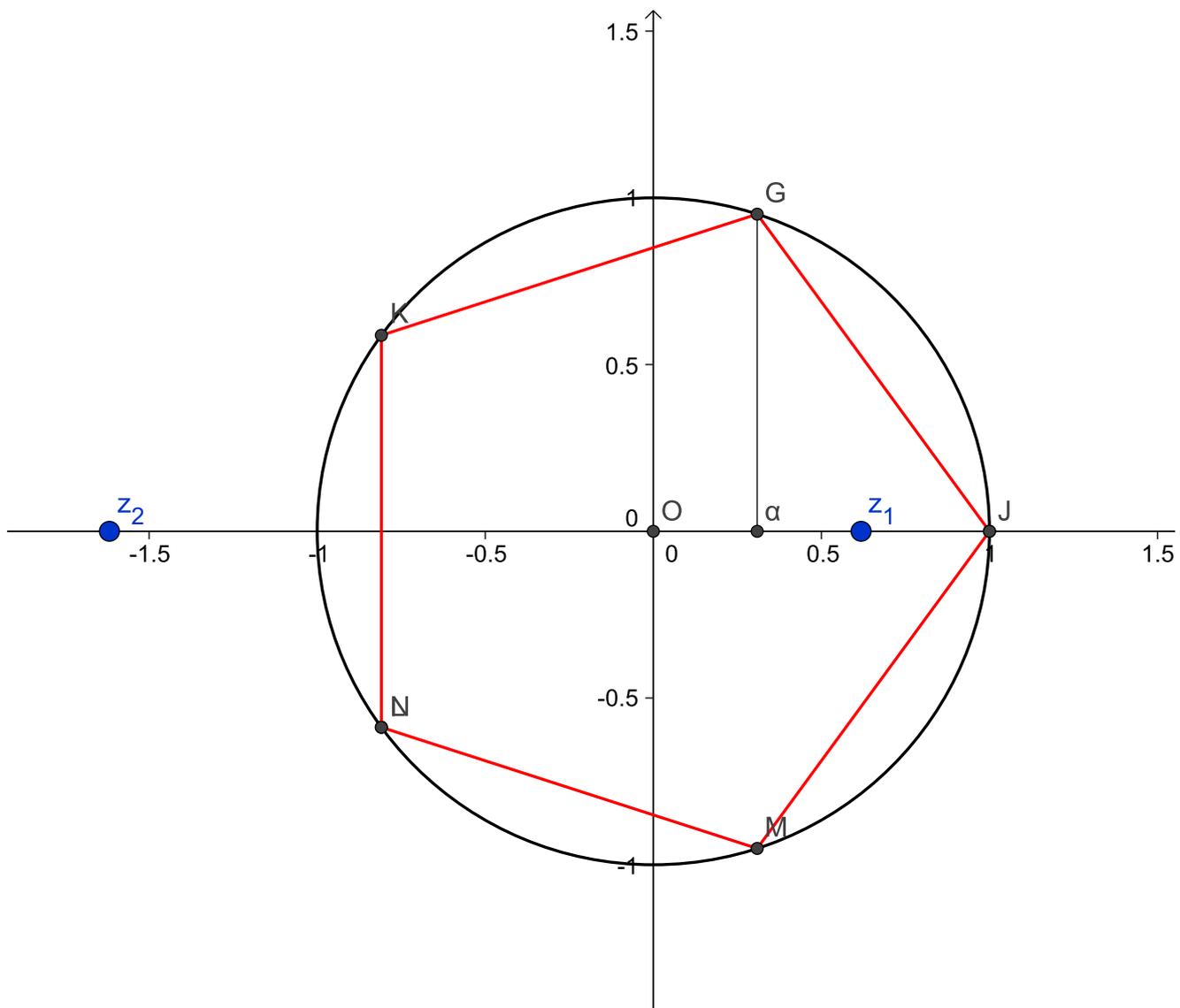


FIGURE 13

Construction effective du polygone à 17 côtés

De même, là aussi dans le cas $n = 17 = 2^{2^2} + 1$, on peut construire à la règle et au compas le polygone à 17 côtés car 17 vérifie les hypothèses du théorème précédent. Maintenant, pour réaliser une construction effective de ce polygone, on va utiliser la théorie de Galois afin de construire $\cos \frac{2\pi}{17}$.

Si on note ζ qui vaut $e^{\frac{2i\pi}{17}}$, alors

$$\zeta^{17} - 1 = (\zeta - 1)(1 + \zeta + \dots + \zeta^{16}) = 0$$

. De plus, \mathbb{Q} est inclus dans $\mathbb{Q}(\zeta)$ et $1 + \zeta + \dots + \zeta^{16}$ est irréductible et unitaire sur \mathbb{Q} donc $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ est égal à 16.

Par le Théorème 1.6 et le Théorème 1.7, on en déduit qu'il existe une suite de sous-corps de \mathbb{R} :

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_3 \subset \mathbb{K}_4 = \mathbb{Q}(\zeta)$$

telle que chaque $i = 0, 1, \dots, 4$,

$$[\mathbb{K}_i : \mathbb{K}_{i-1}] = 2.$$

Ensuite, on définit le groupe de Galois associé à l'extension $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta)$ $G = Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ (l'ensemble des automorphismes de corps $\sigma : \mathbb{Q}(\zeta) \rightarrow \mathbb{Q}(\zeta)$ tel que $\sigma|_{\mathbb{Q}} = Id_{\mathbb{Q}}$). De plus, d'après le lemme 3.2, $card(Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}))$ est égal à 16.

Enfin, le Théorème fondamental 1.10 de Galois assure qu'il existe une bijection entre :

1. les extensions intermédiaires :

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_3 \subset \mathbb{K}_4 = \mathbb{Q}(\zeta). \quad (6)$$

2. les sous groupes de $G = Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$:

$$G_4 = (Id) \subset G_3 \subset G_2 \subset G_1 \subset G_0 = G$$

qui sont tels que pour chaque $i = 0, 1, \dots, 4$,

$$card(G_i) = 2^{4-i}, \quad (7)$$

$$\mathbb{K}_i = \mathbb{Q}(\zeta)^{G_i} = \{x \in \mathbb{Q}(\zeta) \text{ tel que } \forall g \in G_i, g(x) = x\} \quad (8)$$

et inversement,

$$G_i = Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{K}_i) \quad (9)$$

De même dans la construction du pentagone, il est toujours plus facile de trouver des sous-groupes que des extensions intermédiaires. Donc, il nous faut tout d'abord trouver des générateurs de $Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \approx (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})$. Il est naturel d'essayer $\tau : \zeta \mapsto \zeta^2$, mais on se rend compte très vite qu'il est seulement d'ordre 8.

Alors on essaie $\sigma_0 : \zeta \mapsto \zeta^3$ et cette fois-ci cet élément est bien d'ordre 16.

$\sigma_1 = \sigma_0^2 : \zeta \mapsto \zeta^{-8}$ est donc d'ordre 8 et est générateur de G_1 .

$\sigma_2 = \sigma_0^4 : \zeta \mapsto \zeta^{-4}$ est d'ordre 4 et est générateur de G_2 .

$\sigma_3 = \sigma_0^8 : \zeta \mapsto \zeta^{-1}$ est d'ordre 2 et est générateur de G_3 .

$\sigma_4 = \sigma_0^{16} : \zeta \mapsto \zeta$ est d'ordre 1 et est générateur de G_4 .

Rappelons alors tout ce que nous savons :

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \overset{2}{\subset} \mathbb{K}_1 \overset{2}{\subset} \mathbb{K}_2 \overset{2}{\subset} \mathbb{K}_3 \overset{2}{\subset} \mathbb{K}_4 = \mathbb{Q}(\zeta).$$

$$\underbrace{G_4 = (Id)}_{=\langle \zeta \mapsto \zeta \rangle} \subset \underbrace{G_3}_{=\langle \zeta \mapsto \zeta^{-1} \rangle} \subset \underbrace{G_2}_{=\langle \zeta \mapsto \zeta^{-4} \rangle} \subset \underbrace{G_1}_{=\langle \zeta \mapsto \zeta^{-8} \rangle} \subset \underbrace{G_0 = G}_{=\langle \zeta \mapsto \zeta^3 \rangle}.$$

On va là aussi rechercher des éléments appartenant à chacun des corps et grâce à la relation (6), on sait qu'on va atteindre un élément de \mathbb{Q} , qui lui, sera alors constructible. Pour réaliser cela, il nous suffira grâce à la relation (8), de trouver des éléments qui restent fixes par les générateurs de chacun des groupes. Pour construire de tels éléments, on utilisera le lemme 3.3.

Posons $w_1 = \zeta$ qui est bien fixe par $\sigma_0^{16} : \zeta \mapsto \zeta$ (générateur du groupe G_4).

Ensuite, on pose $w_2 = \sigma_0^8(w_1)$. Alors, le lemme 3.3 affirme que :

$$\begin{aligned} z_1 &= w_1 + w_2 \\ &= \zeta + \zeta^{-1} \end{aligned}$$

est fixe par σ_0^8 (générateur du groupe G_3), et donc que z_1 appartient à \mathbb{K}_3 . Ensuite, on pose

$$\begin{aligned} z_2 &= \sigma_0^4(z_1) \\ &= \zeta^4 + \zeta^{-4}. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 + z_2 \\ &= \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^4 + \zeta^{-4} \end{aligned}$$

est fixe par σ_0^4 (générateur du groupe G_2) et donc y_1 appartient à \mathbb{K}_2 . De même, le lemme 3.3 montre que :

$$\begin{aligned} y_3 &= z_1 z_2 \\ &= \zeta^5 + \zeta^{-5} + \zeta^3 + \zeta^{-3} \end{aligned}$$

appartient à \mathbb{K}_2 .

Remarques.

1. On sait par ailleurs, que z_1 et z_2 sont racines du polynôme du second degré à coefficients dans \mathbb{K}_2 :

$$P_2(X) = X^2 - y_1 X + y_3$$

2. On vérifie que par le calcul que $\sigma_0(y_1) = y_3$.

On va réitérer ce processus jusqu'à atteindre des éléments de \mathbb{Q} . On pose :

$$\begin{aligned} y_2 &= \sigma_0^2(y_1) \\ &= \zeta^2 + \zeta^{-2} + \zeta^8 + \zeta^{-8}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 \\ &= \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^4 + \zeta^{-4} + \zeta^8 + \zeta^{-8} + \zeta^2 + \zeta^{-2} \end{aligned}$$

et $y_1 y_2 = \sum_{k=1}^{16} \zeta^k = -1$ sont fixes par σ_0^2 (générateur du groupe G_1) et appartiennent à \mathbb{K}_1 .

Remarque. y_1 et y_2 sont racines du polynôme du second degré à coefficients dans \mathbb{K}_2 :

$$P_1(X) = X^2 - x_1 X - 1$$

. Par ailleurs, on pose :

$$\begin{aligned} y_4 &= \sigma_0^2(y_3) (= \sigma_0(y_2)) \\ &= \zeta^6 + \zeta^{-6} + \zeta^7 + \zeta^{-7}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} x_2 &= y_3 + y_4 \\ &= \zeta^5 + \zeta^{-5} + \zeta^3 + \zeta^{-3} + \zeta^7 + \zeta^{-7} + \zeta^6 + \zeta^{-6}. \end{aligned}$$

et $y_3y_4 = \sigma_0(y_1y_2) = \sigma_0(-1) = -1$ sont fixes par σ_0^2 (générateur du groupe G_1) et appartiennent à \mathbb{K}_1 .

Remarque. y_3 et y_4 sont racines du polynôme du second degré à coefficients dans \mathbb{K}_1 :

$$P_{\text{1bis}}(X) = X^2 - x_2X - 1$$

. Enfin, on note que :

$$\begin{aligned} x_2 &= \sigma_0(x_1) \\ &= \zeta^3 + \zeta^{-3} + \zeta^5 + \zeta^{-5} + \zeta^7 + \zeta^{-7} + \zeta^6 + \zeta^{-6} \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \sum_{k=1}^{16} \zeta^k \\ &= -1 \end{aligned}$$

et $x_1x_2 = r = \sum_{k=1}^{16} a_k\zeta^k$ ($a_k \in \mathbb{N}^*$) sont invariants par σ_0 (générateur du groupe G_0 et donc appartiennent à $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$).

Remarque. Pour trouver $r = x_1x_2$, on procède de la façon suivante : on alors que $P(\zeta) = \sum_{k=1}^{16} a_k\zeta^k - r = 0$ est à coefficients dans \mathbb{Q} et de degré 16. Or le polynôme minimal de ζ sur \mathbb{Q} est $1 + \zeta + \dots + \zeta^{16}$. Donc il existe λ tel que $\sum_{k=1}^{16} a_k\zeta^k - r = \lambda(1 + \zeta + \dots + \zeta^{16})$. On a alors $r = -\lambda$ et il suffit donc par exemple de compter le nombre de termes en ζ dans le produit x_1x_2 . Il y en a 4, donc $r = x_1x_2 = -4$.

D'où x_1 et x_2 sont racines du polynôme du second degré à coefficients dans \mathbb{Q} : $P_0(X) = X^2 + X - 4$, et donc sont constructibles par la proposition 1.3 et 1.5.

Conclusion : Grâce aux différentes relations, on peut remonter jusqu'à $z_1 = 2 \cos(\frac{2i\pi}{17})$ et construire pas à pas le point d'abscisse $\cos(\frac{2i\pi}{17})$. Tout d'abord, on construit x_1 et x_2 racines du polynôme $P_0(X) = X^2 + X - 4$ grâce à la méthode proposée précédemment pour construire les solutions d'une équation du second degré.

Ensuite, on construit y_1 et y_2 racines du polynôme $P_1(X) = X^2 - x_1X - 1$ ainsi que y_3 et y_4 racines du polynôme $P_{1\text{bis}}(X) = X^2 - x_2X - 1$. Enfin, on construit z_1 et z_2 racines du polynôme $P_2(X) = X^2 - y_1X + y_3$. Ainsi, on peut faire une construction effective du polygone à 17 côtés à la règle et au compas (voir figure 14).

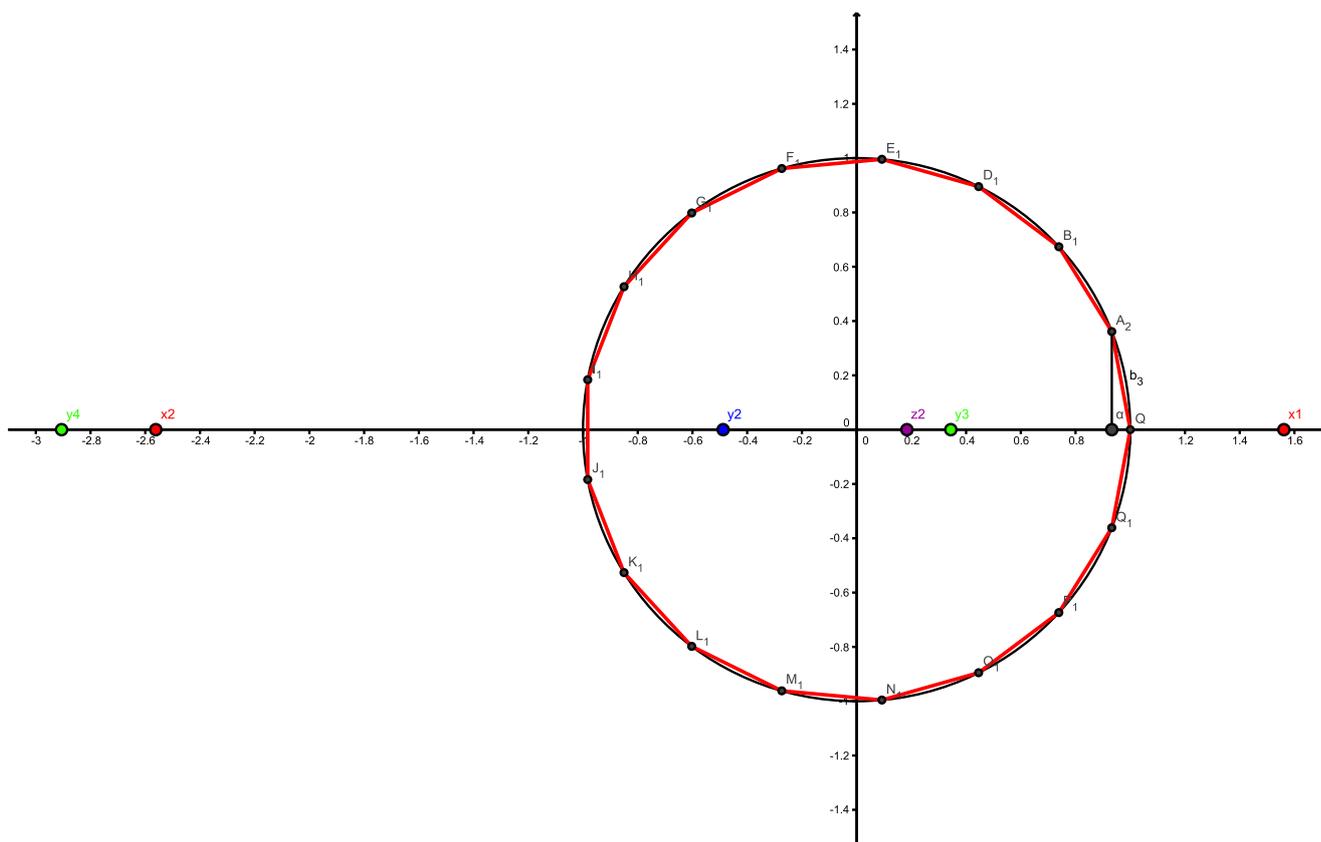


FIGURE 14

5.3 Troisième année de magistère, rapport de stage : Application des méthodes CART et forêts aléatoires à l'estimation de l'état de charge d'une batterie électrique



Rapport de stage :
Application des méthodes CART et forêts aléatoires
à l'estimation de l'état de charge d'une batterie
électrique



Résumé. Ce compte-rendu d'une part précisera les principaux rudiments et les mécanismes des méthodes CART et forêts aléatoires. D'autre part, il présentera les premières applications de celles-ci au problème étudié : l'estimation de la quantité de charge d'une batterie électrique.

Mots-clés : Régression non linéaire, CART, forêts aléatoires, état de charge.

Valérie Robert

25 juillet 2013

Table des matières

1	Présentation du contexte et de la problématique	4
1.1	Contexte	4
1.2	Problématique	6
2	CART (Classification And Regression Trees)	6
2.1	Rappel : méthode d'apprentissage statistique	6
2.2	Arbre de régression	7
2.2.1	Principe détaillé de l'algorithme CART	9
2.2.2	Particularités, avantages et inconvénients	13
2.3	Indice d'importance	13
2.4	Exemple : Estimation de la quantité de charge d'une batterie-cellule	14
2.5	Arbre maximal et élagage	17
3	Forêts aléatoires	17
3.1	Principes et mécanismes	17
3.2	Random Forests-RI (Random Inputs)	17
3.3	Erreur Out-of-Bag(OOB)	18
3.4	Indice d'importance	19
4	Premières simulations sur un petit jeu de données	19
4.1	Description des données	19
4.2	Résultats	23
4.3	Conclusion	31
5	Les données d'étude	31
5.1	Description des données d'étude	31
5.2	Préparation des données	33
5.3	Nécessité de sous-échantillonnage	34
6	Elaboration de groupes et expériences	35
6.1	Classification par comportement similaire et température ambiante	35
6.1.1	Principe	35
6.1.2	Expériences	37
6.1.3	Résultats et commentaires	37
6.2	Classification par plages de SOC	46
6.2.1	Proportion des points par plages de SOC	46
6.2.2	Expériences et résultats	47
7	Tirage aléatoire sur l'ensemble des fichiers	48
7.1	Tirage aléatoire de courbes SOC	48
7.1.1	Principe	48
7.1.2	Résultats et commentaires	50
7.1.3	Conclusion	57
7.2	Tirage aléatoire d'observations	57
7.2.1	Principe	57
7.2.2	Résultats et commentaires	60
7.2.3	Conclusion	64
7.2.4	Pour aller plus loin	64

8 Conclusion et perspectives

Introduction

1 Présentation du contexte et de la problématique

1.1 Contexte

On cherche à estimer l'état de charge de la batterie en temps réel à partir des données instantanées.

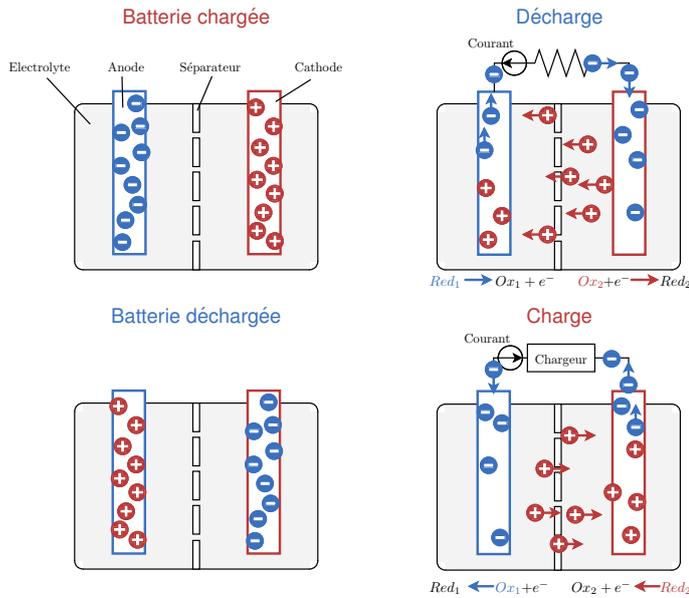


FIGURE 1 – Charge/Décharge d'une batterie élémentaire

Une batterie élémentaire se compose de deux électrodes (anode et cathode) et d'un électrolyte qui permet de faire passer les ions d'une électrode à une autre (voir figure).

Lorsque la batterie est chargée, les ions se retrouvent à la cathode et inversement lorsque la batterie est déchargée. Lors du phénomène de décharge, un dispositif est branché et un courant circule. Les électrons se déplacent alors dans le sens contraire donné au courant. Pour rejoindre la cathode, les ions utilisent l'électrolyte et l'anode est dite "réducteur". De manière analogue, on peut décrire le phénomène de charge.

Ensuite, rappelons quelques définitions utiles pour la suite dans la compréhension de la problématique.

Définition 1. Tension. La *tension* U de la batterie est la différence des potentiels entre deux électrodes.

Définition 2. Courant. Le *courant* est la charge électrique traversant un conducteur par une unité de temps et portée par les électrons dans une électrode (courant électronique) ou par les ions dans un électrolyte (courant ionique).

Définition 3. Charge, décharge. La *quantité de charge*, fournie par la batterie durant sa décharge, est calculée comme une intégrale de courant de décharge sur une période de décharge $[t_1; t_2]$:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I_t dt$$

Elle est mesurée en ampère-heure (Ah).

Définition 4. Capacité. C'est la quantité maximale de charge, qui peut être obtenue en déchargeant complètement à courant constant, la batterie initialement complètement chargée.

Définition 5. Régime de courant. Il est défini comme la *vitesse* à laquelle une quantité de charge équivalente à $\frac{C}{n}$ est extraite de la batterie (décharge) ou fournie à la batterie (charge) durant n heures.

Définition 6. Capacité nominale : C_{nom} . C'est une capacité obtenue sous le régime de décharge nominal i.e. sous certaines conditions de décharge préconisées par le constructeur.

Capacité disponible : C_{disp} . Elle est définie comme la capacité fournie par une batterie, qui n'est pas complètement chargée initialement, sous le régime de décharge non nominal.

Remarque. La température, le régime du courant et l'historique de l'utilisation de la batterie influencent la capacité nominale.

Définition 7. On définit l'état de charge de la batterie ([14]) notée *SOC* (State Of Charge) par :

$$SOC = \frac{C_{disp}}{C_{nom}}$$

Remarque. Cette quantité est souvent difficile à estimer car il y a :

- une influence de la *température interne* : la capacité nominale augmente lorsque la température interne augmente,
- une influence de l'*état de santé* SOH (State Of Health) : la capacité nominale diminue au cours du vieillissement de la batterie,
- une influence du *régime de courant*.

Cependant, nous pouvons répertorier plusieurs méthodes existantes pour estimer l'état de charge d'une batterie([15],[8]).

Nous citerons la plus usuelle qui est une méthode physique, la méthode coulométrique. En effet, elle consiste à estimer le SOC à l'instant t de la manière suivante :

$$SOC_t = SOC_0 + \frac{1}{C_{nom}} \int_{t_0}^t I(\tau) d\tau \quad (1)$$

Ainsi, cette méthode décrit le SOC à l'instant t comme le SOC à l'instant initial t_0 plus la somme des courants distribués entre t et t_0 .

Cette méthode a l'avantage d'être facile à implémenter et nécessite la mesure du courant uniquement.

Cependant, elle présente quelques inconvénients. En effet, si le capteur de courant est imprécis, on a une accumulation de l'erreur. De plus, comme nous l'avons dit précédemment, il y a un changement de la C_{nom} . Enfin le SOC_0 est difficile à estimer en temps réel.

Ainsi, pour que cette estimation soit convenable, on munit la voiture électrique d'un capteur de courant très précis mais qui coûte très cher. A terme, les constructeurs voudraient se passer de ce capteur très précis et trouver une autre méthode d'estimation du SOC.

On peut alors définir la problématique.

1.2 Problématique

Une batterie d'un véhicule électrique est soumise à plusieurs *charges/décharges* partielles et complètes. Les mesures suivantes sont prélevées à chaque instant : *température interne*, température externe, *courant* et *tension* de la batterie.

La problématique est donc la suivante : estimer *l'état de charge* de la batterie d'un véhicule électrique en temps réel à partir d'une très grande base de données : mesures instantanées de la *température interne*,

ambiante, du courant et de la tension. Il y a là une volonté de toujours mieux estimer car d'une part, les estimations présentes dans les systèmes embarqués ne sont pas encore très précises et d'autre part, l'estimation coulométrique nécessite un capteur de courant très précis, donc cher. Les objectifs du stage sont donc de :

- Proposer une ou plusieurs méthodes d'estimation de SOC par apprentissage statistique qui soient robustes par rapport :
 1. à la température interne
 2. au régime de courant
- Valider cette méthode sur des données expérimentales issues :
 1. des expériences en laboratoire
 2. des roulages réels des véhicules électriques
- Maîtriser le contexte théorique de l'apprentissage statistique :
 1. arbres de régression (CART) ([4])
 2. sélection de modèles ([9])
 3. forêts aléatoires ([3])

Nous allons donc nous intéresser à deux méthodes d'apprentissage statistique que sont les arbres CART qui ont l'avantage d'être facilement interprétables ([10]) et les forêts aléatoires qui se révèlent être un outil performant depuis ces dernières années ([17]).

