Sorbonne Université
Master 2 Mathématiques Fondamentales

Année 2020-2021

Approximation rationnelle de sous-espaces vectoriels

Mémoire de M2

Gaétan Guillot
Sous la direction de Stéphane Fischler
(Université Paris-Saclay)

Soutenance le 7 juin 2021
Jury : Stéphane Fischler et Anthony Poëls

Résumé

Soit A un sous-espace vectoriel d'un espace hermitien ou euclidien de dimension n. On cherche à approcher A par un sous-espace vectoriel B de dimension e défini sur un corps de nombres. Ce mémoire se base sur un article de Schmidt fondateur dans ce domaine de recherche.

On étudie ici la proximité de deux espaces A et B en introduisant la notion d'angles d'inclinaison entre A et B. On cherche alors à minimiser ces angles. Schmidt a notamment résolu le problème dans le cas où A ou B est une droite.

Table des matières

1 Introduction

Ce mémoire a pour thème l'approximation diophantienne. On étudie ici principalement un article de Schmidt paru en 1967 [10], qui pose les bases du problème de l'approximation de sous-espaces vectoriels par des sous-espaces rationnels. Avant d'aborder cette thématique, on rappelle les enjeux de l'approximation diophantienne.

1.1 Exposant d'irrationnalité

Traditionnellement, l'approximation diophantienne cherche à approcher les nombres réels par les rationnels. Pour un nombre réel ξ donné, on étudie alors la quantité :

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right|,$$

où p, q sont des entiers.
Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, cette quantité peut-être rendue aussi petite que l'on veut. Il est alors plus intéressant d'étudier ce qu'on appelle l'exposant d'irrationnalité de ξ défini comme :

$$\mu(\xi) = \sup \left\{ \mu \in \mathbb{R} \mid \text{ il existe une infinité de } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ tels que } \left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^\mu} \right\}$$

On cite quelques résultats sur cet exposant d'irrationnalité, on peut les retrouver dans [3], partie D.
Les deux théorèmes suivants sont élémentaires dans leur démonstration mais donnent des premières bornes sur $\mu(\xi)$.

Théorème 1.1.1 (Dirichlet, 1842). *Soit $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\mu(\xi) \geq 2$.*

Théorème 1.1.2 (Liouville, 1844). *Soit $\xi \in \mathbb{R}$ un nombre réel algébrique de degré $d \geq 2$, alors $\mu(\xi) \leq d$.*

Le théorème suivant précise celui de Liouville. Il est beaucoup plus profond et sa démonstration est loin d'être triviale.

Théorème 1.1.3 (Roth, 1955). *Soit $\xi \in \mathbb{R}$ un nombre irrationnel algébrique, alors $\mu(\xi) = 2$.*

Ce n'est pas une équivalence, par exemple e est transcendant et on peut montrer que $\mu(e) = 2$.
On a même mieux : on a $\mu(\xi) = 2$ pour presque tout ξ (au sens de la mesure de Lebesgue).
Il n'est cependant pas évident de calculer $\mu(\xi)$ pour un nombre transcendant ξ donné. Par exemple on conjecture que $\mu(\pi) = 2$ mais on a seulement montré que $\mu(\pi) \leq 7.103205334137...$ (dans [11]).

1.2 Généralisation à des espaces vectoriels

On cherche dans ce mémoire, en suivant l'article de Schmidt, à approcher un sous-espace vectoriel A d'un espace euclidien ou hermitien par un sous-espace vectoriel B défini sur un corps de nombres $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire qui a une base à coordonnées dans $\mathbb{K}$).
On souhaite que l'espace B approchant A ne soit pas "trop compliqué". On associe alors à B une notion de hauteur (voir partie 3) qui exprime la complexité du sous-espace vectoriel.
On définit la proximité entre deux sous-espaces A et B en introduisant la notion d'angles d'inclinaison entre A et B (voir partie 4), A sera proche de B si ces angles sont petits.
Schmidt démontre alors plusieurs résultats d'approximation qui apporte des réponses plus ou moins partielles au problème de l'approche du sous-espace A par des sous-espaces B définis sur $\mathbb{K}$ (voir partie 5).
Les travaux de Joseph généralisent la notion d'exposant d'irrationalité (voir partie 6). On peut alors reformuler les résultats de Schmidt en termes d'exposants.

Il est à noter que les résultats de Schmidt résolvent le problème dans le cas où $\min(\dim(A), \dim(B)) = 1$, c'est-à-dire le cas où l'on cherche à approcher des droites ou à approcher des sous-espaces par des droites.