2 CART (Classification And Regression Trees)

2.1 Rappel : méthode d'apprentissage statistique

On considère un modèle de régression (dans notre cas non linéaire) : soit (X, Y) variable aléatoire dans $(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ et satisfaisant :

$$Y = f(X) + \epsilon, \quad (2)$$

où ϵ bruit centré, de variance σ^2 et f fonction de régression à estimer.

Comme la loi P de (X, Y) est inconnue, on veut reconstruire f à partir d'un échantillon :

$$\mathcal{L} = \{(x_t, y_t)\}_{t=1, \dots, n}$$

composé de n réalisations indépendantes de (X, Y) et où x_t sont les variables explicatives et y_t sont les variables à expliquer.

Le but de l'apprentissage supervisé ([9]) est de construire un modèle statistique en proposant un estimateur \hat{f} de la fonction f (2).

L'élaboration et la validation du modèle sont faites avec deux ensembles distincts de données :

$$\mathcal{L}_{app} = (x_t; y_t)_{t=1, \dots, k}, \quad (3)$$

appelé ensemble d'apprentissage, qui est utilisé pour construire le modèle et l'ensemble, dit de test, et

$$\mathcal{L}_{test} = (x_t; y_t)_{t=k+1, \dots, n}$$

est utilisé pour valider ce modèle.

Ainsi, étant donné \mathcal{L}_{app} et \mathcal{L}_{test} , le problème consiste à estimer la fonction f , en minimisant le risque de l'estimateur \hat{f} :

$$R^*(f, \hat{f}) = R^*(\hat{f}) = \mathbb{E}_P \left[\|f - \hat{f}\| \right]_{\mu}$$

où P est la loi marginale de X , $\|\cdot\|_{\mu}$ est choisie ici comme la norme 2 sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^p, \mu)$, ou parfois comme la norme 1.

Mais on ne connaît pas P , donc \hat{f} est obtenu comme celui qui minimise la fonction contraste quadratique empirique ou erreur quadratique moyenne (MSE) :

$$R(\hat{f}) = \frac{1}{k} \sum_{(x_t, y_t) \in \mathcal{L}_{app}} (y_t - f(x_t))^2 \quad (4)$$

Enfin, on valide notre modèle en souhaitant que la qualité de notre estimateur décrite par l'erreur quadratique moyenne des résidus ou erreur de généralisation (MSE residuals) :

$$R^{\mathcal{L}_{test}}(\hat{f}) = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n (\hat{f}(x_t) - y_t)^2 \quad (5)$$

soit la meilleure.

2.2 Arbre de régression

La méthode CART est ainsi une méthode d'apprentissage statistique dont les rudiments ont été expliqués auparavant. Plus précisément, c'est une méthode de régression non paramétrique qui est utilisée pour construire des arbres de décision qui permettent de prendre un ensemble de décisions basé sur les données explicatives afin d'estimer la variable à expliquer. Ils servent ensuite étant donné un nouvel échantillon de variables explicatives, d'estimer la variable à expliquer relatif à celui-ci.

La construction des arbres de décision à partir de données est une discipline déjà ancienne. Les statisticiens en attribuent la paternité à Morgan et Sonquist (1963) qui, les premiers, ont utilisé les arbres de régression dans un processus de prédiction et d'explication (AID Automatic Interaction Detection). Il s'en est suivi toute une famille de méthodes, étendues jusqu'aux problèmes de discrimination et classement, qui s'appuyaient sur le même principe de la représentation par arbres (THAID – Morgan et Messenger, 1973 ; CHAID – Kass, 1980). On considère généralement que cette approche a connu son apogée avec la méthode CART (Classification and Regression Tree) de Breiman et al. décrite en détail dans une monographie intitulée Classification And Regression Trees de 1984 ([4]) et qui fait encore référence aujourd'hui.

Elle a été ensuite implémentée pour le logiciel R en 1997 par T. Therneau, B. Atkinson et B. Ripley sous le paquet `rpart` ([12]) et contient des parties implémentées en C, ce qui optimise le code. Il existe par ailleurs d'autres paquets similaires sur R comme `tree` ou `party`, mais `rpart` reste le plus largement utilisé, notamment pour sa rapidité.

Par ailleurs, pour ce qui est de la représentation visuelle des arbres, un paquet `rpart.plot` a été implémenté pour le logiciel R en 2012 par Stephen Milleborrow ([13]) et permet d'améliorer la représentation déjà existante dans `rpart`, pour plus de lisibilité et d'esthétisme (voir figure).

Les arbres de régression sont des arbres de décision binaires. Rappelons la définition rigoureuse de ces derniers :

Définition 8. *Un arbre binaire est une structure de données qui peut se représenter sous la forme d'une hiérarchie dont chaque élément est appelé **nœud**, le nœud initial étant appelé **racine**.*

*Dans un arbre binaire, chaque élément possède au plus deux éléments fils au niveau inférieur, habituellement appelés **noeud fils gauche** et **noeud fils droit**. Du point de vue de ces éléments fils, l'élément dont ils sont issus au niveau supérieur est appelé père.*

*Un nœud n'ayant aucun fils est appelé **feuille**. Le nombre de niveaux total, autrement dit la distance entre la feuille la plus éloignée et la racine, est appelé hauteur de l'arbre.*

Le niveau d'un nœud est appelé profondeur.

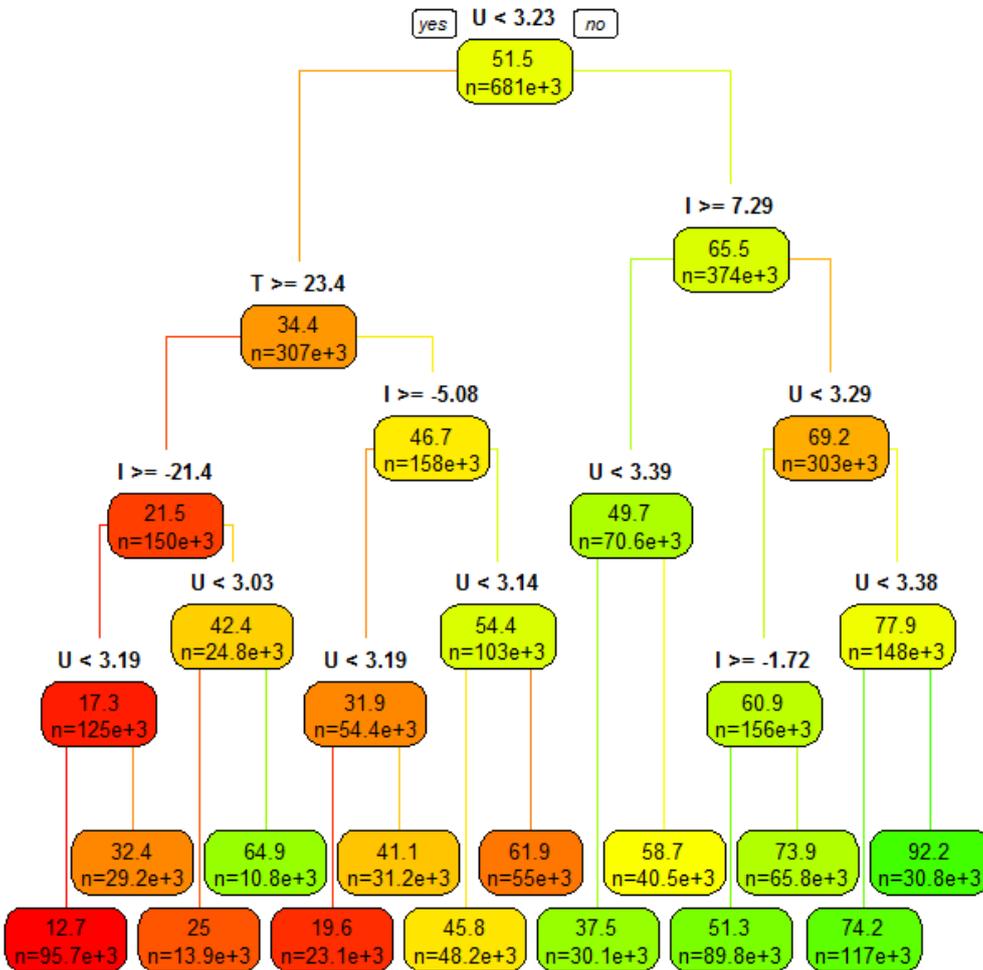


FIGURE 2 – Exemple d’arbre de régression avec le paquet rpart et rpart.plot de R (voir partie 3.3)

2.2.1 Principe détaillé de l’algorithme CART

Le principe des arbres de régression consiste à partitionner de manière récursive et dyadique l’espace d’entrée \mathbb{R}^p dans lequel sont définies les variables explicatives .

Cette partition est réalisée à l’aide de conditions imbriquées sur les variables explicatives et nous appellerons coupures.

Définition 9. Nous appelons *coupure* un élément de la forme

$$S(j, d) \cup S(j, d)^c = \{x_t | x_t^j \leq d\} \cup \{x_t | x_t^j > d\}$$

où $j \in \{1, \dots, p\}$ est le numéro d’une variable explicative et d un seuil (voir figure 3).

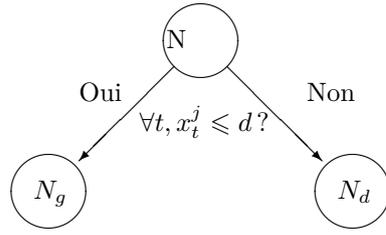


FIGURE 3 – Schématisation d'une coupure

Nous noterons $S_1, \dots, S_m, \dots, S_M$ les régions formant cette partition. Sur la figure 3, nous avons schématisé un arbre où S_m^1, \dots, S_m^n représentent des coupures. Chaque région S_m est donc l'intersection de coupures.

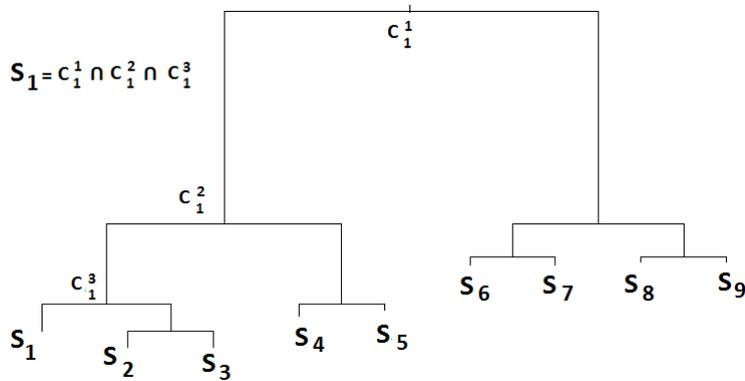


FIGURE 4 – Correspondance entre régions et feuilles de l'arbre

Dans notre cadre d'étude, nous associerons à chaque région S_m une valeur constante c_m . Nous cherchons donc un estimateur \hat{f} de f (cf. (2)) sous la forme :

$$\hat{f}(x) = \sum_{m=1}^M c_m \mathbb{1}_{x \in S_m}.$$

Par la suite, nous devons déterminer c_m et S_m de telle sorte que \hat{f} minimise (4).

Coupure optimale.

Pour découper un noeud, on va préciser la règle de coupure qui vise à diminuer à chaque étape la variance des noeuds fils :

Proposition 1. *Le découpage optimal $S(\hat{j}, \hat{d})$ est obtenu pour le couple (\hat{j}, \hat{d}) vérifiant :*

$$\begin{aligned} (\hat{j}, \hat{d}) &\in \operatorname{argmin}_{(j,d)} \left[\min_{c_1} R(c_1 \mathbf{1}_{S(j,d)}) + \min_{c_2} R(c_2 \mathbf{1}_{S(j,d)^c}) \right] \\ &\in \operatorname{argmin}_{(j,d)} \left[\min_{c_1} \sum_{x_t \in S(j,d)} (y_t - c_1)^2 + \min_{c_2} \sum_{x_t \in S(j,d)^c} (y_t - c_2)^2 \right] \end{aligned}$$

La méthode sélectionne alors la meilleure coupure, c'est-à-dire le couple (j, d) qui minimise l'erreur quadratique moyenne (MSE) (cf (4)).

Une fois la racine de l'arbre scindée en deux, on se restreint à chacun des noeuds fils et on recherche alors, suivant le même procédé, la meilleure façon de les découper en deux nouveaux noeuds, et ainsi de suite.

Remarques.

1. Une coupure est dite **admissible** si aucun des noeuds fils engendrés n'est vide.
2. Autrement dit, la meilleure segmentation $\hat{S} \in \mathcal{S}$ d'un noeud N est celle qui fera le plus décroître $R(\hat{f}_{|N})$ i.e. :

$$\hat{S} = \operatorname{argmax}_{S \in \mathcal{S}} \Delta R(S, N), \quad (6)$$

où $\Delta R(S, N) = R(\hat{f}_{|N}) - R(\hat{f}_{|N_g}) - R(\hat{f}_{|N_d})$.

3. Il existe d'autres versions de cet algorithme comme MARS, C4.5 ou CHAID qui utilisent des critères autres que l'erreur quadratique moyenne (MSE) pour choisir les meilleures coupures ([12]). Par exemple, CHAID (CHI-squared Automatic Interaction Detector) utilise un test du Chi-deux et ne prend en compte que des variables qualitatives comparé à CART qui permet d'utiliser indifféremment les deux sortes de variables : qualitatives ou quantitatives.

La proposition suivante permet de simplifier le double problème d'optimisation 6 et permet de déterminer les c_m :

Proposition 2. *En assimilant un noeud N et la partie correspondante $S(j, d)$ (j et d fixés), la valeur associée à N sera :*

$$\operatorname{argmin}_{c \in \mathbb{R}} R(c \mathbf{1}_{S(j,d)}) = \frac{1}{|\{x_t \in S(j,d)\}|} \sum_{x_t \in S(j,d)} y_t = \bar{Y}_{S(j,d)}$$

où la somme est prise sur tous les variables à expliquer y_t telle que $x_t \in S(j, d)$.

D'où le problème de coupure optimale devient :

$$\begin{aligned} (\hat{j}, \hat{d}) &\in \operatorname{argmin}_{(j,d)} \left[\min_{c_1} \sum_{x_t \in S(j,d)} (y_t - c_1)^2 + \min_{c_2} \sum_{x_t \in S(j,d)^c} (y_t - c_2)^2 \right] \\ &= \operatorname{argmin}_{(j,d)} \left[\sum_{x_t \in S(j,d)} (y_t - \bar{Y}_{S(j,d)})^2 + \sum_{x_t \in S(j,d)^c} (y_t - \bar{Y}_{S(j,d)^c})^2 \right]. \end{aligned}$$

Conclusion. Ainsi, l'arbre de régression T obtenu correspond à l'estimateur des moindres carrés \hat{f}_T de f sur l'espace des fonctions constantes par morceaux sur la partition formée par les feuilles définie par $(S_m)_{m=1,\dots,M}$. Ainsi, on a

$$\hat{f}_T(x) = \sum_{m=1}^M \hat{c}_m \mathbb{1}_{x \in S_m} = \sum_{m=1}^M \bar{Y}_{S_m} \mathbb{1}_{x \in S_m}$$

La méthode CART peut être vue ainsi comme une *sélection de modèle* sur des sous espaces de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^p, \mu)$ de *fonctions constantes par morceaux*, définies sur des partitions finies de \mathbb{R}^p .

On peut maintenant exhiber un *pseudo-code* associé à l'algorithme CART :

1. Commencer à la racine de l'arbre et associer à celle-ci toutes les observations $\{x_t = x_t^1, \dots, x_t^p\}, y_t\}$ de l'échantillon d'apprentissage.
2. Choisir la coupure optimale $\hat{S} = (x^j < \hat{d})$ comme dans la proposition 1.
3. Une fois la coupure optimale choisie, associer à chaque noeud fils la valeur présentée dans la proposition 2
4. Si le *critère d'arrêt* choisi atteint un seuil fixé à l'avance, terminer l'algorithme. Sinon, appliquer l'étape 2 à *chaque noeud fils* à son tour.

Intéressons-nous maintenant aux critères d'arrêt évoqués dans la troisième étape du pseudo-code.

Critères d'arrêt.

Il existe plusieurs règles d'arrêt qui permettent de décider si un noeud est une feuille :

Noeud pur. Un noeud devient une feuille lorsqu'il n'existe plus de coupure admissible. On dit alors que le noeud est pur.

Profondeur maximale. L'arbre atteint une profondeur maximale notée *maxdepth* fixée par l'utilisateur. La profondeur par défaut sur *rpart* est 30 et nous conserverons cette valeur pour ne pas tenir compte de ce critère.

Taille du noeud. Elle consiste à ne pas découper N si le nombre d'observations de \mathcal{L}_n contenues dans N est inférieure à un certain nombre noté *nodesize*. La valeur par défaut est 25 sur *rpart* et nous la conserverons également.

Paramètre de complexité c_p . Elle consiste à ne pas découper le noeud N via la segmentation optimale \hat{S} si $\Delta R(S, N) \geq c_p$. La valeur par défaut dans *rpart* est 0.01. Par la suite, nous essaierons de calibrer au mieux ce paramètre.

Les critères utilisés dans le package *rpart* peuvent être réglés par l'utilisateur.

2.2.2 Particularités, avantages et inconvénients

Avantages

- **CART est facile à interpréter visuellement.** En effet, il permet d'exhiber une estimation de la variable à expliquer si l'on se trouve dans certaines situations décrites par l'ensemble de décisions. (voir partie 3.3 et figure 2).
- **CART est une méthode non-paramétrique.** Elle ne requiert donc pas une spécification d'une quelconque forme fonctionnelle.
- **CART ne requière pas des variables qui ont été sélectionnées au préalable** L'algorithme lui même identifie les variables les plus significatives via un calcul d'indice d'importance (cf partie 3.3). Ainsi, cela demande une faible préparation des données.
- **Un temps de calcul satisfaisant pour de grands jeux de données.** Ceci nous intéresse fortement, car nous serons à disposition d'une banque de données d'environ 20 millions d'observations.

Cependant, il peut exister quelques inconvénients à l'utilisation d'arbres CART, mais nous pouvons sans aucun doute les contourner.

Inconvénients

- **Tendance au sur-apprentissage.** Si l'on construit un arbre dit maximal, il aura tendance à faire du sur-apprentissage. Pour pallier à ce phénomène, on l'élague l'arbre en faisant de la validation croisée pour choisir la meilleure profondeur.
- **C'est une méthode instable.** Des modifications de l'ensemble d'apprentissage peuvent amener des changements radicaux dans l'arbre comme le changement des coupures. Cependant, lorsqu'on dispose de beaucoup de données, CART est plus stable.
- **CART produit des arbres qui ne sont que binaires.** On pourrait penser à des arbres n-aires, mais cela compliquerait significativement le problème et on perdrait l'aspect visuel de cette méthode.

2.3 Indice d'importance

Un aspect qui a fait le succès des arbres CART est qu'ils sont facilement interprétables. En effet, une fois l'arbre CART construit, on se dit naturellement que les variables qui interviennent effectivement dans les découpes des noeuds de l'arbre (et particulièrement les noeuds les plus proches de la racine) sont les variables les plus utiles pour le problème considéré. C'est une façon heuristique d'avoir une information sur l'importance des variables ([4]).

Définition 10. *Importance des variables.* L'indice d'importance d'une variable explicative x^j de l'arbre T est définie par :

$$I(x^j) = \sum_{N \in T} \Delta R(\widehat{S}(j, d), N) \quad (7)$$

où $\Delta R(\widehat{S}(j, d), N)$ a été défini en (6).

2.4 Exemple : Estimation de la quantité de charge d'une batterie-cellule

Nous avons dans un premier temps à disposition un fichier nommé « 11_alldata.mat » qui correspond à des données de laboratoire sur une batterie-cellule de capacité 15 Ah environ. L'échantillon de données est de taille 681232 et contient 5 variables :

y : Quantité de charge (SOC[%])

x_1 : Intensité délivrée (I[A])

x_2 : Température ambiante ($T_{amb}[C]$)

x_3 : Tension de la batterie (U[V])

x_4 : Température interne (T[C])

On peut faire l'histogramme de ces 5 variables explicatives et à expliquer (voir figure 5).

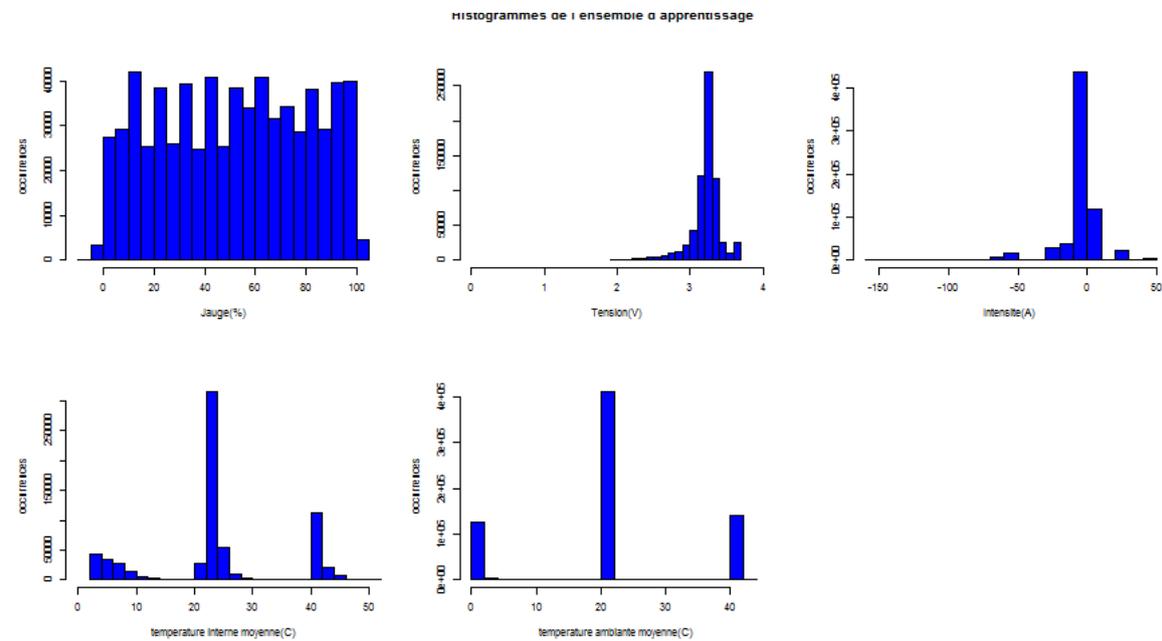


FIGURE 5 – Histogrammes de l'ensemble d'apprentissage

La figure 6 nous montre l'arbre obtenu.

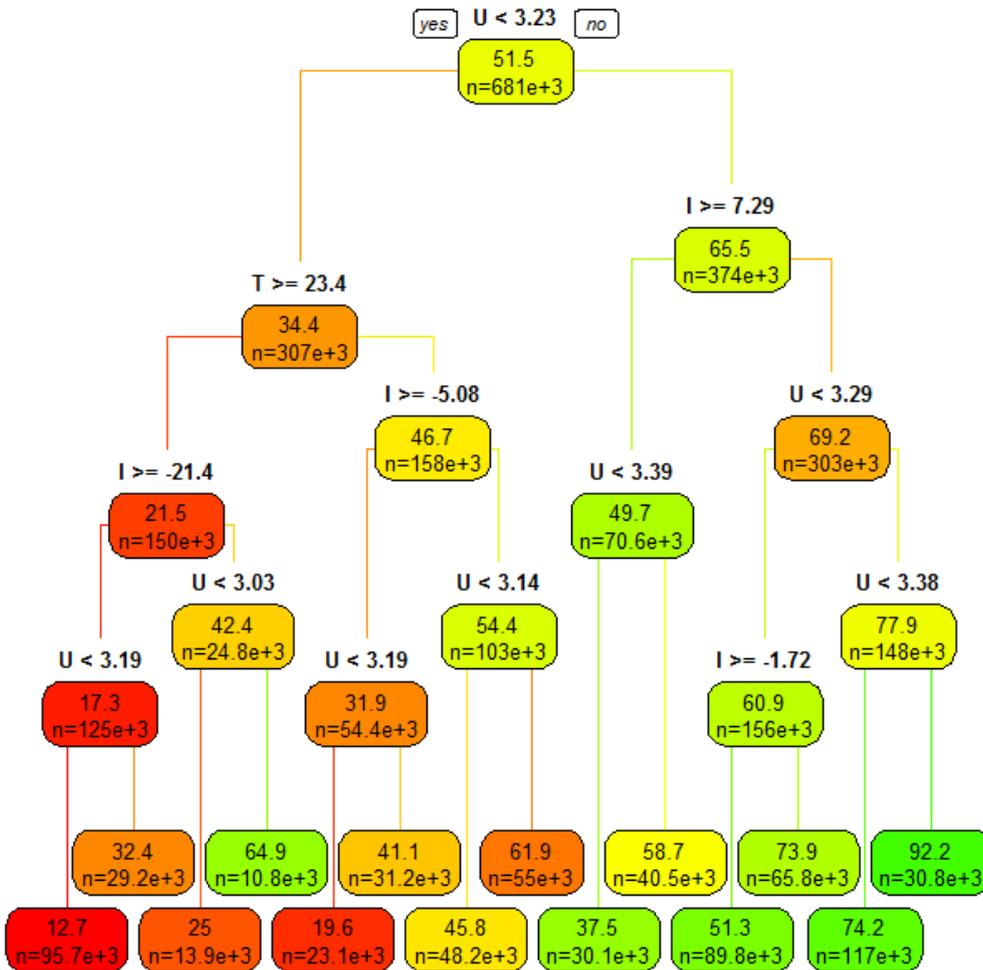


FIGURE 6 – arbre de régression $c_p = 0.01$ avec le package rpart, rpart.plot de R

Expliquons par exemple la branche extérieure droite depuis la racine jusqu'à la feuille toute à droite. Si la tension U est supérieure à 3.38, et si $I < 7.29$, alors la batterie est presque chargée (elle l'est si $U = 3.6V$). Ainsi, on peut avoir une estimation d'un SOC assez élevée ici 92 % dans ces conditions-ci.

Remarque. Il n'y a que trois des quatre variables qui interviennent dans les coupures. En particulier, la température ambiante n'intervient pas. Nous pouvons alors utiliser l'outil nommé *indice d'importance* défini précédemment qui quantifie ce phénomène (voir figure 7).

Nous pouvons également voir une répartition des SOC estimés dans les différentes feuilles (voir figure 8). Nous voyons par exemple qu'il n'y a pas d'estimation de SOC entre 85 et 95%.

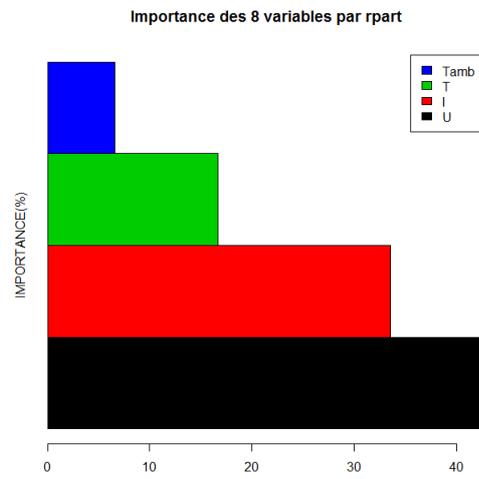


FIGURE 7 – Indice d'importance(%) avec le package rpart de R

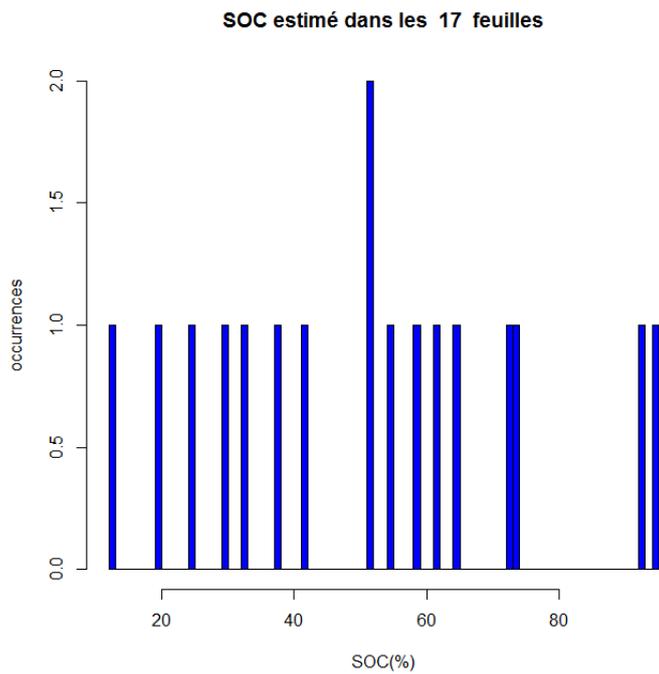


FIGURE 8 – Répartition des SOC estimés dans les feuilles avec le package rpart de R

2.5 Arbre maximal et élagage

Comme nous l'avons vu précédemment, le paramètre cp gère la profondeur de l'arbre. Par exemple, si $cp=0.01$ dans la construction d'un arbre avec le paquet `rpart`, cela signifie que n'importe quel noeud où la segmentation optimale ne fait pas décroître l'erreur quadratique moyenne (MSE) d'un facteur 0.01 n'est pas découpé et devient une feuille.

Ainsi, plus l'arbre est complexe (beaucoup de noeuds), plus il va bien apprendre l'échantillon d'apprentissage, mais aussi plus il va faire de l'overfitting : adaptation uniquement à l'échantillon d'apprentissage, mais beaucoup d'erreurs sur un nouvel échantillon de test. La complexité doit donc être pénalisée, d'où un paramètre cp (complexity parameter).

Donc, plus cp est petit, plus l'arbre peut être grand (beaucoup de noeuds), plus il est grand, plus la complexité est pénalisée.

Maintenant qu'on a compris comment on construisait un arbre de régression, on peut maintenant s'intéresser aux forêts aléatoires.

3 Forêts aléatoires

3.1 Principes et mécanismes

La définition générale des forêts aléatoires est la suivante :

Définition 11. Soit $(\hat{f}(\cdot, \Theta_1), \dots, \hat{f}(\cdot, \Theta_L))$ une collection d'estimateurs par arbre, où $(\Theta_1, \dots, \Theta_L)$ est une suite de variables aléatoires *i.i.d.*, indépendante de l'échantillon d'apprentissage \mathcal{L}_n . *L'estimateur par forêt aléatoire est obtenu par agrégation (i.e en faisant la moyenne de cette collection d'estimateurs).*

Remarques. Le terme forêt aléatoire vient du fait que les estimateurs individuels sont, ici, explicitement des estimateurs par arbre.

Concernant le vocabulaire des forêts aléatoires, il existe une ambiguïté dans la littérature. En effet, Leo Breiman, dans son article de 2001 ([3]), définit les forêts aléatoires comme ci-dessus. Les forêts aléatoires sont donc pour lui une famille de méthodes.

Or, dans le même article, il présente un cas particulier de forêts aléatoires, appelées Random Forests-RI, qu'il a ensuite implémentées ([5],[11]).

Par suite, ce sont ces Random Forests-RI qui ont été utilisées dans de très nombreuses applications réelles. Et pour cause, le programme est accessible à tous, facile d'utilisation et la méthode atteint des performances exceptionnelles. Finalement, la dénomination "forêts aléatoires" désigne dans toute la suite les Random Forests-RI.

3.2 Random Forests-RI (Random Inputs)

Comment construit-on de tels objets? Pour ce faire, on a besoin de la définition d'un échantillon bootstrap :

Définition 12. Un échantillon bootstrap $\mathcal{L}_n^{\Theta_\ell}$ est obtenu en *tirant aléatoirement* n observations *avec remise* dans l'échantillon d'apprentissage \mathcal{L}_n , chaque observation ayant une probabilité $\frac{1}{n}$ d'être tirée. La variable aléatoire Θ_ℓ représente alors ce tirage aléatoire.

1. Pour $\ell = 1, \dots, L$ faire :
 - (a) Générer un échantillon **bootstrap** $\mathcal{L}_n^{\Theta_\ell}$.

(b) Créer un arbre aléatoire T_ℓ associé à $\mathcal{L}_n^{\Theta_\ell}$ en répétant récursivement les trois étapes suivantes pour chaque noeud de l'arbre jusqu'à ce que *nodesize* soit atteint :

- (i) Choisir aléatoirement m variables explicatives parmi p .
- (ii) Prendre le meilleur couple variable explicative/seuil pour ces m variables.
- (iii) Couper le noeud en deux noeuds fils.

2. Renvoyer la collection d'arbres $(T_\ell)_{\ell=1, \dots, L}$ obtenue.

Conclusion. *L'estimateur par forêt aléatoire est obtenue de la façon suivante pour tout $x \in \mathbb{R}^p$:*

$$\hat{f}_{RF}^L(x) = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \hat{f}_{T_\ell}(x).$$

Remarques.

1. Le tirage, à chaque noeud, des m variables se fait, **sans remise**, et uniformément parmi toutes les variables (chaque variable a une probabilité $\frac{1}{p}$ d'être choisie). Le nombre m ($m \leq p$) est fixé au début de la construction de la forêt et est donc identique pour tous les arbres.
2. Pour les Random Forests-RI, il y a donc deux sources d'aléas pour générer la collection des estimateurs individuels : l'aléa dû au bootstrap et l'aléa dû choix des variables pour découper chaque noeud d'un arbre. Ainsi, on perturbe à la fois l'échantillon sur lequel on lance la règle de base, et à la fois le coeur de la construction de la règle de base.

Ainsi, l'explication des performances des forêts aléatoires réside dans le fait que rajouter un aléa supplémentaire pour construire les arbres, rend ces derniers encore plus différents les uns des autres, sans pour autant dégrader leurs performances individuelles. L'estimateur agrégé est alors meilleur. ([1],[4]).

Par ailleurs, la méthode nous fournit une estimation de l'erreur de généralisation ou MSE residuals.

3.3 Erreur Out-of-Bag(OOB)

Définition 13. *Erreur OOB.*

- Fixer une observation (x_t, y_t) de \mathcal{L}_n .
- Considérer l'ensemble des arbres construits sur les échantillons bootstrap **ne contenant pas** cette observation.
- **Agréger** alors uniquement les estimations de ces arbres pour fabriquer notre estimation \hat{y}_t de y_t .
- Après avoir fait cette opération pour toutes les données de \mathcal{L}_n , calculer l'erreur commise par nos estimations, **l'erreur quadratique moyenne en régression** :

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - y_t)^2$$

Remarques. Cette estimation s'impose les mêmes contraintes que celles des estimateurs classiques de l'erreur de généralisation ou MSE residuals (échantillon test, validation croisée), au sens où les données estimées sont des données qui n'ont pas été rencontrées au préalable par l'estimateur utilisé. Un avantage de l'erreur OOB par rapport aux estimateurs classiques est qu'elle ne nécessite pas de découpage de l'échantillon d'apprentissage. Ce découpage est en quelque sorte inclus dans la génération des différents échantillons bootstrap ([11]).

3.4 Indice d'importance

Il est important de pouvoir donner une interprétation qualitative des variables qu'on utilise. Quelles sont les variables vraiment nécessaires pour expliquer la sortie ? De quelles variables peut-on se passer ?

Ainsi, un indice d'importance des variables, spécifique aux forêts et différent de celui proposé par CART, est introduit par Breiman en 2001 ([3]) dans son article. Le principe est le suivant :

- Fixons $j \in \{1, \dots, p\}$ et détaillons le calcul de l'indice d'importance de la variable x^j .
- Considérons un échantillon bootstrap \mathcal{L}_n^ℓ et l'échantillon OOB_ℓ associé, c'est-à-dire l'ensemble des observations qui n'apparaissent pas dans \mathcal{L}_n^ℓ .
- Calculons $errOOB_\ell$, l'erreur commise sur OOB_ℓ par l'arbre construit sur \mathcal{L}_n^ℓ (erreur quadratique moyenne).
- Permutons alors **aléatoirement** les valeurs de la j -ième variable dans l'échantillon OOB_ℓ . Ceci donne un échantillon perturbé, noté $O\tilde{O}B_\ell^j$.
- Calculons enfin $errO\tilde{O}B_\ell^j$ l'erreur sur l'échantillon $O\tilde{O}B_\ell^j$.

Nous effectuons ces opérations pour tous les échantillons bootstrap. L'importance de la variable x^j , $I(x^j)$ est définie par la différence entre l'erreur moyenne d'un arbre sur l'échantillon OOB perturbé et celle sur l'échantillon OOB :

$$I(x^j) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L errO\tilde{O}B_\ell^j - errOOB_\ell$$

Ainsi, plus les permutations aléatoires de la j -ième variable engendrent une forte augmentation de l'erreur, plus la variable est importante. Cet indice est par ailleurs implémenté sous R.

Maintenant que l'on a passé en revue les principaux outils et mécanismes des deux méthodes, on va pouvoir réaliser les premières simulations.

4 Premières simulations sur un petit jeu de données

4.1 Description des données

Nous avons eu tout d'abord à disposition 2 jeux de données issues de roulages d'un véhicule électrique.

Les deux jeux de données que nous noterons 1 et 2 ont pour tailles respectives 51629 et 66673. Ils contiennent 9 variables :

y : Quantité de charge en % (SOC)

x^1 : Intensité délivrée en A (I)

x^2 : Température ambiante en C (T_{amb})

x^3 : Tension de la batterie en V (U)

x^4 : Température arrière coeur en C (T.AR.COEUR)

x^5 : Température arrière surface en C (T.AR.SURFACE))

x^6 : Température avant coeur en C (T.AV.COEUR)

x^7 : Température avant surface en C (T.AV.SURFACE)

x^8 : Temps en s (Temps)

On peut alors représenter le SOC (état de charge) des jeux de données en fonction du temps (voir figure 9). Le jeu 2 présente un phénomène de charge intéressant, peut être du à un profil de route contenant une descente.

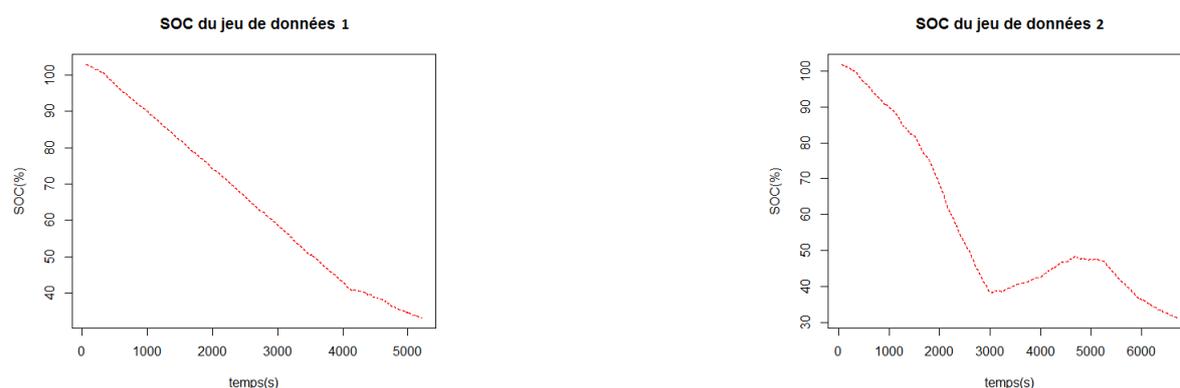


FIGURE 9 – Courbes SOC en fonction du temps des jeux 1 et 2

Nous avons décidé de tester les deux méthodes sur les deux jeux de données pour les comparer. Mais le paquet `randomForest` ne réussit pas à traiter (en tout cas sur l'ordinateur utilisé) des données de taille supérieure à 15000, à cause de problèmes de mémoire. Par ailleurs, nous avons pris en compte 8 variables explicatives et à expliquer car pour l'instant, nous ne tiendrons pas compte de la variable explicative x_8 : temps dans l'apprentissage.

Nous avons alors choisi de prendre au hasard 2/3 de l'ensemble des points pour l'apprentissage et le tiers restant pour le test. Afin de réaliser l'ensemble d'apprentissage pour les forêts aléatoires, nous avons pris les 15000 premières observations de tout l'ensemble d'apprentissage conçu. L'ensemble de test sera donc le même pour une certaine cohérence.

Nous pouvons examiner l'histogramme des variables explicatives de l'ensemble d'apprentissage complet et de test de chacun des jeux (voir figures 10,11,12 et 13).

Les ensembles d'apprentissage et de test du jeu 1 sont très similaires. On remarque que toutes les valeurs de SOC ne sont pas représentées, en particulier celles en dessous de 20%. De plus, on remarque que l'intensité de la batterie est aussi bien positive que négative, ce qui atteste de la présence de phénomènes de charge et de décharge.

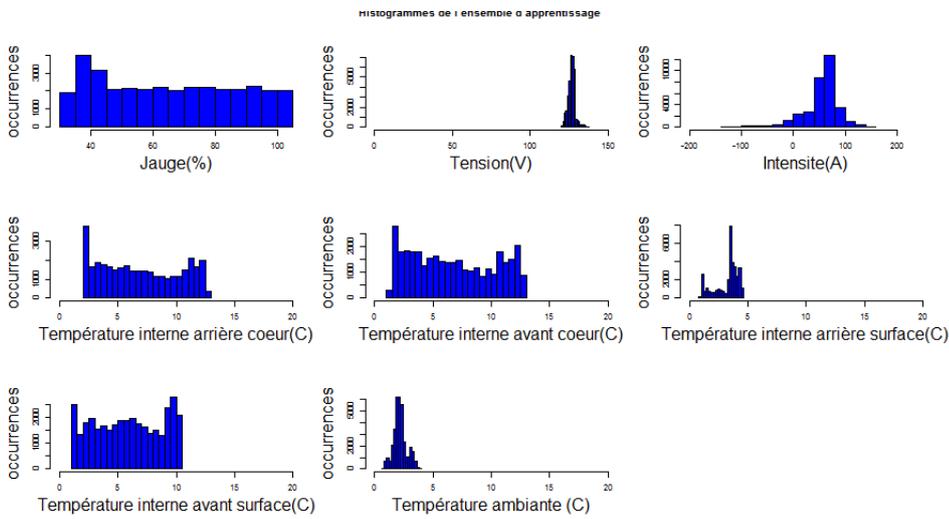


FIGURE 10 – Histogrammes des variables explicatives de l'ensemble d'apprentissage du jeu 1

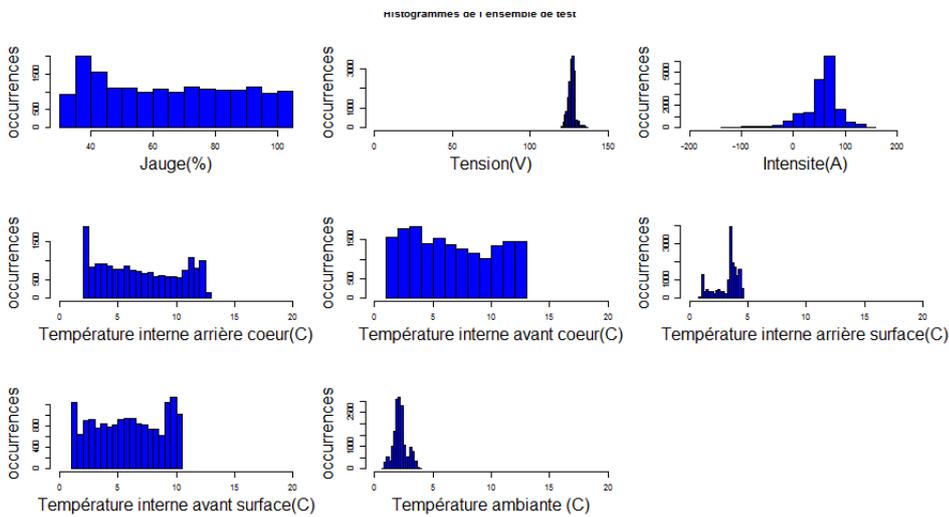


FIGURE 11 – Histogrammes des variables explicatives de l'ensemble de test du jeu 1

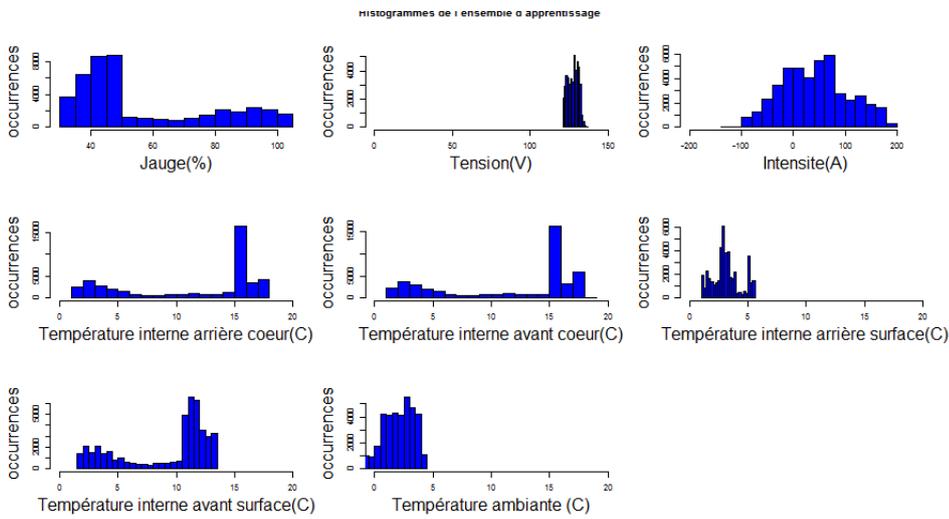


FIGURE 12 – Histogrammes des variables explicatives de l'ensemble d'apprentissage du jeu 2

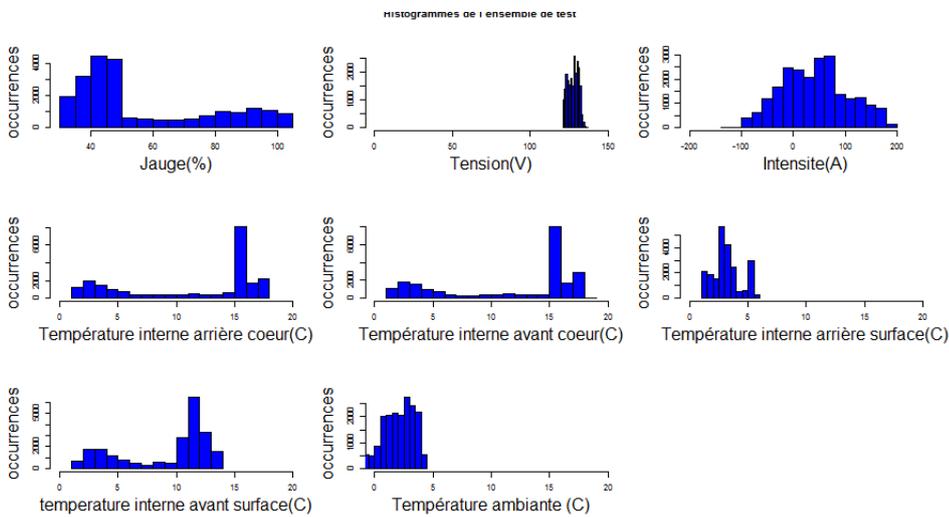


FIGURE 13 – Histogrammes des variables explicatives de l'ensemble de test du jeu 2

On peut faire les mêmes remarques que pour le jeu 1, à savoir que les ensembles d'apprentissages et de test sont très similaires.

4.2 Résultats

Forêts aléatoires

Nous obtenons les résultats suivants lorsque nous appliquons nos estimateurs par forêts aléatoires, construit sur les 15000 premiers points de l'ensemble d'apprentissage, à l'ensemble de test pour chacun des jeux de données (voir figure 14).

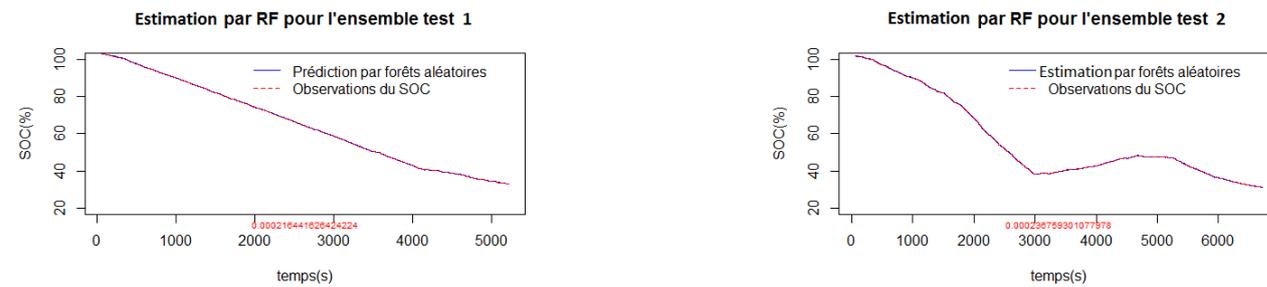


FIGURE 14 – Estimation par forêts aléatoires sur l'ensemble de test des jeux 1 (à gauche) et 2 (à droite)

L'erreur quadratique moyenne (MSE residuals) est de l'ordre de 10^{-4} donc est très faible et très satisfaisante.

Nous pouvons également l'erreur OOB calculée par `RandomForest`.

%%%%Jeu 1%%%

```
randomForest(formula = SOC ~ ., data = Lapp6)
  Type of random forest: regression
    Number of trees: 500
No. of variables tried at each split: 2

Mean of squared residuals: 0.001013173
  % Var explained: 100
```

%%%%Jeu 2%%%

```
randomForest(formula = SOC ~ ., data = Lapp7)
  Type of random forest: regression
    Number of trees: 500
No. of variables tried at each split: 2

Mean of squared residuals: 0.0008487355
  % Var explained: 100
```

L'erreur OOB est moins optimiste que notre erreur quadratique moyenne (MSE residuals) calculée.

Par ailleurs, nous pouvons afficher l'indice d'importance des variables pour les deux jeux de données (voir figure 15).

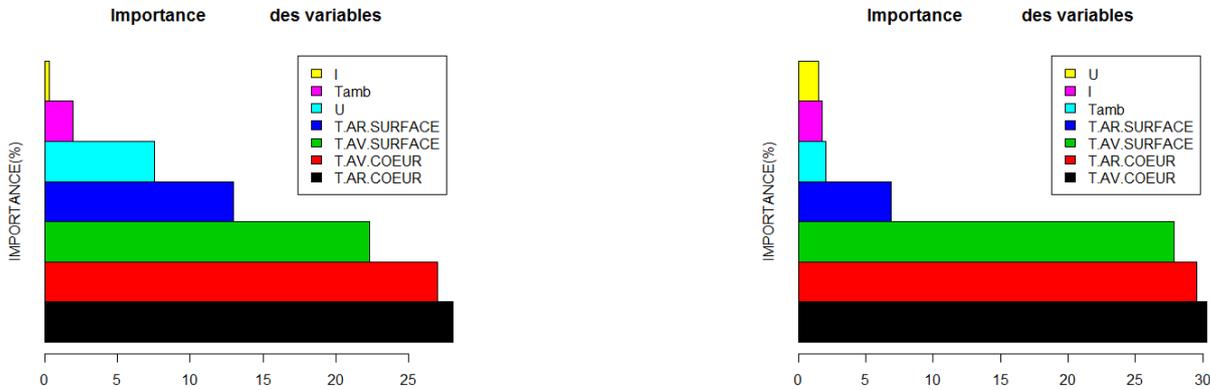


FIGURE 15 – Indice d'importance des variables explicatives par forêts aléatoires pour les jeux 1 (à gauche) et 2 (à droite)

Ainsi, pour les deux jeux de données, la température interne de la batterie semble être la variable la plus importante.

Maintenant, nous pouvons nous demander si l'estimateur construit pour le jeu 1 était aussi un bon estimateur pour le jeu 2 et vice versa, car on voudrait trouver un estimateur robuste. La figure 16 nous montre que l'estimation est satisfaisante et l'estimateur du jeu 1 estime bien le phénomène de charge présent dans la courbe SOC du jeu 2. Pour avoir une idée plus précise des erreurs d'estimation que l'on fait dans chaque cas, regardons la valeur absolue de la différence entre la valeur observée et la valeur prédite pour chacun des points des ensembles de tests (voir figure 17). Ainsi, l'erreur est moins bonne pour l'estimation du jeu 1 sur le jeu 2 mais pour les deux expériences, les erreurs observées sont en moyenne autour de $3\% \pm 2\%$ pour la première et $6\% \pm 3\%$ pour la deuxième, ce qui reste acceptable au vue de la contrainte imposée (estimer au plus à 5% près).