2 Résultats préliminaires et outils

2.1 Résultats sur les déterminants

Les résultats de cette section proviennent de [6] et [4].
Soit $\mathbb{K}$ un corps. On noter $P(p,n)$ l'ensemble des parties à p éléments de $[\![1,n]\!]$.
Soit $I = \{i_1,..,i_p\} \in P(p,m)$ et $J = \{j_1,..,j_p\} \in P(p,n)$. Soit $A = (a_{k,l}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On note la matrice extraite de A correspondant à I et J :

$$A_{I,J} = \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p,j_1} & \cdots & a_{i_p,j_p} \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.1.1 (Binet-Cauchy). *Soit k,l,m,p des entiers. Soit $A \in M_{k,l}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{l,m}(\mathbb{K})$. Alors pour $I \in P(p,k)$ et $J \in P(p,m)$, on a :*

$$\det((AB)_{I,J}) = \sum_{K \in P(p,l)} \det(A_{I,K}) \det(B_{K,J}).$$

Définition 2.1.2. Soient I et J deux parties de $[\![1,n]\!]$. On définit :

$$\iota(I,J) = \#\{(i,j) \in I \times J \mid i > j\}.$$

En notant $\bar{I} = \{1,n\} \setminus I$, on pose $\ell(I) = \iota(I,\bar{I})$.

Remarque 2.1.3. $\iota(I,J)$ est le nombre de transpositions nécessaires pour ordonner $I \cup J$.

Théorème 2.1.4 (Formule de Laplace). *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $I \in P(p,n)$ alors :*

$$\det(A) = \sum_{J \in P(p,n)} (-1)^{\ell(I)+\ell(J)} \det(A_{I,J}) \det(A_{\bar{I},\bar{J}}).$$

On note maintenant : $A^{(p)} = (\det(A_{I,J}))_{I \in P(p,m), J \in P(p,n)}$. On a donc $A^{(p)} \in M_{\binom{m}{p},\binom{n}{p}}(\mathbb{K})$.

Propriété 2.1.5. *Soit k,l,m,p des entiers. Soit $A \in M_{k,l}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{l,m}(\mathbb{K})$. Alors :*

$$(AB)^{(p)} = A^{(p)} B^{(p)}.$$

Preuve. C'est directement l'application de la formule de Binet-Cauchy (théorème 2.1.1). ■

2.2 Coordonnées de Grassmann

On se place dorénavant dans le cas où $\mathbb{K}$ est un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbb{Q}$. On définit dans cette section les coordonnées de Grassmann (ou de Plücker selon la littérature) d'un sous-espace de $\mathbb{K}^n$. Ces coordonnées seront utiles pour définir la hauteur de cet espace.
A partir de maintenant, si S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension k, on notera librement S^k pour désigner l'espace S et indiquer sa dimension.

Définition 2.2.1. Soit S^k un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ de dimension k. Soit $A_1, \ldots, A_k$ une base de S. On pose $A = (A_1|\ldots|A_k) \in M_{n,k}(\mathbb{K})$ la matrice dont les colonnes sont les A_i.
On définit alors les **coordonnées de Grassmann** de S^k par rapport aux A_i : c'est la matrice $A^{(k)} \in M_{\binom{n}{k},1}(\mathbb{K})$ que l'on identifera à un vecteur de $\mathbb{K}^N$ avec $N = \binom{n}{k}$.

Les coordonnées de Grassmann déterminent le sous-espace étudié à multiplication par un scalaire près.

Propriété 2.2.2. *Soit S^k et S'^k deux sous-espaces de $\mathbb{K}^n$. On note X et X' les vecteurs coordonnées de Grassmann de S et S' relatifs à des choix de bases de S et S'. Alors :*

$$S = S' \iff \exists\, t \neq 0, X' = tX$$

Preuve. On s'inspire ici de [4] et [6].
$\boxed{\Longrightarrow}$ On écrit $X = A^{(k)}$ avec A une matrice dont les colonnes sont les vecteurs d'une base de S. De même on écrit $X' = A'^{(k)}$. Comme A et A' représentent deux bases de S, il existe $P \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ tel que $AP = A'$.
Et donc pour tous I,J de cardinal k, avec nécessairement $J = [\![1,k]\!]$, on a $A_{I,J}P = A'_{I,J}$.
On conclut en écrivant $t = \det(P)$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ On note $A \in \mathrm{M}_{n,k}(\mathbb{K})$ comme avant. Soit $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{K}^n$ et on note $B = (A|u) \in \mathrm{M}_{n,k+1}(\mathbb{K})$ la matrice où on a ajouté à A la colonne u.
On a $u \in S$ si et seulement si B est de rang k (car ici A est de rang k). Cette dernière condition est équivalente à l'annulation de tous les mineurs de taille $k+1$ de B. On developpe chaque mineur par rapport à la dernière colonne et on obtient :

$$\forall\, I \in P(k+1,n), \quad \det(B_{I,\{1,\dots,k+1\}}) = \sum_{i\in I} \det(A_{I\setminus\{i\},\{1,\dots,k\}})u_i.$$