CART

Appliquons après ceci la méthode CART en prenant soin de choisir un cp optimal. Nous avons choisi une valeur élevée pour cp ici égal 10^{-6} pour pouvoir élaguer l'arbre ensuite en utilisant la fonction `prune`. Nous obtenons les résultats suivants pour les jeux 1 et 2 :

```
####Jeu 6####
Regression tree:
rpart(formula = SOC ~ ., data = app6[, c(1:8)], method = "anova",
      control = rpart.control(cp = 10^-6, usesurrogate = 0))
```

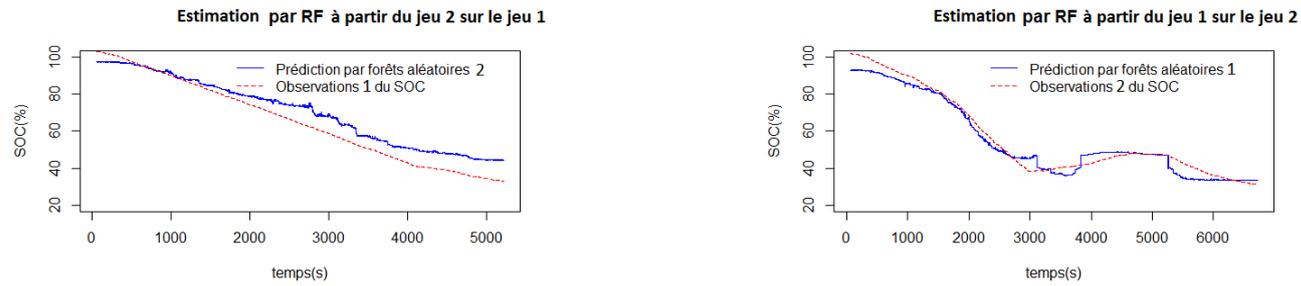


FIGURE 16 – A gauche : Apprentissage par forêts aléatoires à partir du jeu 2 pour une estimation sur le jeu 1. A droite : Apprentissage par forêts aléatoires à partir du jeu 1 pour une estimation sur le jeu 2.

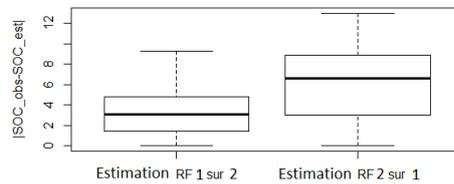


FIGURE 17 – Boîtes à moustaches des erreurs de l'estimation sur l'ensemble de test 1 et 2 pour forêts aléatoires

Variables actually used in tree construction:
 [1] T.AR.Coeur T.AR.Surface T.AV.Coeur T.AV.Surface Tamb
 [6] U

Root node error: 16406322/34419 = 476.66

n= 34419

	CP	nsplit	rel error	xerror	xstd
1	7.7298e-01	0	1.0000e+00	1.0001e+00	4.4816e-03

####Jeu 7####

Regression tree:
`rpart(formula = SOC ~ ., data = app7[, c(1:8)], method = "anova",
 control = rpart.control(usesurrogate = 0, cp = 1e-06))`

Variables actually used in tree construction:
 [1] T.AR.Coeur T.AR.Surface T.AV.Coeur T.AV.Surface Tamb

[6] U

Root node error: 21194150/44448 = 476.83

n= 44448

	CP	nsplit	rel error	xerror	xstd
1	8.6731e-01	0	1.0000e+00	1.0000e+00	5.1733e-03

Nous avons décidé de ne pas tout afficher car la table de cp contient 125 lignes. Il est préférable de faire appel à la représentation graphique en utilisant la fonction `plotcp` (voir figure 18).

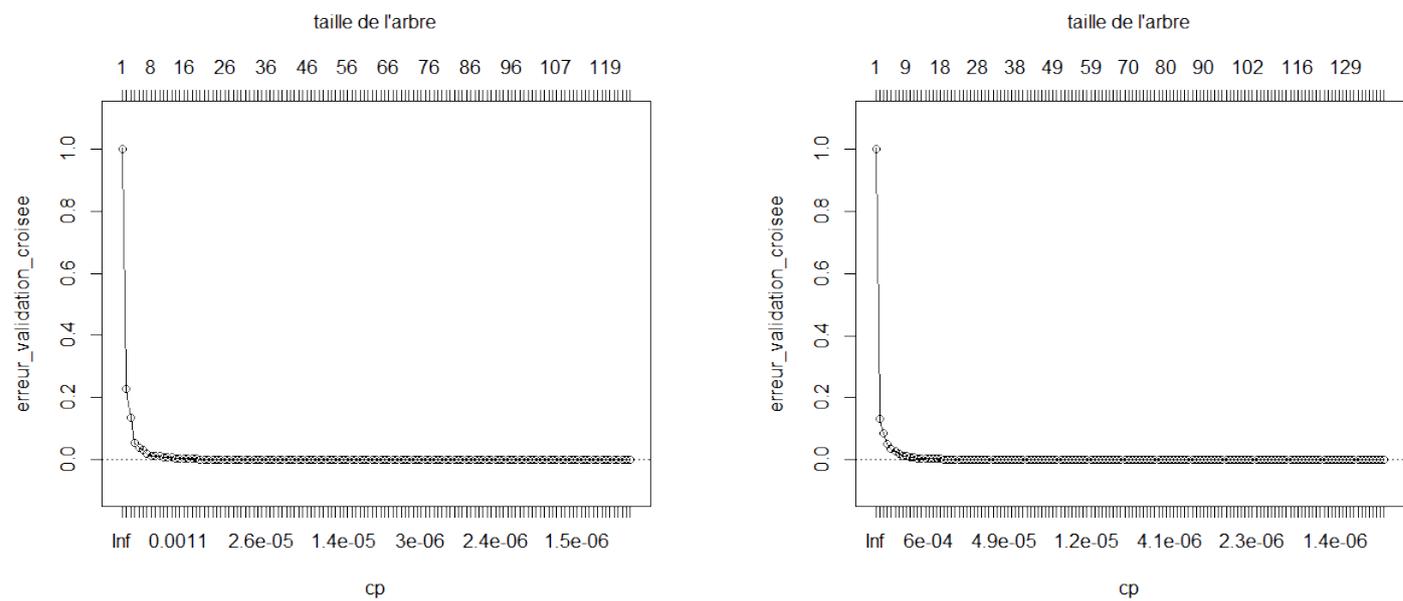


FIGURE 18 – Erreur en validation croisée (10 fold) en fonction de cp effectué par rpart pour les jeux 1 et 2

Au vue des résultats, il semblerait que l'on puisse prendre $cp=10^{-6}$, car il n'y a eu aucun sur-apprentissage et la règle de l'écart-type confirme ce choix. Ici, nous n'avons pas besoin d'élaguer.

Appliquons donc notre estimateur par CART à l'ensemble de test pour chacun des jeux. Les résultats obtenus pour les jeux 1 et 2 sont présentées par la figure 19 .

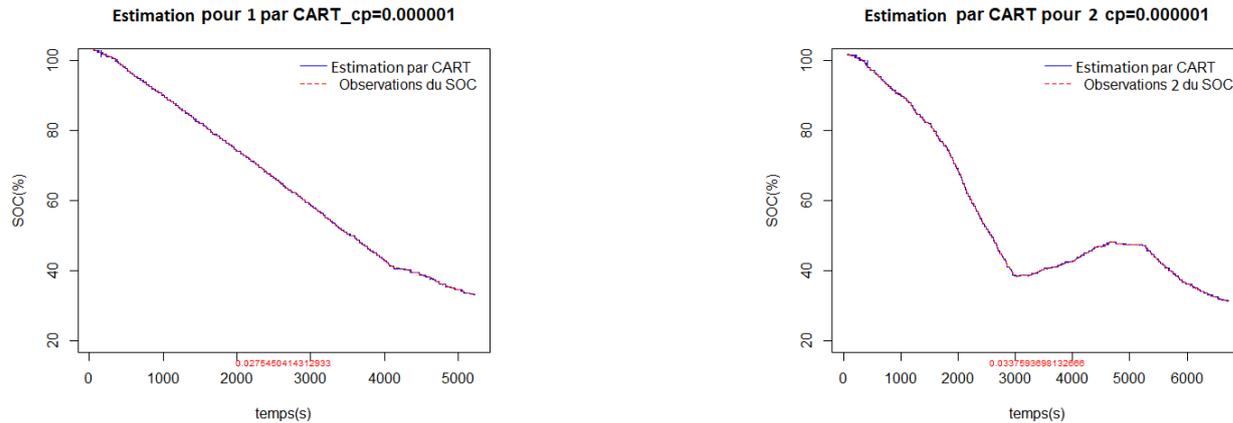


FIGURE 19 – Estimation par CART avec $cp=10^{-6}$ sur l'ensemble de test des jeux 1 et 2

Là aussi, les estimations sont satisfaisantes avec une erreur moyenne quadratique (MSE residuals) très faible.

Intéressons-nous plus précisément aux arbres obtenus et aux propriétés de ceux-ci. Présentons les résultats de la façon suivante :

- Le début de l'arbre (jusqu'à la profondeur 5)
- Importance des variables
- Histogramme des valeurs de SOC estimés dans les feuilles de l'arbre

Les figures 20 et 21 montrent que la température interne semble être la plus importante et semble celle qui détermine si la batterie est en décharge. Si l'on prend la branche de la racine jusqu'à la feuille toute à gauche de l'arbre élaboré sur le jeu 6, nous pouvons voir que si la température interne est élevée (supérieure à 12), la batterie est dans une phase de décharge d'où un SOC estimé assez faible de 35%. Cela se confirme en observant l'importance des variables (voir figure 22).

De plus, si nous regardons l'histogramme des feuilles (voir figure 23), nous remarquons qu'il n'y a pas de SOC estimé en dessous de 30 % pour les deux jeux, mais cela s'explique car dans les données d'apprentissages, elles ne sont pas représentées.

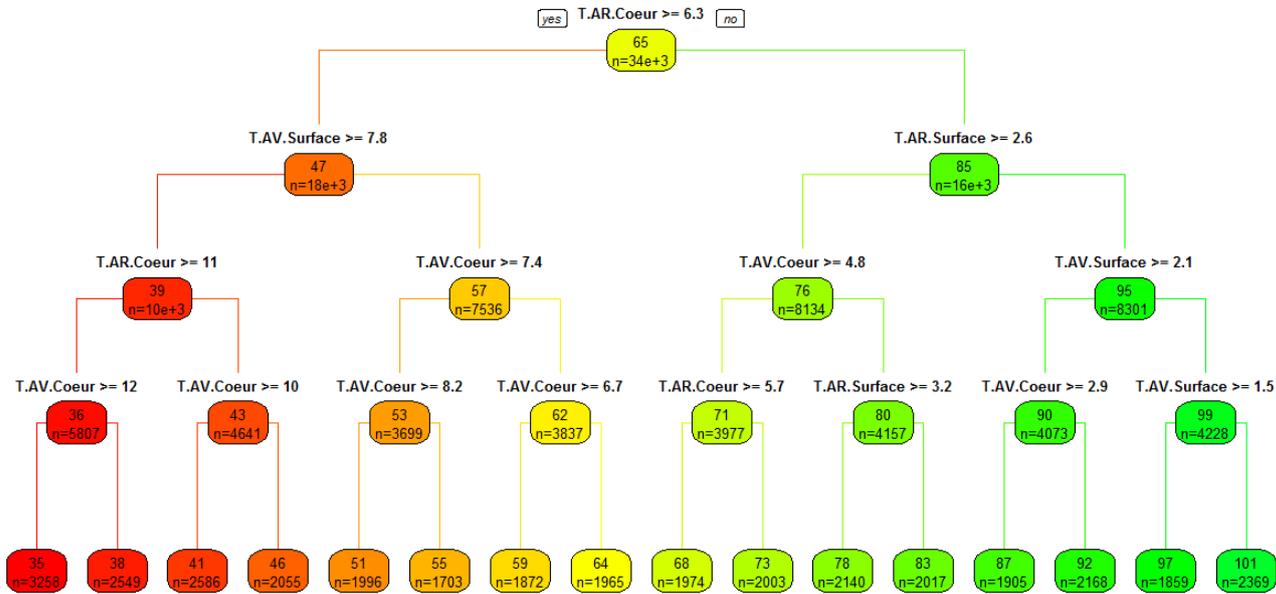


FIGURE 20 – Arbre de régression (jusqu'à la profondeur 5) avec $cp=10^{-6}$ pour le jeu 1

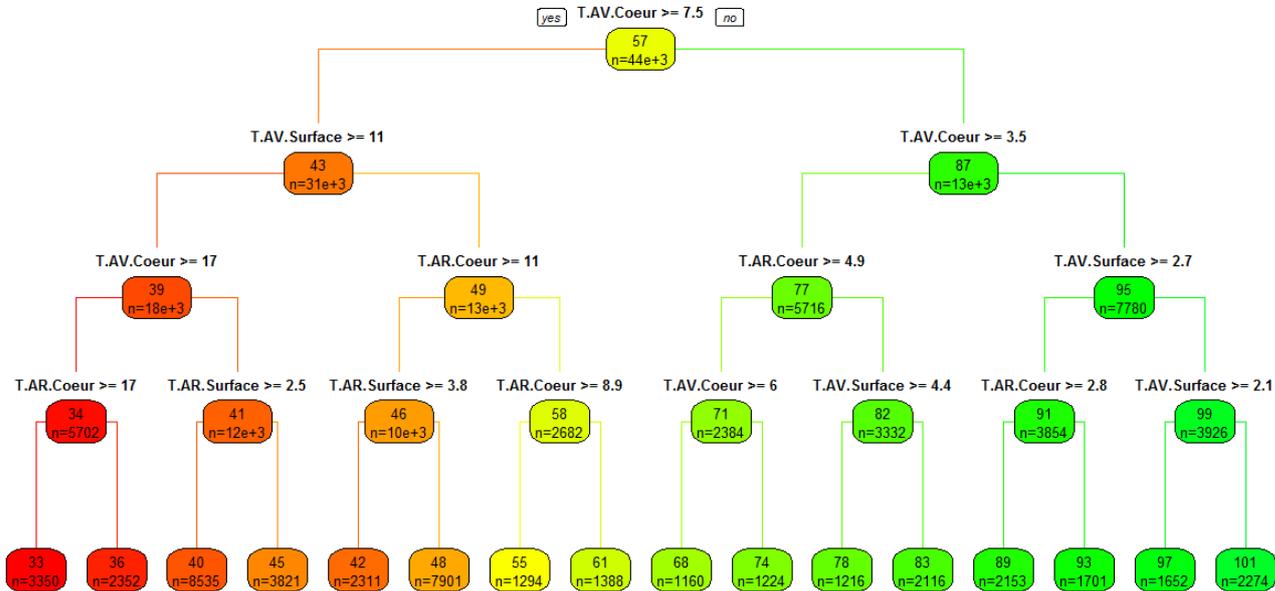


FIGURE 21 – Arbre de régression (jusqu'à la profondeur 5) avec $cp=10^{-6}$ pour le jeu 2

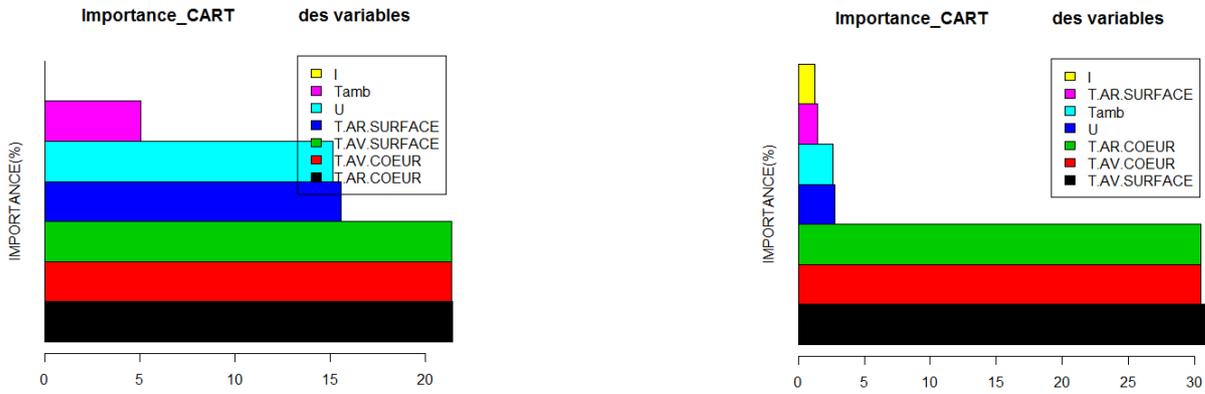


FIGURE 22 – Importance des variables explicatives par CART avec $cp=10^{-6}$ pour les jeux 1 et 2

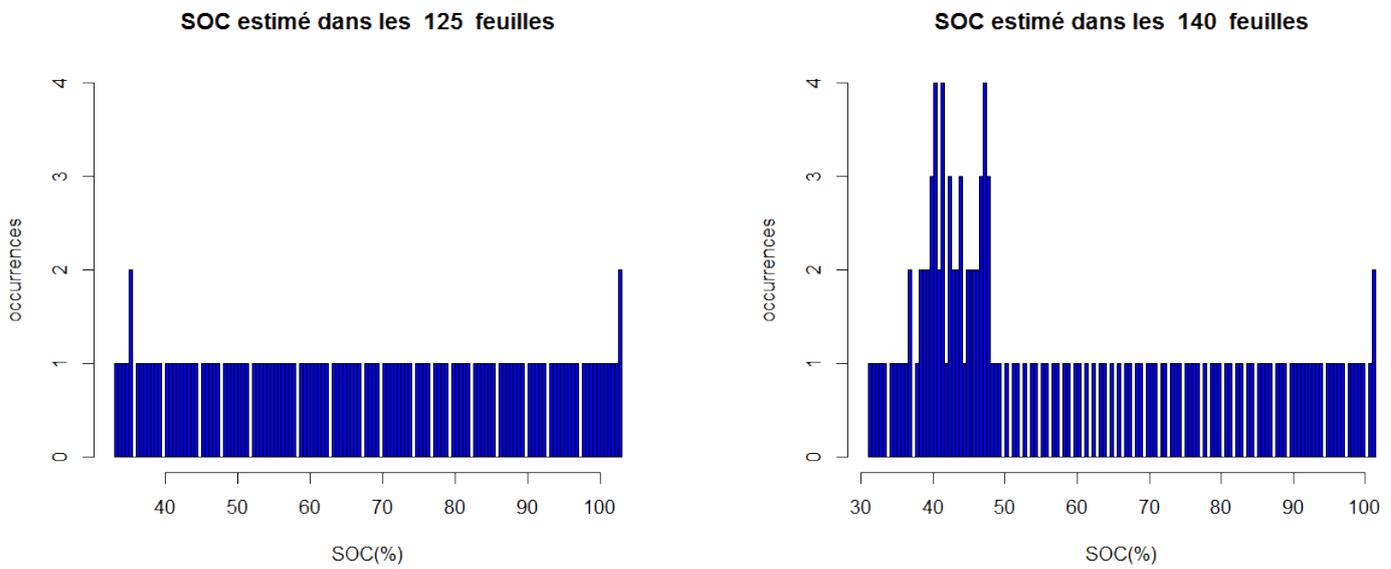


FIGURE 23 – Histogrammes des valeurs de SOC estimés dans les feuilles des arbres CART avec $cp=10^{-6}$ pour les jeux 6 et 7

Etant donné que les performances de CART semblent être similaires, regardons comme pour les forêts aléatoires, les expériences qui consistent à estimer notre jeu 2 à l'aide de l'estimateur par arbre construit sur le jeu 1 et vice et versa (voir figure 24).

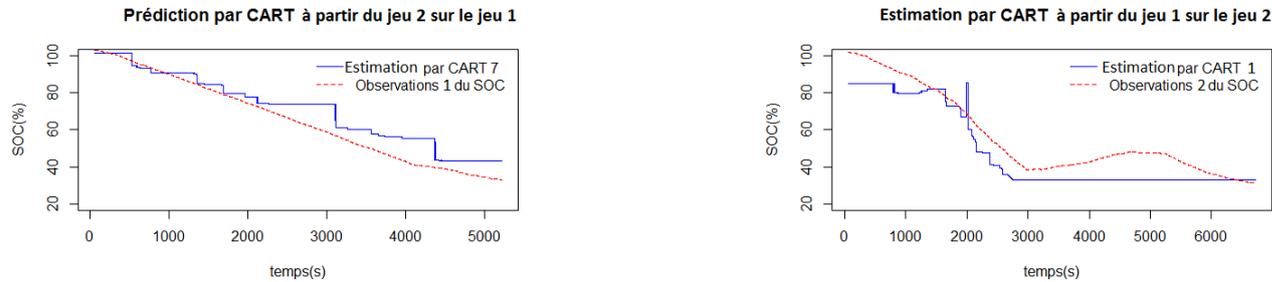


FIGURE 24 – A gauche : Apprentissage par CART à partir du jeu 1 pour une estimation sur le jeu 2. A droite : Apprentissage par CART à partir du jeu 2 pour une estimation sur le jeu 1

Le fait surprenant c'est que contrairement aux forêts aléatoires, l'estimation par CART élaboré sur le jeu 1 ne parvient pas à rendre compte du phénomène de charge présent dans le jeu 2, et reste constant sur celui-ci. Comment expliquer ce phénomène ? Une des raisons peut être la température ambiante (voir figure 25).

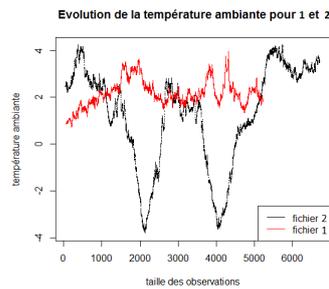


FIGURE 25 – Température ambiante en fonction du temps des jeux 1 et 2

Les estimations faites avec le jeu 1 pour les SOC autour de 40% correspondent à une température ambiante a peu près constante, voire en légère augmentation autour de 2 degrés. Or pour le jeu 2, lorsque le SOC est à 40%, il y a une chute brutale de la température ambiante a -2 C, et donc les conditions de température ambiante ne permettent pas de prévoir ce phénomène de charge à partir de l'arbre construit sur le jeu 1.

Globalement, les erreurs (voir figure 26) pour les deux expériences sont respectivement en moyenne autour de $8\% \pm 5\%$ et $6\% \pm 4\%$.

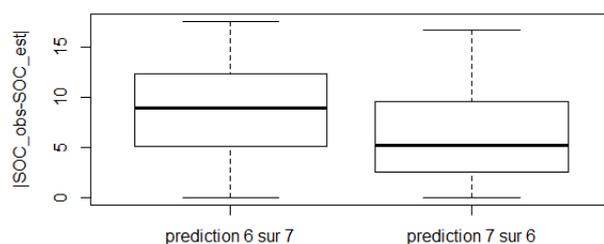


FIGURE 26 – Boxplot des erreurs d’estimation sur l’ensemble de test 1 et 2 pour CART

4.3 Conclusion

La température interne semble importante pour les deux méthodes. Ainsi il serait intéressant de prendre en compte toutes les mesures disponibles relatives à cette variable explicative à l’avenir. Par ailleurs, nous avons également refait le même protocole en normalisant les données pour voir s’il y avait une incidence sur l’importance des variables, mais les résultats restent inchangés.

Nous pouvons alors remarquer que les forêts aléatoires semblent légèrement donner de meilleurs estimations que CART au vue des résultats mais ne peut pas prendre en compte beaucoup d’observations. Par ailleurs, nous avons vu que les comportements sont différents selon les températures ambiantes et peuvent amener à de mauvaises estimations.

Ainsi, cet exemple a été formateur car il a permis d’une part de mettre en oeuvre pour la première fois les méthodes CART et les forêts aléatoires, d’en maîtriser les premiers rudiments et d’en voir les limites computationnelles. D’autre part, il a permis de dégager quelques premières conclusions qui pourront être utiles par la suite, lorsque nous étudierons les autres données.

5 Les données d’étude

5.1 Description des données d’étude

Les données mises à disposition ont été réalisées via un véhicule électrique nommé WILL équipé d’une batterie électrique LFP (capacité nominale de 75 Ah, puissance de 80Wh/kg) du CEA/LITEN (Grenoble).

Elles sont issues d’un processus de 17 mois réparti en 6 sessions (voir figure 27) :

- un usage en véhicule électrique réel sur circuit (voir figure 28) correspondant à **4 sessions**,
- un stockage complet correspondant à **1 session**,
- Usage en banc de test correspondant à **1 session**

Par ailleurs, les sessions sont entrecoupées de **check-up**, pour mesurer certaines variables comme la résistance ou la capacité.

Dans le cadre du stage, nous nous intéresserons uniquement à l’usage en véhicule réel sur circuit correspondant aux **4 sessions**.

Ces roulages ont été effectués sous un même profil de vitesse, qui a été conçu pour être représentatif de tous les usages possibles (voir figure 29).

De plus, ils correspondent environ à 9 mois de tests de Mars à Décembre 2011 et à 35000 km parcourus sur le circuit. Les données découlant de ces roulages ont été répertoriés sous formes de fichiers textes et

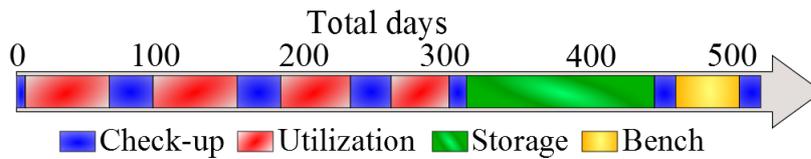


FIGURE 27 – Déroulement du processus relatif aux données



FIGURE 28 – Véhicule et circuit sur lesquels ont été effectués les roulages

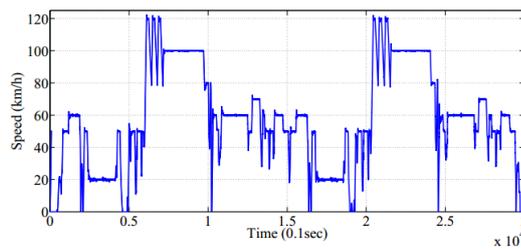


FIGURE 29 – Profil de vitesse commun aux roulages effectués

sont au nombre de 1677. Mais comme nous l'avons décrit précédemment, chaque session est entrecoupée de **check-up**, et dans le cadre du stage, nous allons ne pas considérer ces fichiers relatifs à ces check-up. Ainsi, les fichiers de données à traiter dans le cadre du stage, sont au nombre de 916 et ont des longueurs variables. Les mesures ont été prises toutes les 0.1 secondes.

Chaque fichier contient a priori 29 variables :

"TEMPS"	"ALTITUDE"	"CAPACITE"	"COUPLE ROUES"
"CUMUL E ENTRE BAT"	"CUMUL E SORTI BAT"	"CUMUL NB CHARGE BAT"	"DISTANCE"
"E BAT CONSO"	"I BAT"	"I BAT ACC"	"I TRACTION"
"JAUGE"	"KILOMETRAGE"	"LATITUDE"	"LONGITUDE"
"MODE BMS"	"MODE SDHT"	"T AMB"	"T BAT 001"
"T CEL MAX"	"T CEL MIN"	"U ACC"	"U BAT"
"U CEL 001"	"U CEL MAX"	"U CEL MIN"	"VITESSE"
"VITESSE GPS"	"VOY DEFAULT"		

Dans le cadre du stage, nous allons considérer seulement quelques variables explicatives, les plus importantes pour expliquer le SOC qui seront précisées dans la partie suivante.

Nous avons choisi parmi les 30 variables explicatives et à expliquer disponibles celles qui suivent : le SOC coulométrique, la tension, l'intensité, la température ambiante et la température interne de la batterie.

Etant donné les conclusions précédentes concernant la température interne de la batterie, nous avons choisi de prendre les 3 mesures disponibles relatives à la température interne de la batterie. Ainsi, nous avons choisi de prendre en compte les 7 variables explicatives et à expliquer suivantes :

y : Quantité de charge ou SOC (JAUGE[%])

x^1 : Intensité délivrée (I_{BAT} [A])

x^2 : Tension de la batterie (U_{BAT} [V])

x^3 : Température ambiante (T_{amb} [C])

x^4 : Température interne minimale des 20 capteurs ($T_{CEL_{MIN}}$ [C])

x^5 : Température interne maximale des 20 capteurs ($T_{CEL_{MAX}}$ [C])

x^6 : Température interne moyenne des 20 capteurs ($T_{BAT_{001}}$ [C])

Par ailleurs, pour essayer de prendre en compte la dimension temporelle, nous avons décidé de calculer et d'introduire les 2 variables explicatives suivantes :

x^7 : Différence de tension entre l'instant $t - 1$ et t (ΔU [V])

x^8 : Différence d'intensité entre l'instant $t - 1$ et t (ΔI [A]).

5.2 Préparation des données

Pour effectuer cette tâche, nous avons utilisé le logiciel Matlab, car il était plus facile de modifier les fichiers existants et d'effectuer des opérations sur ceux-ci. Dans un premier temps, nous avons décidé de ne pas prendre en compte les fichiers qui ne présentaient pas de température ambiante, et les fichiers pour lesquels les valeurs de SOC étaient constantes à 100% du début du fichier jusqu'à la 5 000^{ième} observation.

Avec ces premiers nettoyages de fichiers, nous avons à considérer 724 fichiers. Elles représentent à elles toutes 21569141 observations. Nous pouvons d'ores et déjà représenter les courbes SOC en fonction du temps (voir figure 30).

On remarque qu'il existe des courbes avec le même comportement et nous disposons par ailleurs d'un fichier avec une phase de recharge assez conséquente.

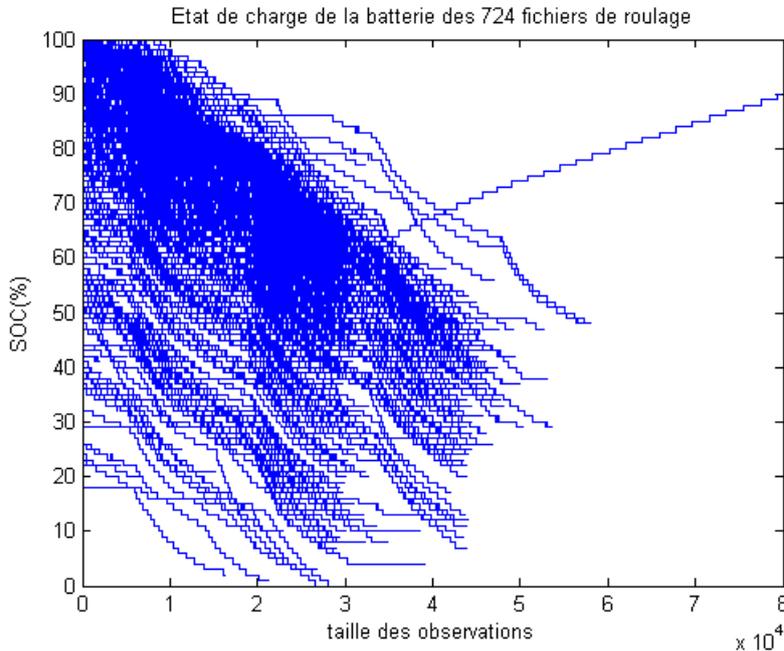


FIGURE 30 –

5.3 Nécessité de sous-échantillonnage

Nous avons constaté que les paquets `rpart` et `RandomForest` étaient limités en ce qui concerne le nombre d'observations dans l'ensemble d'apprentissage. En effet, d'une part, `rpart` ne prend en compte que 1 million observations et `RandomForest` d'autre part, ne peut utiliser que 15000 observations.

On ne peut donc pas prendre en compte les 21,5 millions environ d'observations d'où l'idée de sous-échantillonnage. Par ailleurs, compte tenu des remarques de la section précédente, nous avons pensé à une première possibilité de regroupement en rassemblant les courbes SOC par comportement similaire. De plus les conclusions sur les jeux 6 et 7 nous invitent également à classer les courbes SOC par température ambiante.

Une autre possibilité de regroupement est de considérer non plus les courbes dans leur globalité, mais les observations dans leur globalité et de les regrouper par plage de SOC et par température ambiante.

5.4 Plan d'expériences

Le plan d'expérience est alors le suivant :

1. Charger les données et calculer si besoin de nouvelles variables (Δ_U, Δ_I).
2. Regrouper les données par température ambiante ou par plage de SOC ou autre critère.
3. Visualiser les groupes réalisés.
4. Diviser les données en trois ensembles : ensemble d'apprentissage (élaboration de stratégies pour le construire), de validation pour calibrer les paramètres du modèle et de test, les visualiser.
5. Faire l'apprentissage et calibrer les paramètres du modèle via l'échantillon de validation.
6. Tester sur l'échantillon de test et visualiser les résultats obtenus.

Nous allons dans un premier temps essayer de classifier les courbes SOC qui ont le même comportement en élaborant une distance.

6 Elaboration de groupes et expériences

6.1 Classification par comportement similaire et température ambiante

6.1.1 Principe

Comme nous l'avons dit précédemment, on pourrait rassembler toutes les courbes SOC qui se "ressemblent" et qui définissent alors un même profil.

Mais comment définir le mot "ressembler"? Quelle distance mettre entre deux courbes pour décider du fait qu'elles soient proches ou non?

On a alors décidé de prendre comme critère **la corrélation maximale** entre deux courbes x et y qui permet d'une part, de gérer la longueur variable des courbes et d'autre part de quantifier cette "ressemblance". Elle est définie par :

$$\Gamma_{x,y} = \max_{\tau} \Gamma_{x,y}(\tau)$$

où

$$\Gamma_{x,y}(\tau) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t-\tau)dt$$

avec $[t_1; t_2]$ le domaine de définition de x .

On va ensuite regarder la corrélation maximale normalisée :

$$\Gamma_{x,y}^{norm} = \frac{\Gamma_{x,y}}{\sqrt{\Gamma_{x,x}\Gamma_{y,y}}}$$

Nous obtenons ainsi la matrice (symétrique) de corrélation C des 724 fichiers (voir figure 31).

En posant $D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} - C$, on obtient une matrice de distance D pour les courbes SOC.

Alors, pour ensuite classifier grossièrement les courbes SOC via cette distance, nous avons décidé d'appliquer une variante de l'algorithme des k-means, **l'algorithme des k-medoids** (les centres des classes sont choisis parmi les points existants) qui prend en entrée le nombre de classes et la matrice de distance (voir annexe).

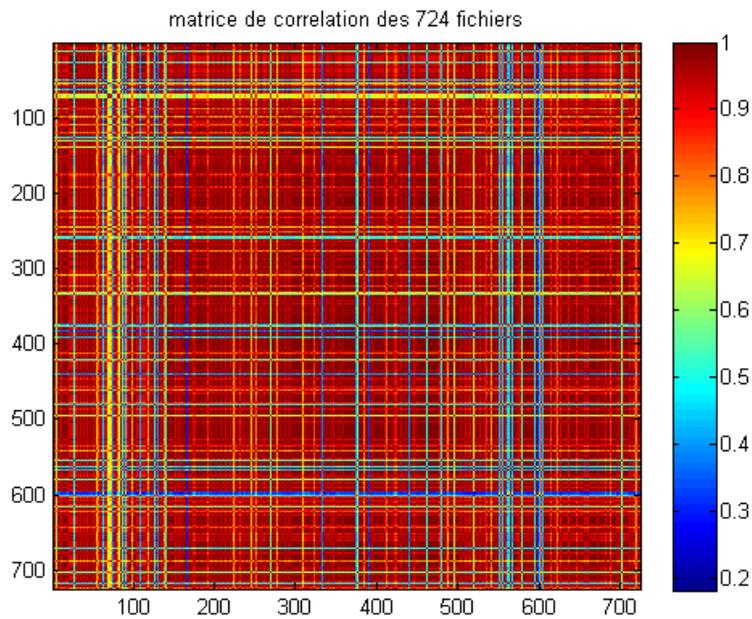
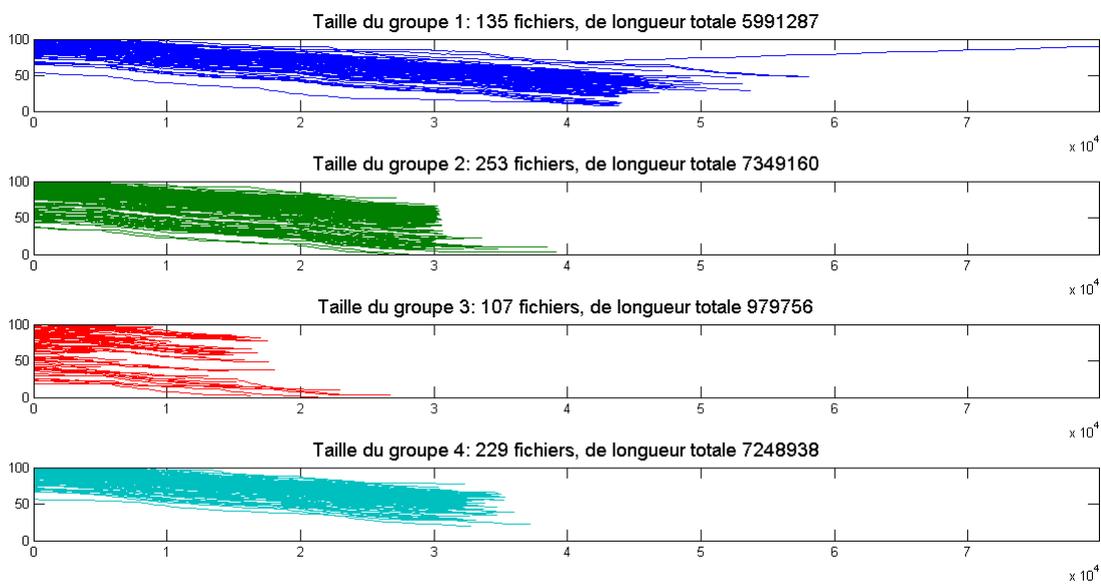
Dans un premier temps, nous avons fixé le nombre de classes égal à 4, mais nous pourrions établir un plan d'expérience pour sélectionner le modèle adéquat via un critère, comme par exemple l'indice de Davies-Bouldin.

Via cet algorithme, nous obtenons les 4 classes suivantes (voir figure 32).

Cette classification a permis de regrouper les courbes SOC qui semblent avoir le même comportement mais surtout celles qui ont une longueur similaire.

Pour parfaire cette classification, comme les comportements sont différents selon les températures ambiantes, nous allons diviser chacun des groupes en 4 groupes selon la température ambiante moyenne des fichiers :

- $0 \leq T_{amb_{moy}} < 10 \Rightarrow T_1$
- $10 \leq T_{amb_{moy}} < 20 \Rightarrow T_2$

FIGURE 31 – Matrice de corrélation C des 724 fichiersFIGURE 32 – 4 groupes élaborés via l'algorithme des k-medoids et de la distance Γ

- $20 \leq T_{amb_{moy}} < 30 \Rightarrow T_3$
- $30 \leq T_{amb_{moy}} < 40 \Rightarrow T_4$

Comme pour la température ambiante moyenne T_4 , il y a très très peu de fichiers, nous n'allons pas pour l'instant, considérer ce groupe pour faire des tests. Nous disposons donc de 12 groupes (voir figure 33).

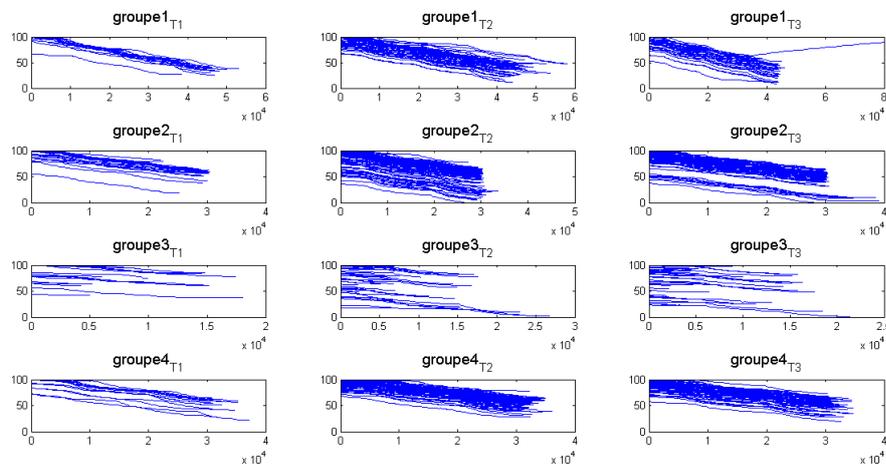


FIGURE 33 – 12 groupes de courbes SOC effectué via la corrélation maximale et les classes de température ambiante moyenne

Chaque ligne correspond à un groupe donné précédent et chaque colonne à une des 4 températures ambiantes. Le tableau suivant donne la taille des groupes en nombres d'observations.

Groupe \ Température	T_1	T_2	T_3
1	902351observations	3246816	1754175
2	1216562	3345280	2502962
3	190380	4416604	316307
4	549669	4088388	2455438

Passons maintenant aux expériences réalisées sur ces groupes.

6.1.2 Expériences

Pour chacun des groupes, nous avons conservé 10% des observations pour l'échantillon test. Pour les groupes où il y avait plus d'un million d'observations, nous avons mis de côté 10% pour l'ensemble de validation pour calibrer le paramètre c_p et pour l'apprentissage nous avons utilisé un million d'observations parmi ceux restants. Pour les autres groupes, nous avons eu recours à la validation croisée pour la phase de validation. En ce qui concerne Random Forest, nous avons pris les mêmes échantillons tests que ceux utilisés pour la méthode CART. Et nous avons choisi au hasard 15000 points au hasard parmi l'échantillon d'apprentissage élaboré pour la méthode CART pour chacun des groupes.

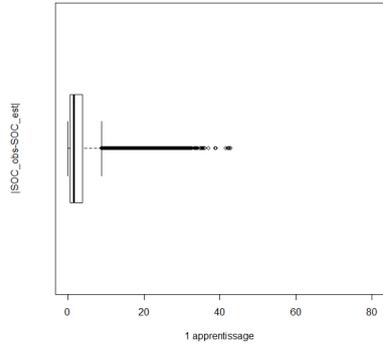
6.1.3 Résultats et commentaires

Random Forest

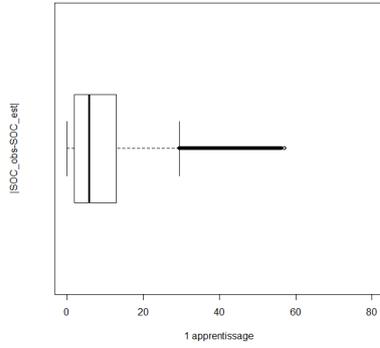
Après avoir effectué les 10 apprentissages, nous avons représenté les erreurs pour la norme 1 réalisé à partir de l'échantillon test (voir figure 34). Les erreurs sont assez satisfaisantes, mais il reste des valeurs atypiques très élevées pour chacun des groupes. Nous pouvons noter que les meilleurs résultats s'effectuent

pour le groupe 3 à la température T1 et T2, et le groupe 4 à la température T1. Cela vient peut être du fait que ces derniers sont de taille petite en nombre d'observations .

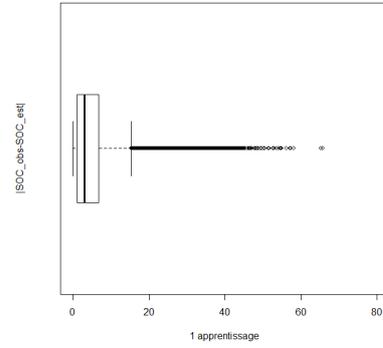
test sur 90235 points avec RF1_1



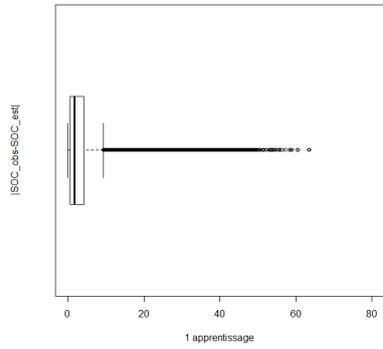
test sur 324681 points avec RF1_2



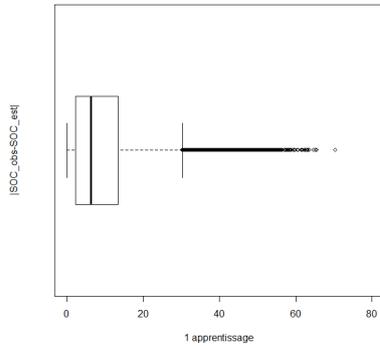
test sur 175417 points avec RF1_3



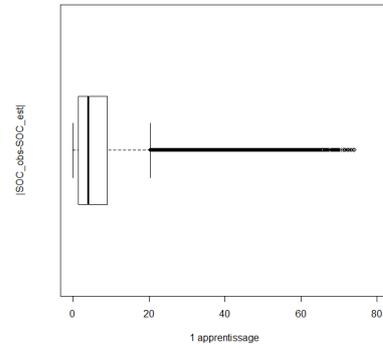
test sur 121656 points avec RF2_1



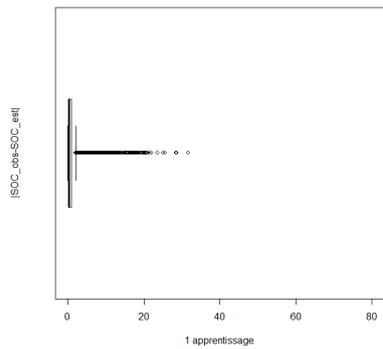
test sur 334528 points avec RF2_2



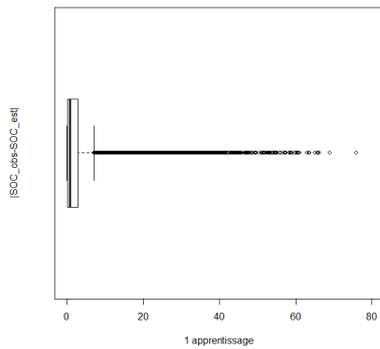
test sur 250296 points avec RF2_3



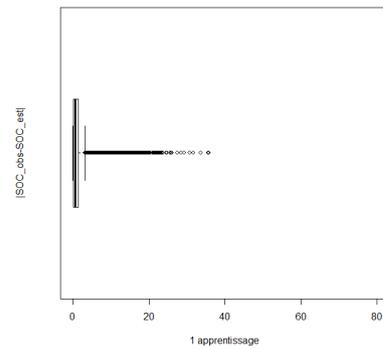
test sur 19038 points avec RF3_1



test sur 44160 points avec RF3_2



test sur 31630 points avec RF3_3



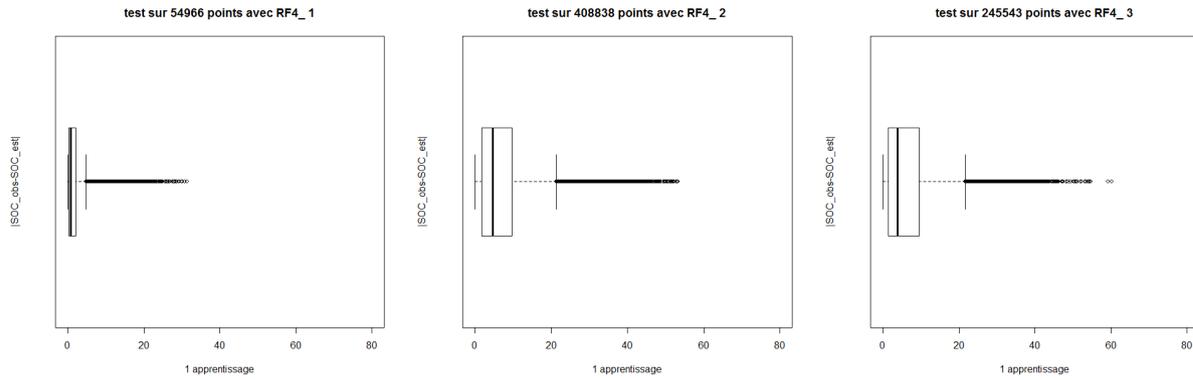
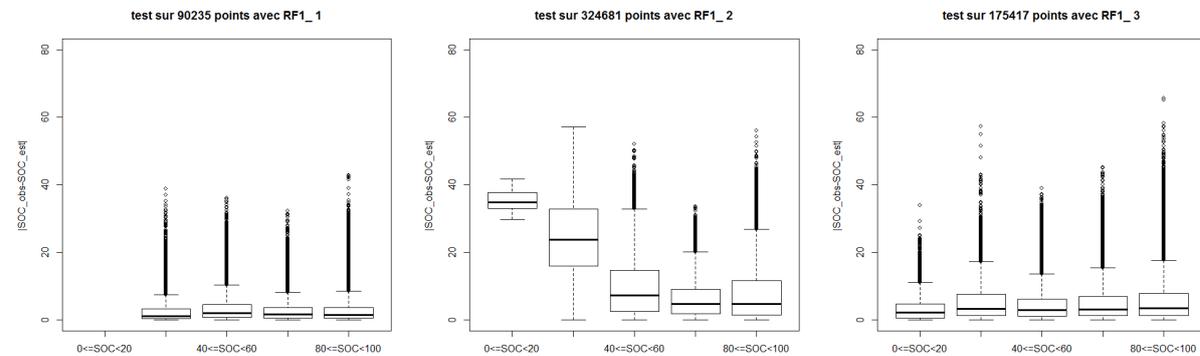


FIGURE 34 – Erreur pour la norme 1 pour les 12 groupes avec RandomForest

Pour mieux comprendre ces erreurs, nous avons choisi de les décomposer selon 5 différentes plages de SOC d'amplitude 20% suivantes :

- $0 \leq SOC < 20 \Rightarrow SOC_1$
- $20 \leq SOC < 40 \Rightarrow SOC_2$
- $40 \leq SOC < 60 \Rightarrow SOC_3$
- $60 \leq SOC < 80 \Rightarrow SOC_4$
- $80 \leq SOC \leq 100 \Rightarrow SOC_5$

La figure 35 nous montre que les erreurs les plus grossières pour la plupart des groupes se trouvent dans les plages de 0-20% et 20-40%. En revanche, pour les deux dernières plages, les résultats sont assez satisfaisants malgré certaines valeurs aberrantes (environ 15000 observations au maximum sur un million).



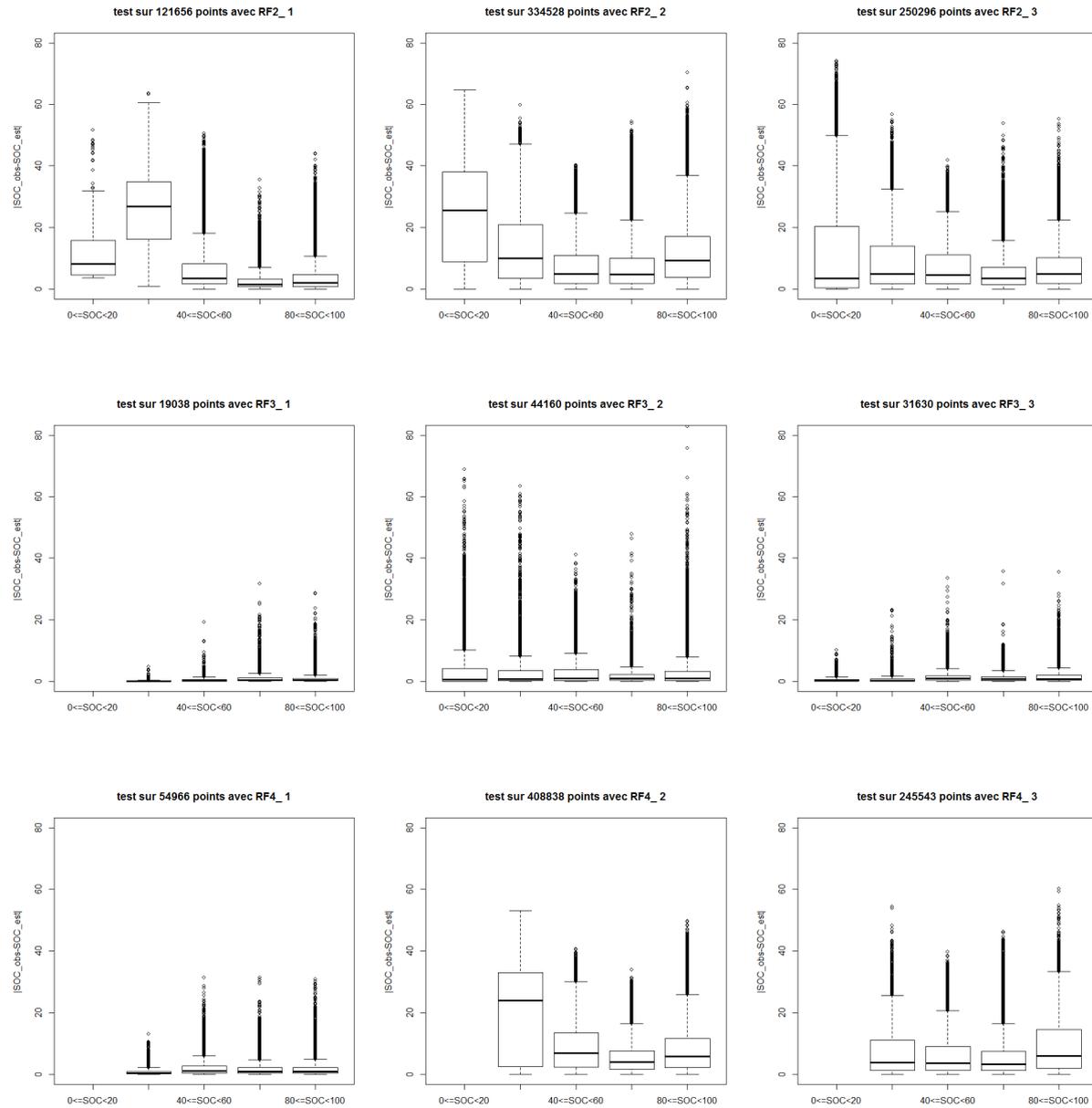


FIGURE 35 – Décomposition de l'erreur par plages de SOC pour la norme 1 pour les 12 groupes avec RandomForest

CART

Etant donné que pour les petits groupes, l'allure des courbes semblait exclure le choix d'un c_p égal à 10^{-7} , nous avons choisi de faire la procédure jusqu'à $c_p = 10^{-6}$. Par ailleurs, nous avons pris comme erreur dans la phase de validation, la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (RMSE), plus facile à interpréter car elle a la même unité que la variable à expliquer.