Comme les $\det(A_{I\setminus\{i\},\{1,\dots,k\}})$ sont des coordonnées de X, on arrive donc à :

$$\begin{aligned} u \in S &\Longleftrightarrow \forall\, I \in P(k+1,n), \sum_{i\in I} \det(A_{I\setminus\{i\},\{1,\dots,k\}})u_i = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall\, I \in P(k+1,n), \sum_{i\in I} t\det(A_{I\setminus\{i\},\{1,\dots,k\}})u_i = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall\, I \in P(k+1,n), \sum_{i\in I} \det(A'_{I\setminus\{i\},\{1,\dots,k\}})u_i = 0 \\ &\Longleftrightarrow u \in S'. \end{aligned}$$

■

Pour S^k sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, on note S^* la droite engendrée par les coordonnées de Grassmann de S. Cette droite servira à définir la hauteur de l'espace S.

Définition 2.2.3. Soit $I \in P(k,n)$. On écrit $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ et $\overline{I} = \{\bar{i}_1 < \dots < \bar{i}_{n-k}\}$.
On définit ε_I comme la signature de la permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_k & \bar{i}_1 & \dots & \bar{i}_{n-k} \end{pmatrix}.$$

On ordonne $P(k,n)$ avec l'ordre lexicographique sur les parties. Pour $i \in [\![1,N]\!]$, on associe à i la partie $I \in P(k,n)$ correspondante et on note $\varepsilon_i = \varepsilon_I$. On définit alors l'application :

$$\tau : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^N & \longrightarrow & \mathbb{K}^N \\ (\eta_1,\dots,\eta_N) & \longmapsto & (\varepsilon_N\eta_N,\dots,\varepsilon_1\eta_1) \end{array} \right. .$$

On remarque que τ est une involution : $\tau^2 = \tau$.

Théorème 2.2.4. *On a :*

$$(S^\perp)^* = \tau(S^*).$$

On définit $P_{(n-k)}$ par $P_{(n-k)} = TP^{(n-k)}T$ où T est la matrice de τ dans la base canonique de $\mathbb{K}^N$.
Pour démontrer ce théorème on utilise le lemme suivant, qui se démontre en partie grâce à la formule de Binet-Cauchy et en remarquant que ${P_{(n-k)}}_{I,J} = (-1)^{\ell(I)+\ell(J)}P_{\bar{J},\bar{I}}$ (voir [6]).

Lemme 2.2.5. *Soit $P \in M_n(\mathbb{K})$ alors :*

$$P^{(k)}({}^tP)_{(n-k)} = \det(P)I_N \text{ avec } N = \binom{n}{k}.$$

Preuve.(*Théorème 2.2.4*)
• On étudie d'abord le cas où S est engendré par les k premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors $S^\perp$ est engendré par les $n-k$ derniers vecteurs de cette base.
On note A_0 la matrice formée par ces k premiers vecteurs et B_0 celle formée par les $n-k$ derniers. On a alors ${}^tB_0A_0 = 0$.
De plus, $X = A_0^{(k)} = (1,0,\dots,0)$ et $Y = B_0^{(n-k)} = (0,\dots,0,1)$ sont respectivement les coordonnées de Grassmann de S et $S^\perp$. On a alors $\tau(X) = Y$ et on conclut.
• Dans le cas général on note A la matrice associée à une base de S et P une matrice inversible telle que $PA_0 = A$. Si on note $B = {}^tP^{-1}B_0$ on a :

$${}^tBA = {}^t({}^tP^{-1}B_0)(PA_0) = {}^tB_0A_0 = 0.$$

Les vecteurs colonnes de B engendrent donc $S^\perp$ car B est de rang $n-k$ (car B_0 est de rang $n-k$).
On calcule $\tau(A^{(k)})$:

$$\begin{aligned} TA^{(k)} &= T(PA_0)^{(k)} \\ &= TP^{(k)}A_0^{(k)} \\ &= \det(P)T({}^tP)^{-1}_{(n-k)}A_0^{(k)} \text{ par le lemme} \\ &= \det(P)({}^tP^{(n-k)})^{-1}TA_0^{(k)} \text{ car } T^2 = 1 \\ &= \det(P)({}^tP^{-1})^{(n-k)}B_0^{(n-k)} \\ &= \det(P)B^{(n-k)}. \end{aligned}$$

Alors $\tau(A^{(k)})$ et $B^{(n-k)}$ sont les mêmes à multiplication par un scalaire près et définissent donc le même espace.