Nous obtenons alors les courbes de la figure 36.

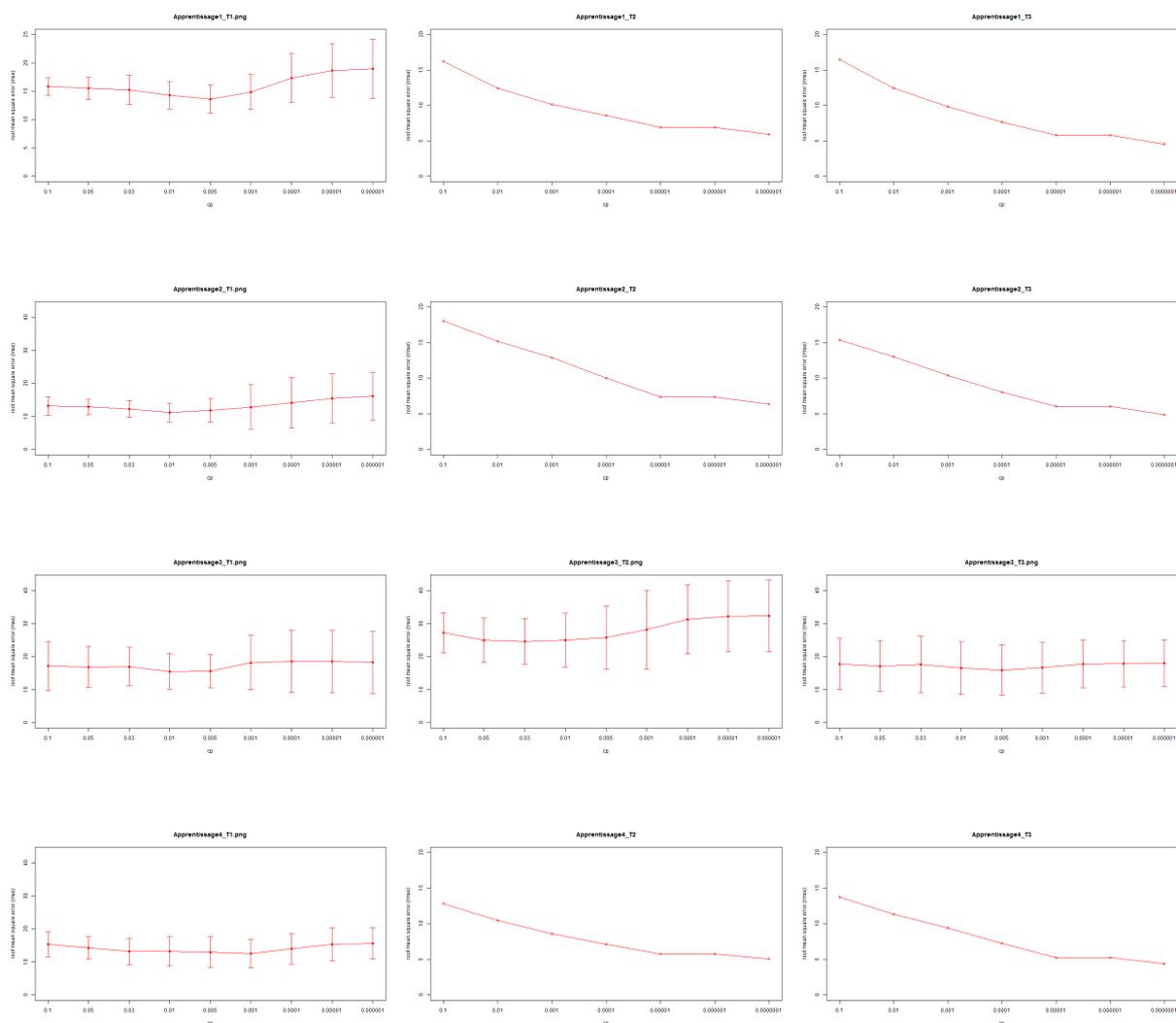


FIGURE 36 – Evolution de l'erreur RMSE en fonction de c_p pour les 12 groupes

Nous observons deux comportements suivant la taille des groupes. Ceci semble en accord avec le fait que le c_p choisi est souvent d'autant plus petit que le nombre d'observations est grand. On a tendance ainsi à faire du sur-apprentissage lorsque l'on a peu d'observations et un arbre peu profond évite cela. La table suivante nous montre les c_p choisis pour chacun des groupes.

Groupe \ Température	T_1	T_2	T_3
1	$c_p = 0.05$	0.0000001	0.0000001
2	0.01	0.0000001	0.0000001
3	0.01	0.03	0.005
4	0.001	0.0000001	0.0000001

Nous avons donc élagué les arbres avec les c_p optimaux choisis dans la table.

Pour des questions de lisibilité, nous avons choisi de montrer le début de l'arbre, l'importance des variables et l'histogramme des SOC estimés pour deux groupes représentatifs des petits et grands apprentissages. Les conclusions tirées sont similaires pour les autres groupes de chaque ensemble. Ainsi, lorsque l'on a peu d'observations pour l'apprentissage, la température interne semble être la plus discriminante, et dans le cas contraire c'est la tension. Par ailleurs, les SOC en dessous de 20% sont peu représentés car dans la base de données d'étude, il en existe peu. (voir figures 37, 38, 39 et 40)

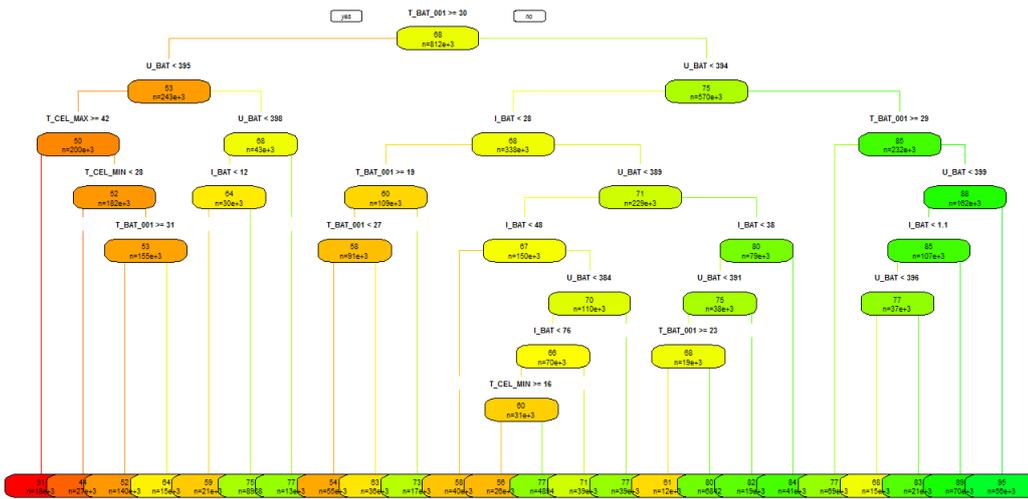


FIGURE 37 – Début de l'arbre pour le groupe $1T1$ avec $c_p=0.05$ jusqu'à la profondeur 5

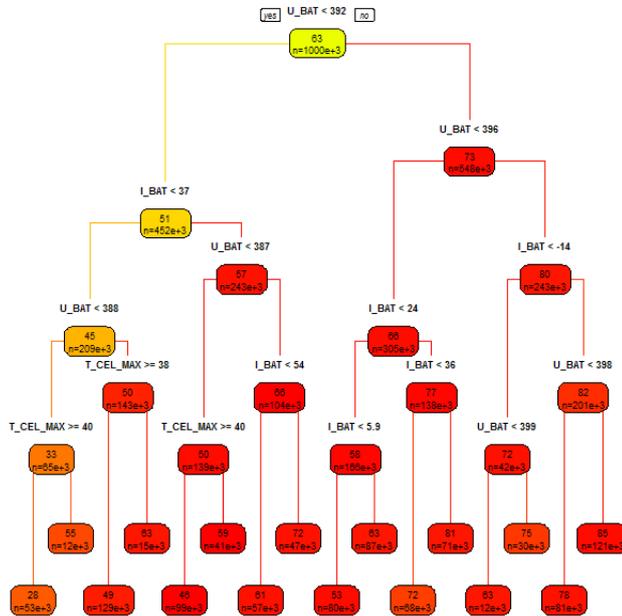


FIGURE 38 – Début de l’arbre pour le groupe 1_{T3} avec $c_p = 10^{-7}$ jusqu’à la profondeur 5



FIGURE 39 – Importance des variables pour le groupe 1_{T1} et le groupe 1_{T3}



FIGURE 40 – Histogrammes des SOC estimés dans les feuilles de l'arbre pour le groupe $1T1$ (à gauche) et le groupe $1T3$ (à droite)

Ensuite, nous avons prédit sur l'échantillon test via ces arbres. La figure 41 montre la répartition des erreurs pour la norme 1. Les échelles des figures sont les mêmes et vont de 0 à 80 %. Ainsi, sur les groupes de taille petite en nombre d'observations comme le groupe 3 à toutes les températures, Random Forest est plus performant que CART.

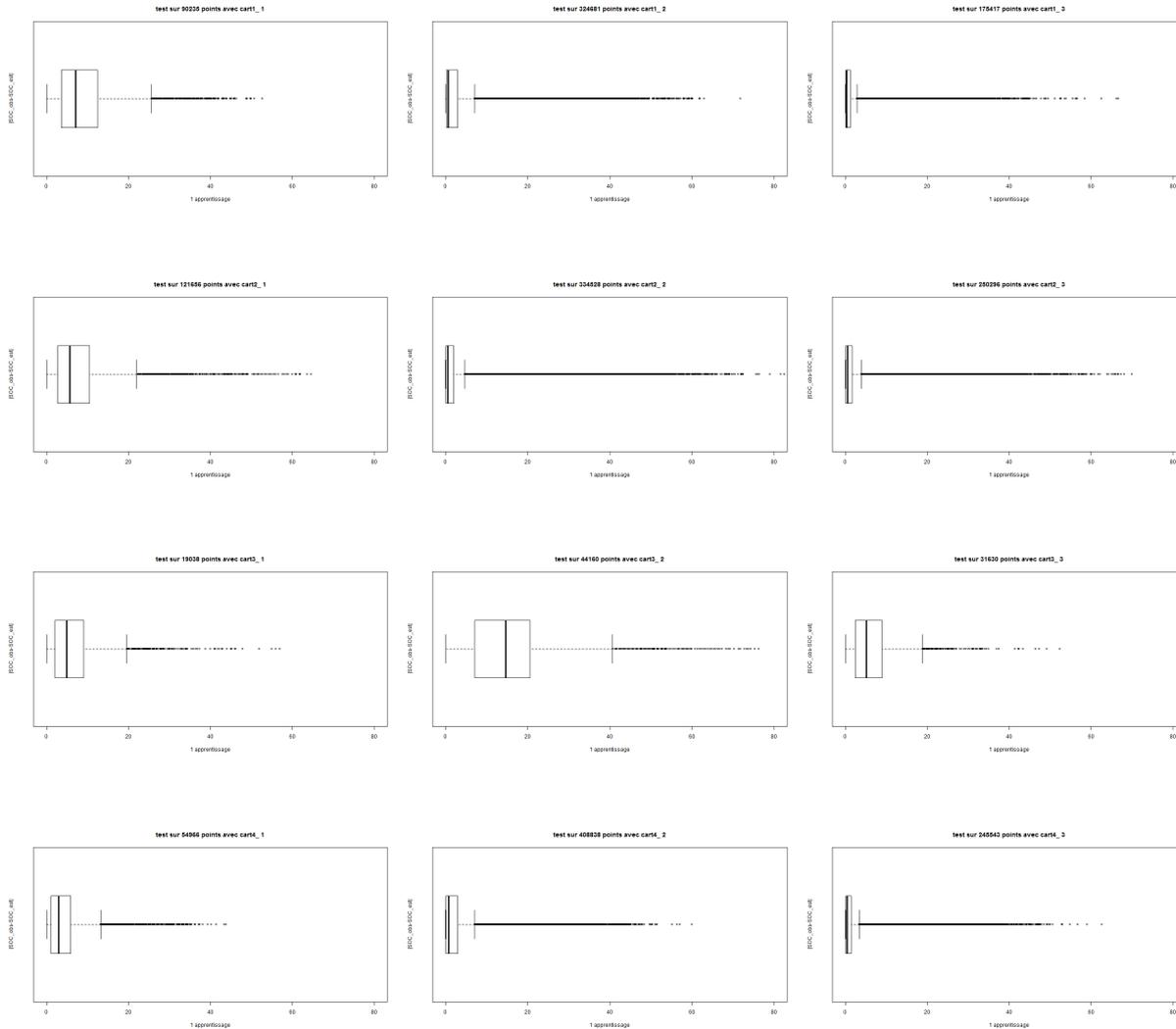


FIGURE 41 – Erreur pour la norme 1 pour les 12 groupes avec CART pour des cp choisis précédemment

De même, nous avons décomposé ces erreurs selon 5 plages de SOC (voir figure 42) et nous pouvons tirer les mêmes conclusions que pour Random Forest, à savoir qu'il serait utile d'améliorer les prévisions de SOC entre 0% et 20 %. Par ailleurs les tests sur les groupes $1T_2, 1T_3, 2T_2, 2T_3$ sont assez satisfaisants mais il persiste des valeurs atypiques qui présentent des erreurs à 80%.

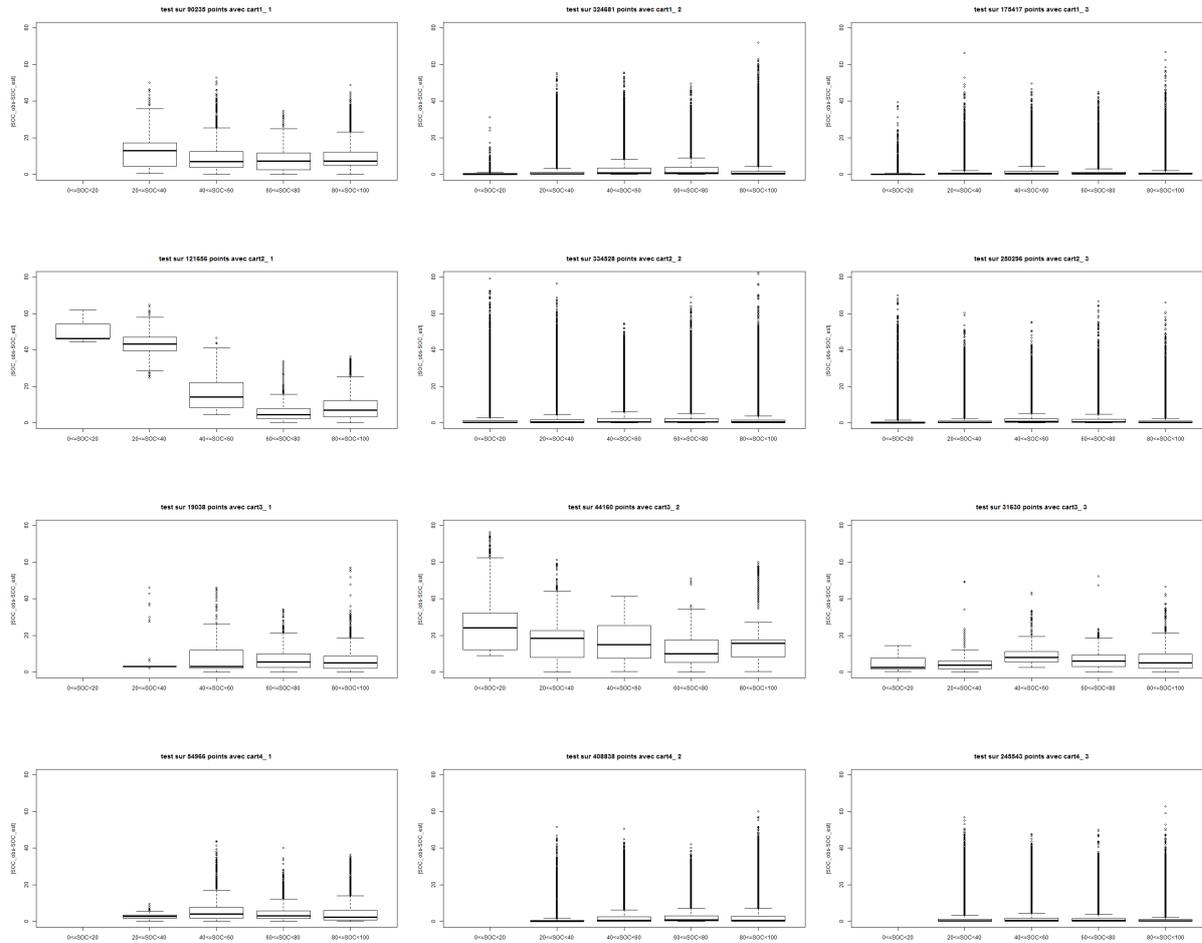


FIGURE 42 – Décomposition de l’erreur par plages de SOC pour les 12 groupes avec CART pour des cp choisis précédemment

Ainsi, une analyse sur les regroupements par plages de SOC nous a alors semblé intéressant.

6.2 Classification par plages de SOC

6.2.1 Proportion des points par plages de SOC

Nous avons voulu voir s’il était possible de construire un modèle très performant par plage de SOC. Nous avons donc réparti les observations de chaque fichier dans chacun des 5 groupes élaborés via cette classification basée sur les 5 plages de SOC définis précédemment (0-20%, 20-40%, 40-60%, 60-80%, 80-100%).

La table suivante nous montre la proportion d’observations par plage de SOC par rapport au nombre total d’observations.

SOC ₁	SOC ₂	SOC ₃	SOC ₄	SOC ₅
2%	6%	20%	40%	32%

6.2.2 Expériences et résultats

De même nous avons utilisé le même principe pour élaborer nos ensembles d'apprentissages, de validation et de test et la procédure de validation croisée lorsque les groupes possèdent peu d'observations. (à savoir le groupe 1). Grâce à la procédure de validation, voici un tableau récapitulatif des c_p choisis pour chaque groupe. Nous remarquons que le c_p choisi pour le groupe 1 est plus grand, et qu'au delà il y a un sur-apprentissage.

Groupes par plages de SOC	1	2	3	4	5
c_p	0.001	0.0000001	0.0000001	0.0000001	0.0000001

Ensuite, nous avons validé ces 5 modèles en testant dans un premier temps sur un échantillon disjoint mais appartenant au même groupe ou a été réalisé l'apprentissage. Signalons que comme nous apprenons à chaque fois sur des plages de SOC d'amplitude maximale de 20%, l'erreur commise maximale ne peut excéder 20%. Nous voulions juste voir par exemple sur la plage 0-20%, le modèle était très performant. Les figures 43, ?? et ?? représentent ces tests. Résultat assez surprenant déjà pour le groupe 1 car l'erreur commise maximale pour certaines valeurs est de l'ordre de 18%, ce qui est assez conséquent vu les remarques précédentes. Ainsi sur la plage 0-20%, il y a beaucoup de valeurs atypiques et on ne pourra pas espérer mieux estimer. La base de données sur ces faibles valeurs de SOC semble ne pas être assez exhaustive.

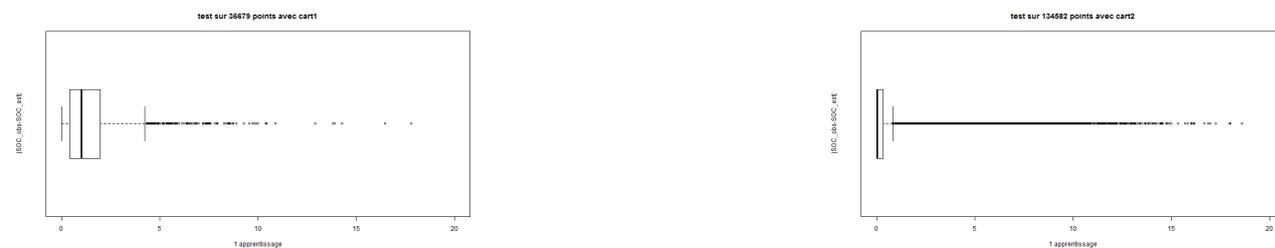


FIGURE 43 – Erreur commise pour la norme 1 sur l'échantillon test du groupe 1 (0-20%) (à gauche) et du groupe 2 (20-40%)(à droite).



FIGURE 44 – Estimation par CART $c_p = 10^{-7}$ sur des fichiers de température ambiante entre 20 et 30 degrés : fichier 68 (à gauche) et 245 (à droite).

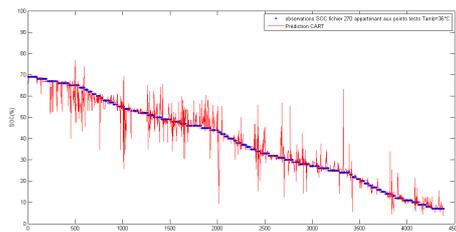


FIGURE 45 – Estimation par CART $c_p = 10^{-7}$ sur un fichier de température ambiante entre 30 et 40 degrés : fichier 270.

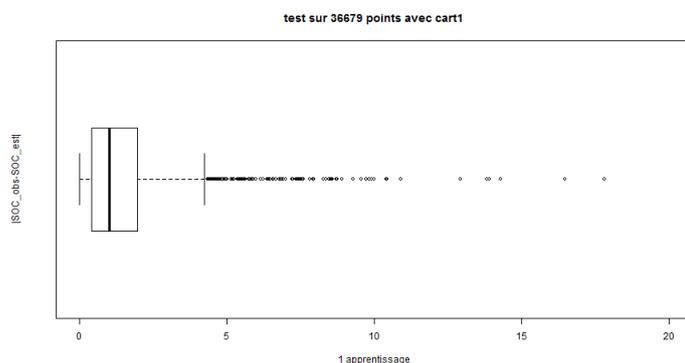


FIGURE 46 –

Ainsi, essayons de changer de stratégie. Il serait peut être plus judicieux de réaliser l'ensemble d'apprentissage parmi tous les fichiers.

7 Tirage aléatoire sur l'ensemble des fichiers

Dans cette partie, nous verrons deux tirages aléatoires sur l'ensemble des fichiers, le premier correspond à un tirage aléatoire de 40 courbes SOC (correspond environ à 1 million d'observations) parmi les 724. Le second correspond au tirage aléatoire de un million d'observations parmi l'ensemble des 21569141 observations disponibles.

7.1 Tirage aléatoire de courbes SOC

7.1.1 Principe

Nous avons effectué 10 apprentissages disjoints en tirant à chaque fois aléatoirement 40 courbes qui correspondent environ à un million d'observations. Nous avons ensuite concaténé dans un fichier les observations des 40 courbes SOC pour chaque apprentissage. Nous avons ensuite pris un échantillon de validation disjoints des 10 apprentissages pour calibrer leur paramètre de complexité dans le cas de CART. Nous avons également mis de côté un échantillon test de 40 fichiers tirés aléatoirement parmi les 724, pour évaluer la qualité des 10 modèles dans le cas de CART et Random Forest. Les figures 48, 47, 49 et 50 représentent les histogrammes des variable explicatives de deux échantillons d'apprentissage, de

l'échantillon de validation et de test . Nous voyons que les apprentissages 3 et 8 sont différents notamment sur les valeurs de SOC présentes dans l'échantillon. Il y a plus de valeurs de SOC proches de 0 pour l'échantillon 8. Cela vient du fait que nous tirons des courbes au hasard et nous les concaténons, et il y a du y avoir une courbe SOC avec une décharge complète. Ainsi le tirage selon les courbes ne semble pas être uniforme.

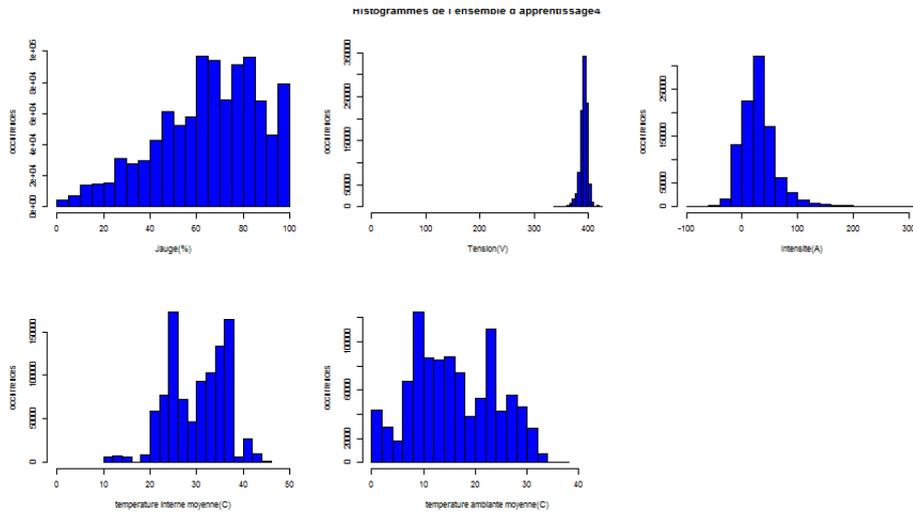


FIGURE 47 – Histogramme de l'apprentissage 4

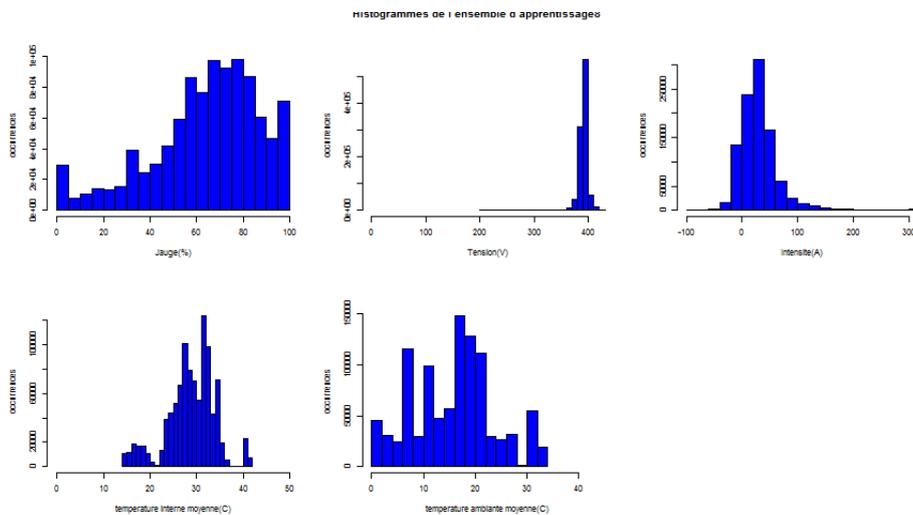


FIGURE 48 – Histogramme de l'apprentissage 8

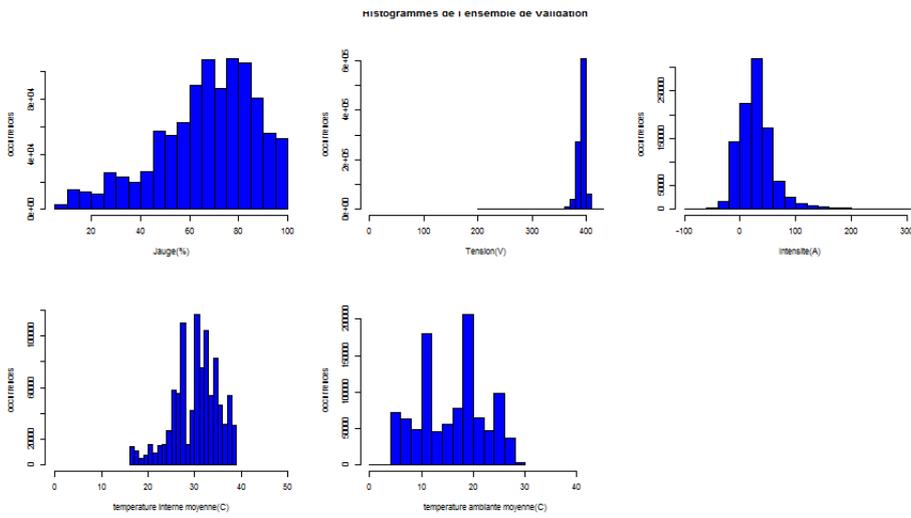


FIGURE 49 – Histogramme de l'ensemble de validation

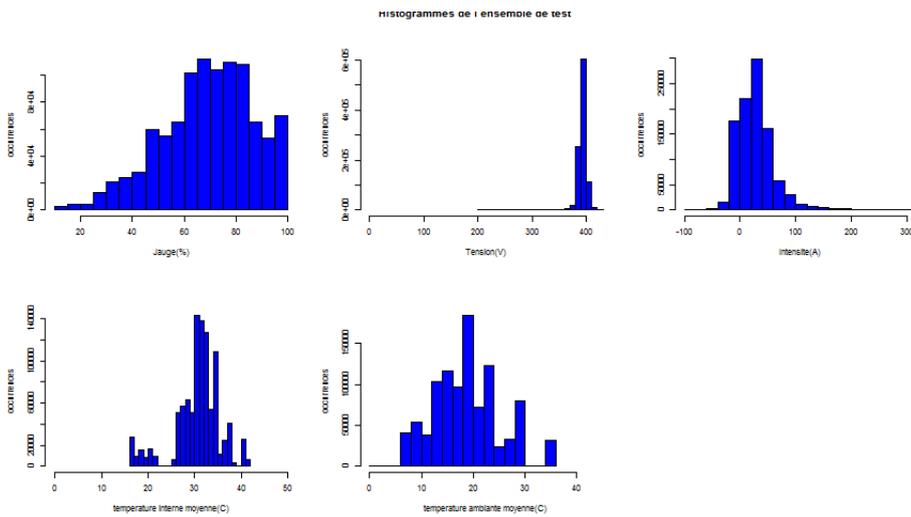


FIGURE 50 – Histogramme de l'ensemble de test

7.1.2 Résultats et commentaires

Forêts aléatoires

Nous avons effectué les 10 apprentissages avec les paramètres par défaut du paquet. La table suivante récapitule l'erreur RMSE et l'erreur MAE pour chacun des 10 apprentissages avec les forêts aléatoires calculés sur l'échantillon test. L'erreur MAE en moyenne est de l'ordre de 12% pour les 10 apprentissages alors que l'on souhaiterait du 5%.

Apprentissage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$RMSE(en\%)$	17,0	15,9	14,5	17,8	19,4	14,4	14,1	14,0	15,8	16,0
$MAE(en\%)$	13,3	11,4	10,4	13,7	15,1	11,0	10,9	11,4	12,4	12,6

Nous pouvons voir que selon les apprentissages, c'est la température interne qui est la variable explicative la plus importante (voir figure 51).



FIGURE 51 – Importance des variables par RandomForest pour l'apprentissage 4 (à gauche) et 8 (à droite).

Nous avons également choisi de représenter les erreurs pour la norme 1 sur l'échantillon test construit (voir figure 52). La méthode semble être stable, puisque pour les 10 apprentissages, nous avons une erreur pour la norme 1 du même ordre.

Par contre, il y a plein de valeurs atypiques (1,5% du nombre total) et l'erreur peut aller jusqu'à 70%, ce qui ne semble pas être satisfaisant du tout.

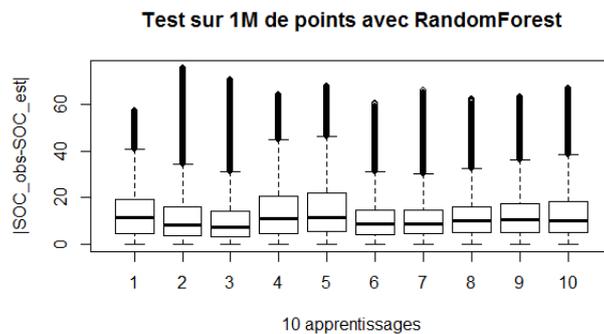


FIGURE 52 – Erreurs pour la norme 1 des 10 apprentissages à partir d'un échantillon test composé de 1 M d'observations

Nous avons là aussi décomposé ces erreurs par plages de SOC (voir figure 53). Ainsi pour la plage de SOC compris entre 0 et 20 %, les erreurs sont très élevées et varient beaucoup selon les apprentissages. Nous remarquons que l'apprentissage 8 est le meilleur sur cette plage avec une médiane à 25%, et cela vient sûrement du fait que dans son apprentissage, il y avait beaucoup de valeurs de SOC proches de 0. En revanche, pour les deux dernières plages, la méthode semble être stable.

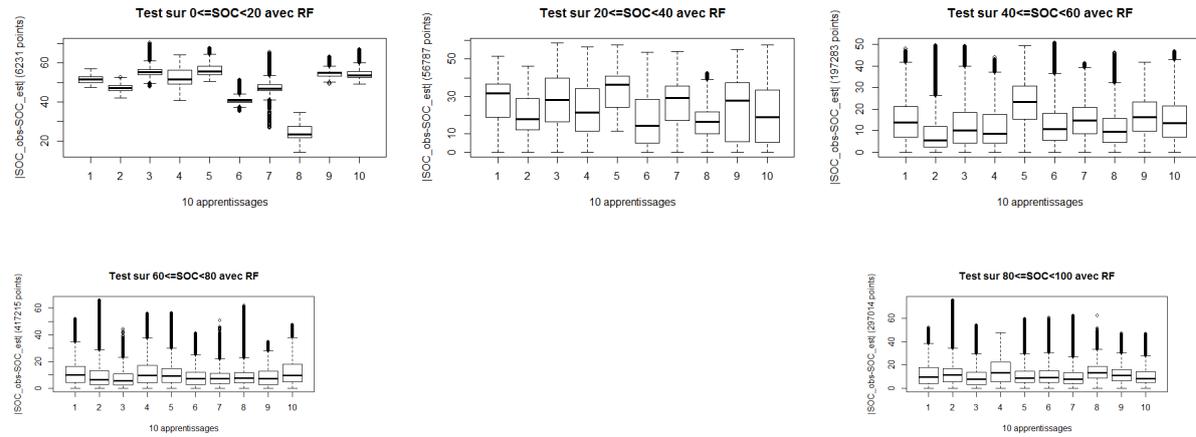


FIGURE 53 – Erreurs par plages de SOC pour Randomforest des 10 apprentissages sur l'échantillon test

CART

Nous avons effectué les 10 apprentissages avec un c_p maximal de 10^{-6} . La figure 54 représente la procédure de validation pour les 10 apprentissages.

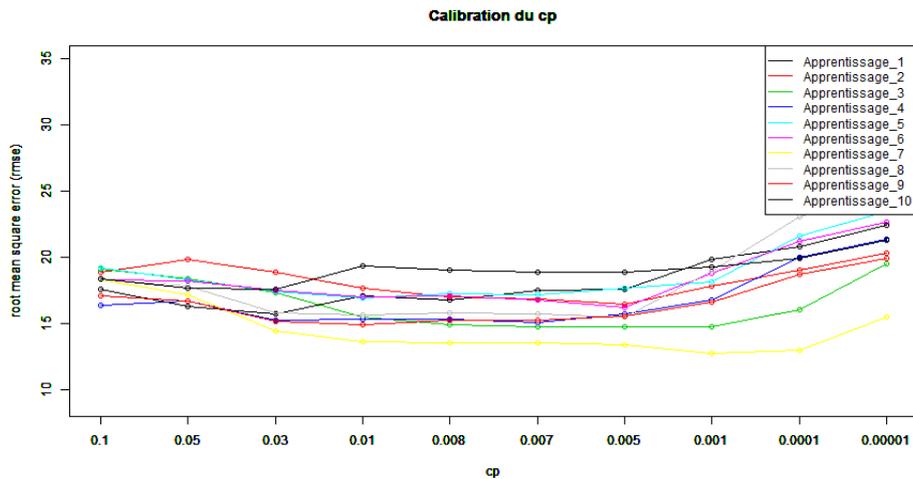


FIGURE 54 – Choix du c_p optimal pour les 10 apprentissages

Nous voyons que l'on peut choisir un c_p optimal qui serait commun aux dix apprentissages. Nous avons donc choisi $c_p=0.01$.

Nous pouvons alors élaguer les arbres maximaux et visualiser les arbres. Les figures 55 et 56 montrent le début des arbres des apprentissages 4 et 8. Contrairement à l'indice d'importance des Random Forest, celui de CART montre que la tension semble être la variable la plus importance pour l'apprentissage 8 (57). De plus, les valeurs des SOC estimés dans les feuilles sont tout le temps supérieures à 30% pour les

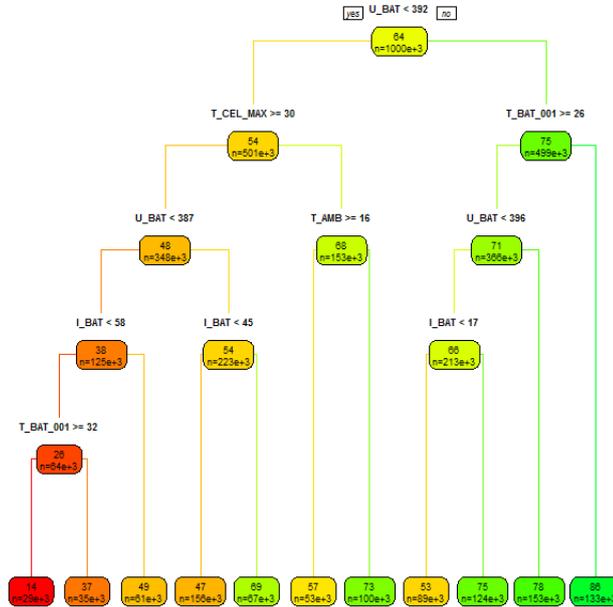


FIGURE 56 – Arbre de l'apprentissage 8 jusqu'à la profondeur 5, avec $cp=0.01$



FIGURE 57 – Importance des variables par CART pour l'apprentissage 4 (à gauche) et 8 (à droite).



FIGURE 58 – Histogrammes des SOC estimés dans les feuilles par CART pour l'apprentissage 4 (à gauche) et 8 (à droite).

Nous pouvons maintenant évaluer la qualité de ces 10 modèles sur l'échantillon test.

La table suivante récapitule l'erreur RMSE et l'erreur MAE pour chacun des 10 apprentissages avec les 10 arbres élagués calculés sur l'échantillon test. L'erreur MAE en moyenne est de l'ordre de 12%, tout comme RandomForest pour les 10 apprentissages alors que l'on souhaiterait du 5%. Les deux méthodes ne semblent pas assez satisfaisantes ici.

Apprentissage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RMSE(en%)	18,5	17,3	13,9	17,6	14	14,4	13,9	14,6	16	19,3
MAE(en%)	14,2	13,2	10,8	14	10,7	11,2	10,7	11,5	11,9	14,3

Nous avons également choisi de représenter les erreurs pour la norme 1 sur l'échantillon test construit (voir figure 59). La méthode semble être stable, puisque pour les 10 apprentissages, nous avons une erreur pour la norme 1 du même ordre.

Par contre, il y a plein de valeurs atypiques (1,5% du nombre total) et l'erreur peut aller jusqu'à 80%, ce qui ne semble pas être satisfaisant du tout.

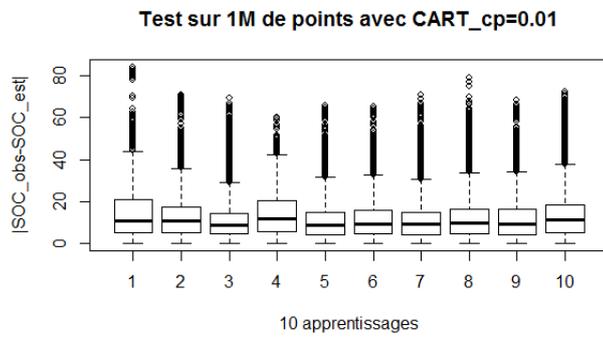


FIGURE 59 – Erreurs pour la norme 1 des 10 apprentissages à partir d'un échantillon test composé de 1 M d'observations

Nous avons là aussi décomposé ces erreurs par plages de SOC (voir figure 60). Ainsi pour la plage de SOC compris entre 0 et 20 %, les erreurs sont très élevées et varient beaucoup selon les apprentissages. Nous remarquons que l'apprentissage 8 est le meilleur sur cette plage avec une médiane à 25%, et cela vient sûrement du fait que dans son apprentissage, il y avait beaucoup de valeurs de SOC proches de 0. En revanche, pour les deux dernières plages, la méthode semble être stable.

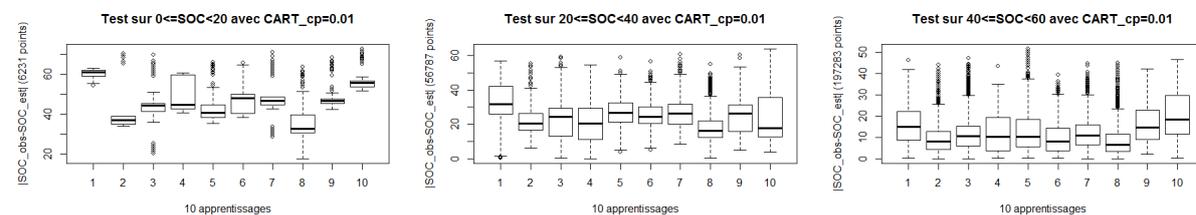




FIGURE 60 – Erreurs par plages de SOC pour CART avec $c_p = 0.01$ des 10 apprentissages sur l'échantillon test

7.1.3 Conclusion

Le tirage aléatoire selon les courbes ne semble pas être uniforme et semble biaisé. Par ailleurs, les résultats de cette expérience pour CART et Random Forest sont assez similaires et fournissent des erreurs MAE de l'ordre de 12%, ce qui ne semble pas satisfaisant, avec des erreurs maximales de 80%. Nous avons vu que ces erreurs sont très élevées lorsque nous prédisons des SOC inférieurs à 20%. Ainsi pour prendre en compte toutes ces remarques, il serait judicieux d'effectuer un tirage aléatoire non pas sur l'ensemble des courbes, mais de le faire sur l'ensemble des observations en oubliant l'unité "courbe".

7.2 Tirage aléatoire d'observations

7.2.1 Principe

Pour effectuer un tel tirage, comme la concaténation de tous les fichiers est impossible, nous avons tiré aléatoirement sans remise 12 millions d'indices parmi 21569141, pour constituer mes 10 ensembles d'apprentissage de 1M d'observations, de validation et de test. Puis nous avons été chercher chaque observation correspondant à chaque indice comme si nous lisions les fichiers mis bout à bout. Pour cela, on a regardé la somme cumulée des longueurs de chaque fichier et regarder dans que il intervalle tombait chaque indice.

Remarque. Ce tirage est valable en tirant n'importe quel nombre d'indices inférieur à 21569141.

Les figures 62, 61, 63 et 64 représentent les histogrammes des variables explicatives de deux échantillons d'apprentissage, de l'échantillon de validation et de test. Nous voyons que les apprentissages 1 et 2 sont similaires, et cela est de même pour tous les autres apprentissages. Le tirage est donc uniforme.

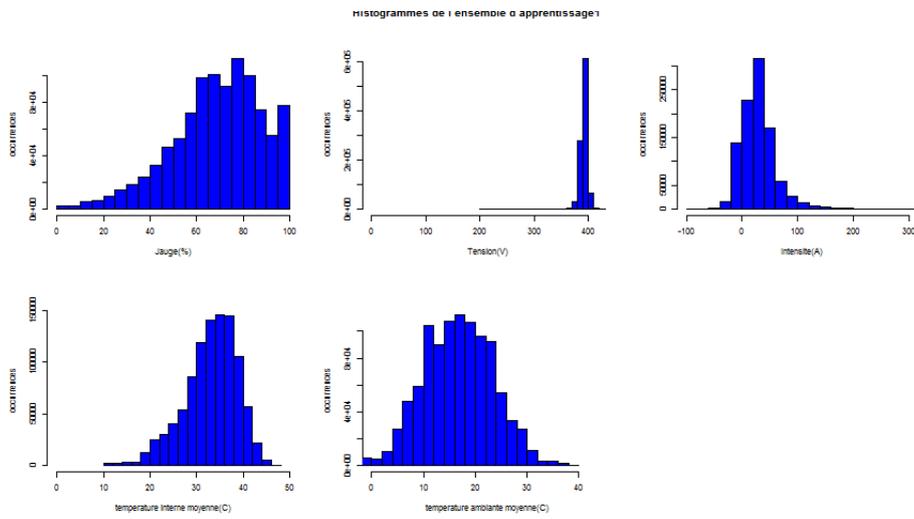


FIGURE 61 – Histogramme de l'apprentissage 1

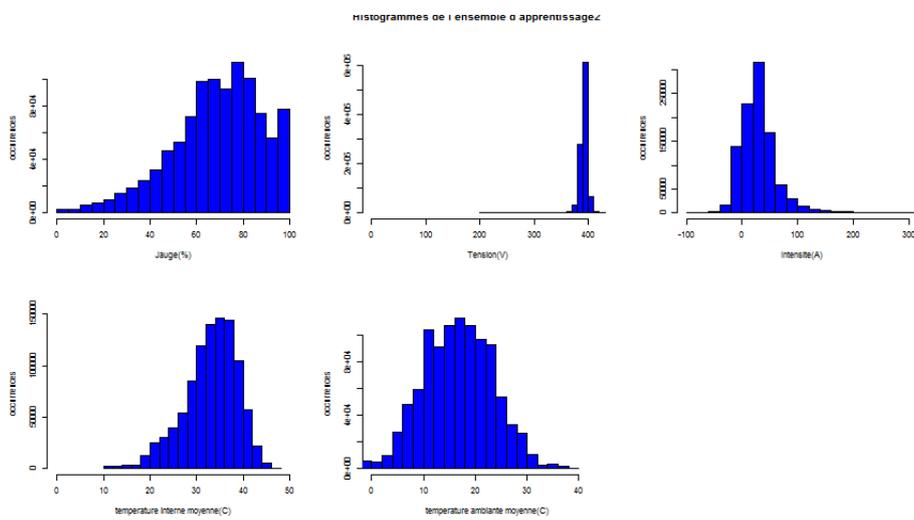


FIGURE 62 – Histogramme de l'apprentissage 2

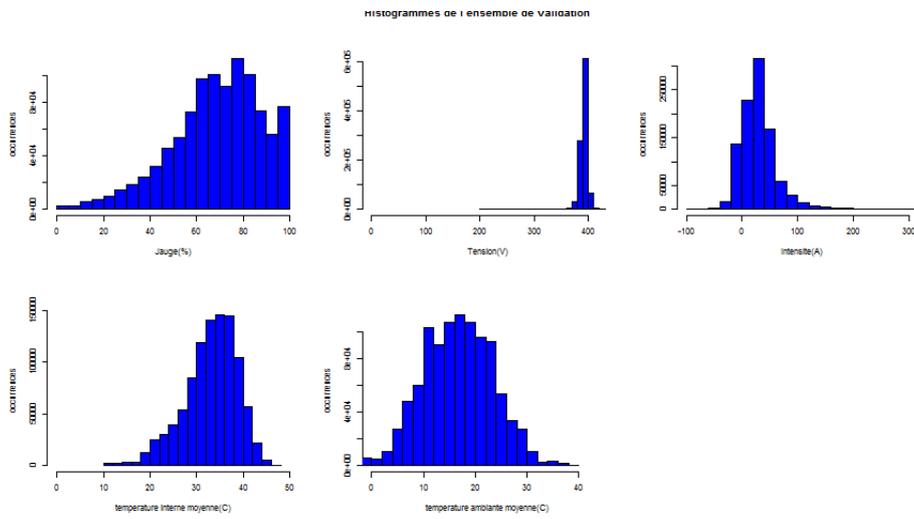


FIGURE 63 – Histogramme de l'ensemble de validation

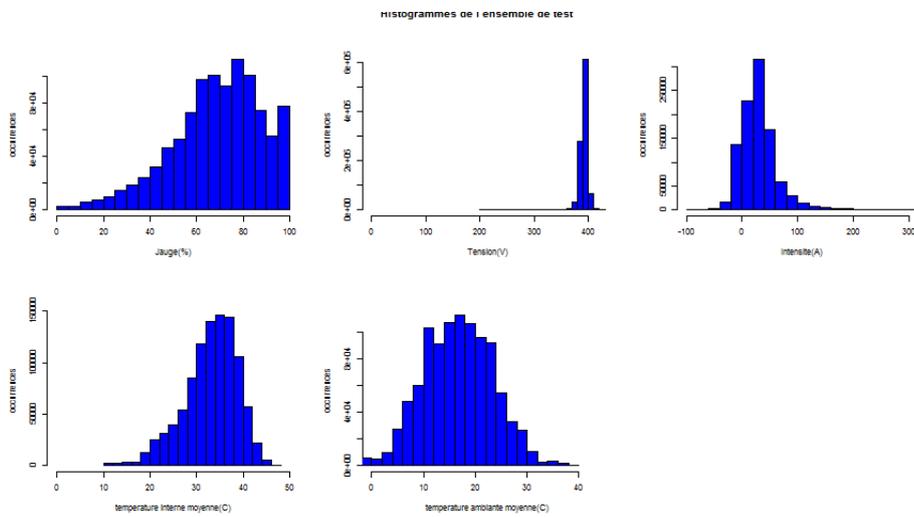


FIGURE 64 – Histogramme de l'ensemble de test

7.2.2 Résultats et commentaires

RandomForest

Nous avons comme dans les précédentes expériences, pris seulement 15000 observations des dix échantillons d'apprentissage pour faire l'apprentissage avec RandomForest. Nous avons effectué les 10 apprentissages avec les paramètres par défaut du paquet. Le tableau suivant récapitule l'erreur RMSE et l'erreur MAE pour chacun des 10 apprentissages avec les forêts aléatoires calculés sur l'échantillon test. L'erreur MAE en moyenne est de l'ordre de 7% pour les 10 apprentissages alors que l'on souhaiterait du 5%. Mais cela est déjà mieux que les résultats de la section précédente.

<i>Apprentissage</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>RMSE(en%)</i>	9.83	9.83	9.85	9.88	9.82	9.87	9.79	9.80	9.87	9.85
<i>MAE(en%)</i>	6.91	6.90	6.94	6.91	6.91	6.95	6.90	6.89	6.95	6.93

Nous avons également choisi de représenter les erreurs pour la norme 1 sur l'échantillon test construit (voir figure 65). La méthode semble être stable, puisque pour les 10 apprentissages, nous avons une erreur pour la norme 1 du même ordre de 7%.

Par contre, il y a plein de valeurs atypiques (1,5% du nombre total) et l'erreur peut aller jusqu'à 70%, ce qui ne semble pas être satisfaisant du tout.

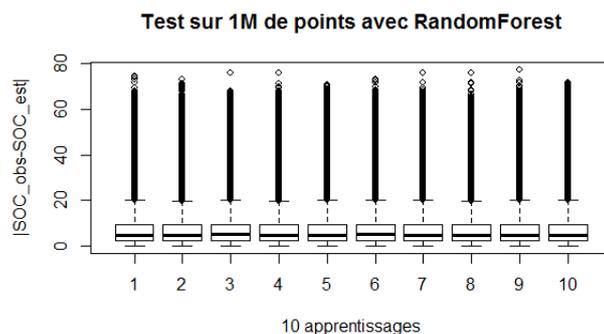


FIGURE 65 – Erreurs pour la norme 1 des 10 apprentissages à partir d'un échantillon test composé de 1 M d'observations

Si nous décomposons l'erreur suivante suivant les plages de SOC, les résultats sont similaires pour les 10 apprentissages. Et nous observons que l'erreur est la plus élevée pour des valeurs de SOC entre 0 et 20%.

CART

Nous avons effectué les 10 apprentissages avec un c_p maximal de 10^{-6} . La figure 66 représente la procédure de validation pour les 10 apprentissages.

Nous voyons qu'il n'y pas de sur-apprentissage et que l'on peut choisir un c_p optimal qui serait commun aux dix apprentissages. Nous avons donc choisi $c_p=10^{-6}$. Bien sûr, il aurait fallu effectuer la procédure avec un c_p plus petit pour voir si l'erreur RMSE augmente, mais pour des raisons de temps de calcul, nous garderons ce c_p pour les 10 apprentissages.

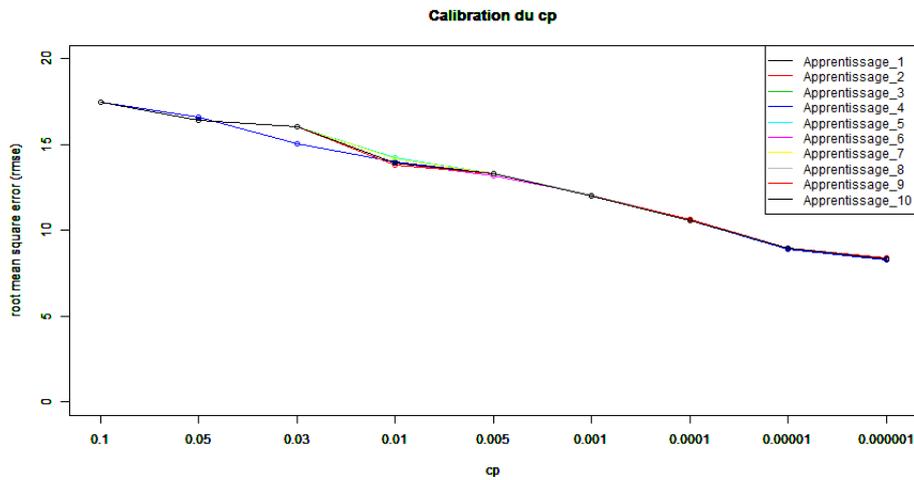


FIGURE 66 – Choix du c_p optimal pour les 10 apprentissages

Nous pouvons alors élaguer les arbres maximaux et visualiser les arbres. Les figures 67 et 68 montrent le début des arbres des apprentissages 5 et 7. Nous pouvons remarquer que CART est stable lorsqu'il prend en compte beaucoup de points par le début des deux arbres sont très similaires. La tensions semble être la variable la plus importante (voir figure 69). Le nombre de feuilles pour les 2 arbres présentée dans la figure 70 est très important et respecte la proportion décrite dans la table.

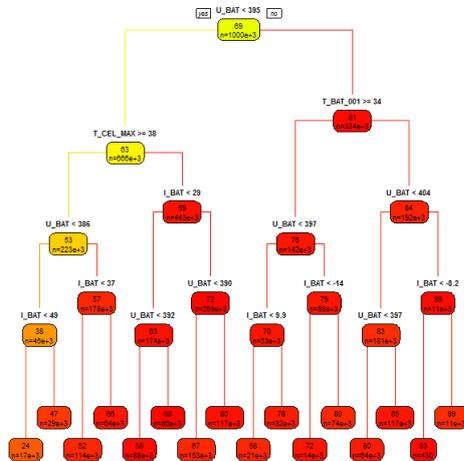


FIGURE 67 – Arbre de l'apprentissage 5 jusqu'à la profondeur 5, avec $cp=10^{-6}$

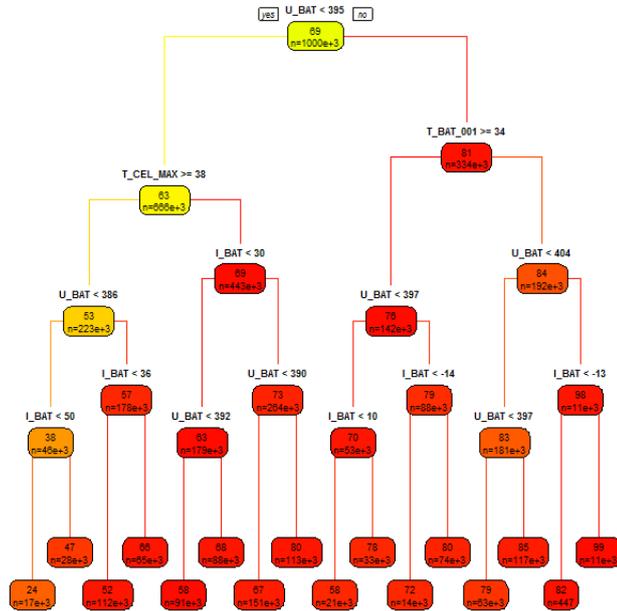


FIGURE 68 – Arbre de l'apprentissage 7 jusqu'à la profondeur 5, avec $cp=10^{-6}$

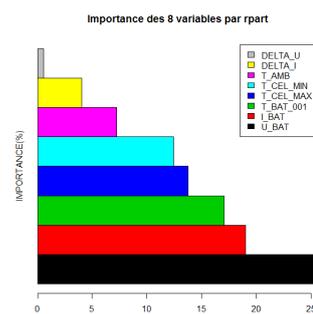
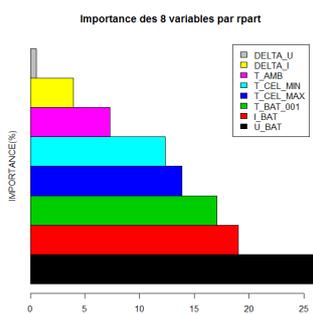


FIGURE 69 – Importance des variables par CART pour l'apprentissage 5 (à gauche) et 7 (à droite).



FIGURE 70 – Histogrammes des SOC estimés dans les feuilles par CART pour l'apprentissage 5 (à gauche) et 7 (à droite).

Nous pouvons maintenant évaluer la qualité de ces 10 modèles sur l'échantillon test.

La table suivante récapitule l'erreur RMSE et l'erreur MAE pour chacun des 10 apprentissages avec les 10 arbres élagués calculés sur l'échantillon test. L'erreur MAE en moyenne est de l'ordre de 5%, elle est donc meilleure que celle de Random Forest et semble satisfaisante. De toute manière, CART étant une méthode stable lorsqu'on dispose de beaucoup d'observations, RandomForest ne peut pas améliorer cette méthode car pour qu'elle soit performante, il est préférable d'avoir des estimateurs par arbre très différents.

<i>Apprentissage</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>RMSE(en%)</i>	8.32	8.37	8.28	8.33	8.34	8.34	8.33	8.31	8.31	8.36
<i>MAE(en%)</i>	4.98	5.03	5.01	4.96	4.99	5.01	4.97	4.98	4.99	5.02

Nous avons également choisi de représenter les erreurs pour la norme 1 sur l'échantillon test construit (voir figure 71). La méthode semble être stable, puisque pour les 10 apprentissages, nous avons une erreur pour la norme 1 du même ordre de 5%.

Par contre, il y a plein de valeurs atypiques (1,5% du nombre total) et l'erreur peut aller jusqu'à 80%, ce qui ne semble pas être satisfaisant. Il serait donc intéressant d'essayer d'effacer ces valeurs atypiques.

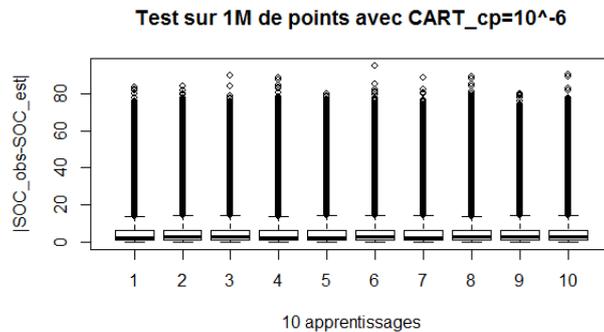


FIGURE 71 – Erreurs pour la norme 1 des 10 apprentissages à partir d'un échantillon test composé de 1 M d'observations

7.2.3 Conclusion

Le tirage aléatoire proposé semble être uniforme. Par ailleurs, les résultats de cette expérience pour CART sont meilleurs que ceux de RandomForest (mais rappelons que RandomForest ne prend en compte que 15000 points) et fournissent des erreurs MAE de l'ordre de 5%, ce qui semble satisfaisant, mais avec des erreurs maximales de 80%. Par ailleurs il serait intéressant de construire un arbre avec un c_p plus petit pour améliorer le modèle vu que lors de la phase de validation, l'erreur RMSE ne cessait de décroître. De plus, il conviendrait de trouver pour essayer d'enlever ces valeurs atypiques.

7.2.4 Pour aller plus loin

Nous avons utilisé le même choix de tirage aléatoire pour élaborer notre arbre maximal avec $c_p = 10^{-7}$. Nous n'avons effectué qu'un seul apprentissage étant donné que nous avons vu que la méthode était stable. La figure 72 illustre la procédure de validation et nous confirme un choix de c_p égal à 10^{-7} .

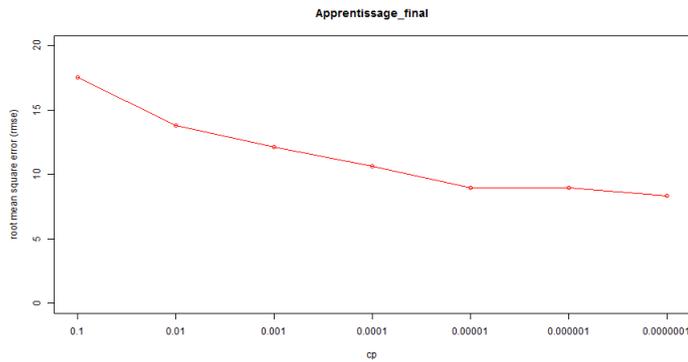


FIGURE 72 – Choix optimal du paramètre c_p pour CART dans le cas d'apprentissage par tirage aléatoire d'observations

Ensuite, nous avons représenté les trois attributs que l'on a sélectionné pour visualiser un arbre CART (voir figures 73, 74 et 75). Le début de l'arbre ressemble à ceux que l'on a réalisés lors de la section précédente et la tension est toujours la variable la plus importante. En revanche, le nombre de feuilles a doublé entre l'arbre CART avec $c_p = 10^{-6}$ et avec un $c_p = 10^{-7}$ avec un total de 65200 feuilles, et ainsi en moyenne nous avons 15 observations par feuille, ce qui semble satisfaisant.

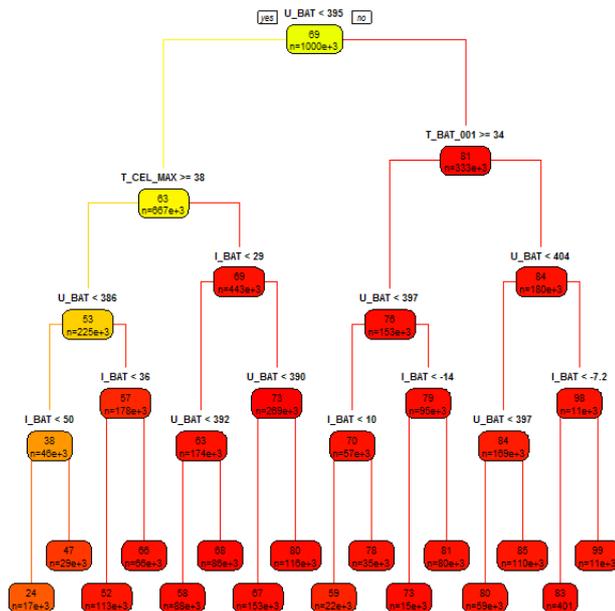


FIGURE 73 – Début de l'arbre CART $c_p = 10^{-7}$ jusqu'à la profondeur 5

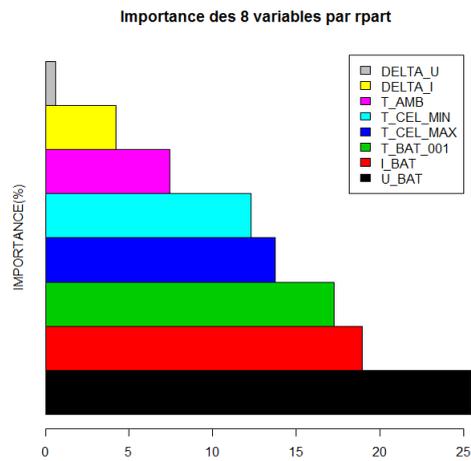


FIGURE 74 – Importance des variables par CART

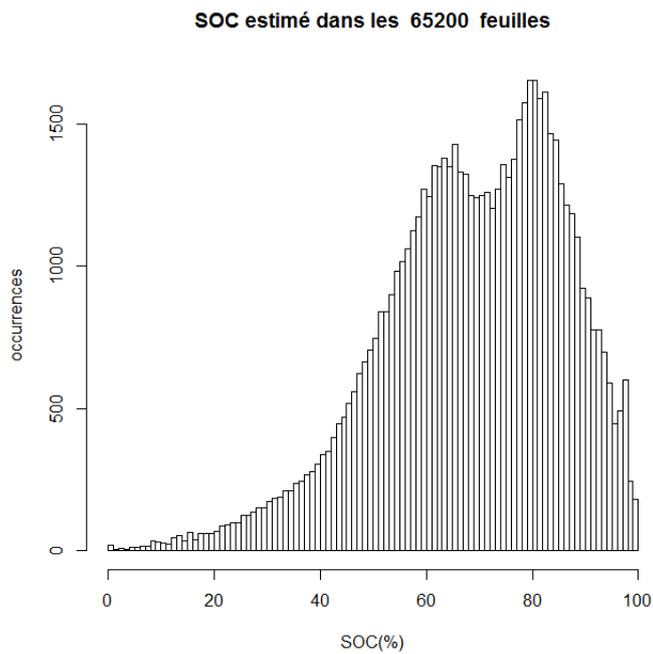


FIGURE 75 – Histogramme des valeurs de SOC estimés dans les feuilles de l'arbre CART

Ensuite, nous avons testé notre modèle sur un million d'observations en espérant que cette fois-ci avec unc_p plus petit, nous réussissons à éliminer le plus de valeurs atypiques. Malheureusement, même si l'erreur MAE est de l'ordre 3%, la figure 76 montre que les valeurs atypiques sont toujours présentes.

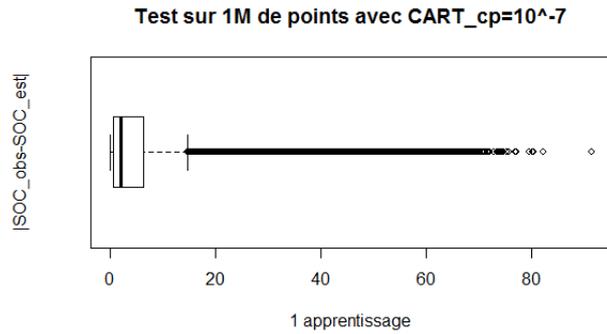


FIGURE 76 – Erreurs pour la norme 1 sur l'échantillon test par CART $c_p = 10^{-7}$

Sans ces valeurs atypiques, notre estimation serait bien plus satisfaisante. Pour avoir une idée de l'emplacement de ces valeurs, nous avons pris des courbes SOC caractéristiques et nous avons regardé les estimations, faites pour les observations de ces courbes et appartenant à l'échantillon test précédent. Nous les avons représentés avec les observations associées en tenant compte de l'aspect temporel. (voir figures 77, 78 et 79)

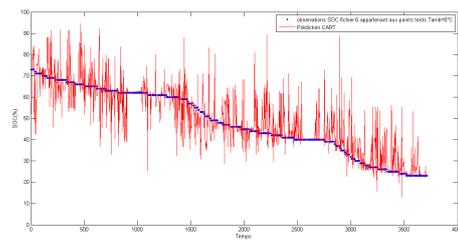
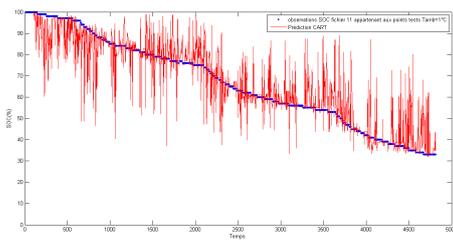


FIGURE 77 – Estimation par CART $c_p = 10^{-7}$ sur des fichiers de température ambiante entre 0 et 10 degrés : fichier 11 (à gauche) et 6 (à droite).

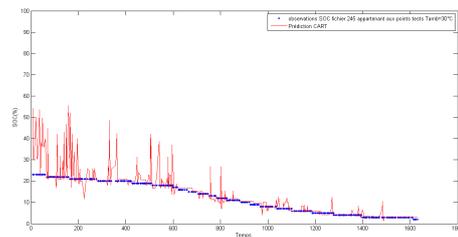
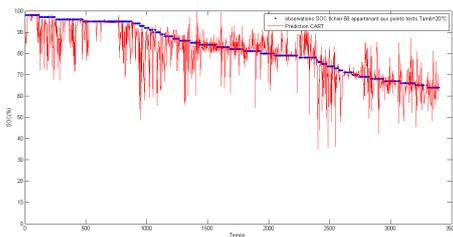


FIGURE 78 – Estimation par CART $c_p = 10^{-7}$ sur des fichiers de température ambiante entre 20 et 30 degrés : fichier 68 (à gauche) et 245 (à droite).

Nous avons remarqué qu'en dehors des valeurs atypiques, l'allure de la courbe reste globalement bien approchée.

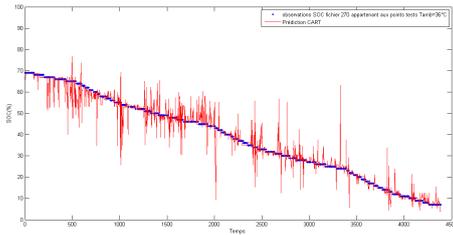


FIGURE 79 – Estimation par CART $c_p = 10^{-7}$ sur un fichier de température ambiante entre 30 et 40 degrés : fichier 270.

Nous avons représenté les erreurs pour la norme 1 commises pour chacun des fichiers considérés. (voir figure 81)

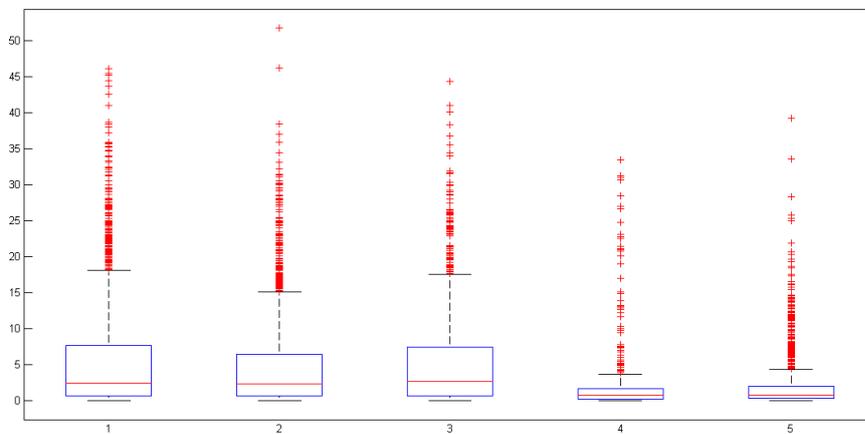


FIGURE 80 – Erreurs pour la norme 1 sur l'échantillon test par CART $c_p = 10^{-7}$ pour les fichiers de gauche à droite : 6,11,68,245,270

Pour enlever ce bruit en tenant compte du caractère temporel nous avons proposé un lissage par moyenne mobile. Comme le but à terme est l'estimation en temps réel, nous ne pouvons pas faire ce lissage sur les données à venir. Nous avons alors choisi de lisser en prenant compte des estimations passées sur une période fixé. Comme au début de chaque courbe nous n'avons pas de passé, nous faisons une moyenne sur les seules données que nous possédons jusqu'à ce que le nombre d'observations dépasse la période voulue.

Pour choisir la période, nous avons regardé l'évolution de l'erreur MAE en fonction de la valeur de la période, ce pour un fichier et nous obtenons des résultats similaires pour les autres fichiers. La figure 81 nous invite à choisir une période de 20.

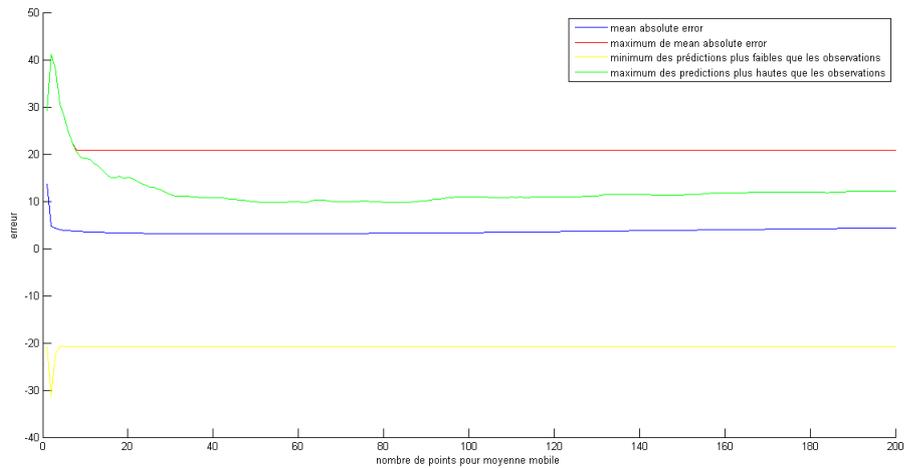


FIGURE 81 – Erreurs pour la norme 1 sur l'échantillon test par CART $c_p = 10^{-7}$

Enfin, les figures 82, 83 et 84 nous montrent le signal lissé et la plupart des grosses valeurs atypiques ont été enlevées et l'on obtient une estimation satisfaisante pour l'ensemble des fichiers.

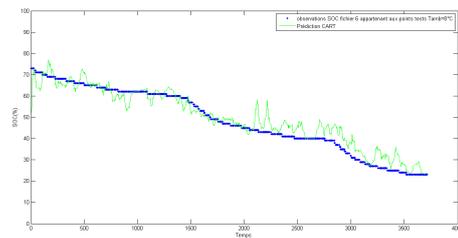
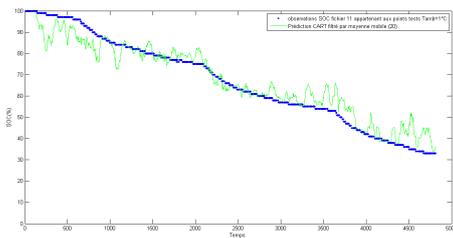


FIGURE 82 – Estimation par CART $c_p = 10^{-7}$ lissé par moyenne mobile(20) sur des fichiers de température ambiante entre 0 et 10 degrés : fichier 11 (à gauche) et 6 (à droite).

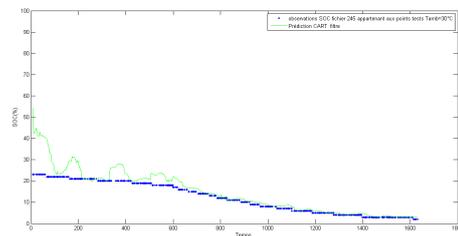
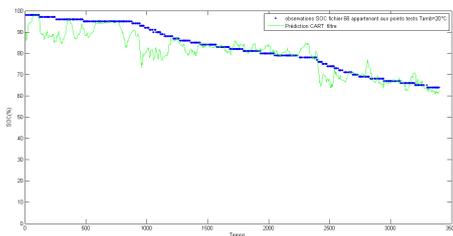


FIGURE 83 – Estimation par CART $c_p = 10^{-7}$ lissé par moyenne mobile(20) sur des fichiers de température ambiante entre 20 et 30 degrés : fichier 68 (à gauche) et 245 (à droite).

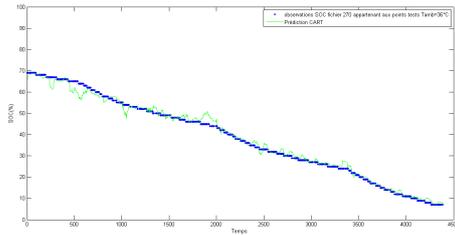


FIGURE 84 – Estimation par CART $c_p = 10^{-7}$ lissé par moyenne mobile(20) sur un fichier de température ambiante entre 30 et 40 degrés : fichier 270.

Enfin les erreurs pour la norme 1 présentée par la figure 85 nous montrent que l'on a réduit le nombre et la valeur maximale des points atypiques. On se rapproche plus de l'objectif voulu.

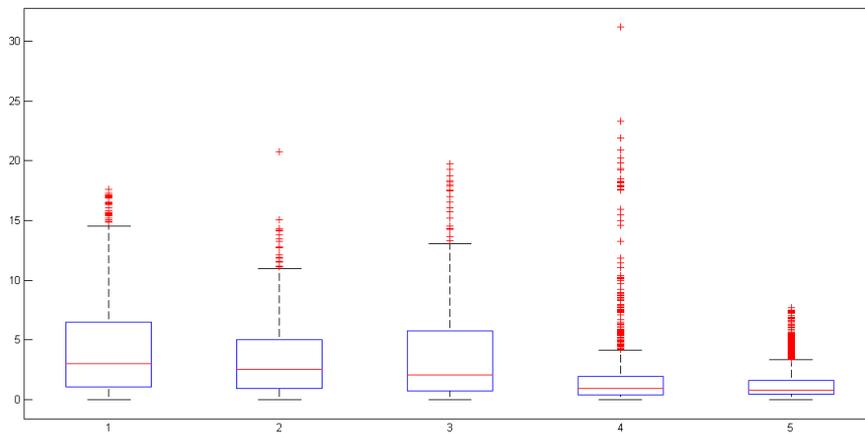


FIGURE 85 – Erreurs pour la norme 1 sur l'échantillon test par CART $c_p = 10^{-7}$ pour les fichiers de gauche à droite : 6, 11, 68, 245 et 270

8 Conclusion et perspectives

- > prise en compte de l'aspect temporel
- > prise en compte d'autres variables explicatives

Références

- [1] Biau G., Devroye L., Lugosi G., *Consistency of random forests and other averaging classifiers*. Journal of machine Learning Research 9 2015-2033, 2008.
 - [2] Breiman L., Friedman J.H., Olshen R.A., Stone J.H., *Classification and regression trees*. New York 1984.
 - [3] Breiman L., *Random Forests*. Machine Learning 2001.
 - [4] Breiman L., *Bagging predictors*. Machine Learning, 24 :123–140, 1996.
 - [5] Breiman L., *RFtools-for predicting and understanding data* Technical report Berkeley University USA, 2004.
 - [6] Genuer R., *Forêts aléatoires : aspects théoriques, sélection de variables et applications*. Thèse Université Paris-Sud,Orsay 2010.
 - [7] Gey S., *Bornes de risque, détection de ruptures, boosting : trois thèmes statistiques autour de CART en régression*. Thèse Université Paris-Sud,Orsay 2002.
 - [8] Hansen T., Wang C-H., *Support vector based battery state of charge estimator*. Journal of Power Sources 141, 351-358, 2005.
 - [9] Hastie T., Tibshirani R., Friedman J., *The Elements of Statistical Learning*. Second edition, Springer 2009.
 - [10] Kim H., Loh WY, Shih YS, Chaudhuri P., *Visualizable and interpretable regression models with good prediction power*. IIE Transactions 39, 565-579, 2007.
 - [11] Liaw A., Wiener M., *Classification and regression by random forest*. R News, 2 (3) 18-22, 2002.
 - [12] Loh WY, *Classification and regression trees*. WIREs Data Mining Knowl Discov 1, 14-23, 2011.
 - [13] Milleborrow S., *Plotting rpart trees with prp*. <http://www.milbo.org/rpart-plot/prp.pdf>. 2012.
 - [14] Pang S., Farrell J., Du J., Barth M., *Battery state-of-charge estimation*. Proceedings of the American Control Conference, June 2001, vol. 2, p. 1644-1649 2001.
 - [15] Piller S., Perrin M., *Methods for state-of-charge determination and their application*. Journal of Power Sources 96 113-120, 2001.
 - [16] Therneau TM, Atkinson B., *RPART : recursive partitioning*. R port by B. Ripley. R package version 3.1-41, 2008.
 - [17] Verikas A., Gelzinis A., Bacauskiene M., *Mining data with random forests : a survey and results of new tests*. Pattern recognition, 2011
-