■

2.3 Théorèmes de Minkowski

Un réseau de $\mathbb{R}^d$ est un sous-groupe discret Λ de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 2.3.1 (1^{er} théorème de Minkowski)**.** *Soit Λ un réseau de $\mathbb{R}^d$ pour $d > 0$. Soit C un convexe symétrique de $\mathbb{R}^d$.*

$$\text{Si } vol(C) > 2^d covol(\Lambda) \text{ alors } C \cap \Lambda \neq \{0\}.$$

Preuve. On pose $C' = \frac{1}{2}C$, on a alors $\mathrm{vol}(C') = \frac{1}{2^d}\mathrm{vol}(C) > \mathrm{covol}(\Lambda)$.
Soit P un parallélotope fondamental de Λ. On a :

$$C' = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} C' \cap (\lambda + P).$$

Et donc :

$$\mathrm{vol}(C') = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{vol}(C' \cap (\lambda + P)) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{vol}((C' - \lambda) \cap P).$$

Si les ensembles $(C' - \lambda) \cap P$ étaient deux à deux disjoints, on aurait :

$$\mathrm{covol}(\Lambda) = \mathrm{vol}(P) \geq \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{vol}((C' - \lambda) \cap P) = \mathrm{vol}(C'),$$

ce qui est contradictoire. Donc il existe $x, y \in C'$ et $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ tel que :

$$\lambda' \neq \lambda \text{ et } y - \lambda' = x - \lambda$$

Donc $x - y \in \Lambda \setminus \{0\}$ mais aussi $x - y = \frac{1}{2}(2x - 2y) \in C$.

■

Corollaire 2.3.2. *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ et $c_1, \ldots, c_n > 0$ tels que $c_1 \ldots c_n > |\det(A)|$.*
Il existe alors $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| < c_i.$$

Définition 2.3.3. Soit Λ un réseau de $\mathbb{R}^d$ et C un convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$.
Les minima successifs de Λ sont les réels $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ tels que :

$$\lambda_j = \inf\{\lambda > 0 \mid \lambda C \text{ contient } j \text{ vecteurs linéairement indépendants de } \Lambda\}$$

Théorème 2.3.4 (2^{nd} théorème de Minkowski)**.** *On a :*

$$\frac{2^n}{n!} covol(\Lambda) \leq \lambda_1 \ldots \lambda_n vol(C) \leq 2^n covol(\Lambda).$$

2.4 Déterminants généralisés

On se place ici dans un espace euclidien ou hermitien G^n de dimension n muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 2.4.1. Soit $X_1, .., X_m$ des vecteurs de G^n. On définit le déterminant généralisé des X_i par :
$$D(X_1, .., X_m) = \sqrt{\det(\langle X_i, X_j \rangle)}$$

Remarque 2.4.2. Si on note $M = (X_1| \ldots |X_m)$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs X_i et M^* sa matrice transposée-conjuguée alors :

$$D(X_1, .., X_m) = \sqrt{\det(M^* M)}.$$

Cela nous donne au passage que le déterminant généralisé est bien défini.

Propriété 2.4.3. *On a :*

(i) $\forall\, \sigma \in \mathcal{S}_m, D(X_{\sigma(1)}, .., X_{\sigma(m)}) = D(X_1, .., X_m)$

(ii) Pour tout scalaire t, $D(X_1, .., tX_k, .., X_m) = |t| D(X_1, .., X_m)$

(iii) Pour tout scalaire c et $l \neq k$, $D(X_1, .., X_k, .., X_l + cX_k, .., X_m) = D(X_1, .., X_k, .., X_l, .., X_m)$

(iv) $D(X_1, .., X_m) = 0 \Longleftrightarrow X_1, .., X_m$ *linéairement dépendants*

(v) $\forall\, O \in \mathcal{O}_n$, $D(OX_1, .., OX_m) = D(X_1, .., X_m)$ *où l'on note* $\mathcal{O}_n$ *le groupe orthogonal, c'est-à-dire les automorphimes de* G^n *qui préservent le produit scalaire.*

Preuve. On utilise la remarque 2.4.2 pour élaborer notre preuve en posant $M = (X_1| \dots |X_m)$.

(i) Si on permute les lignes ou les colonnes d'une matrice, son déterminant ne change qu'au signe près.

(ii) Le fait de multiplier par t la k-ième colonne de M multipliera la k-ième colonne de M^*M par t et la k-ième ligne de M^*M par $\bar{t}$. On sort le t deux fois du déterminant et on obtient donc bien un facteur $|t| = \sqrt{t\bar{t}}$

(iii) Par les résultats classiques sur le déterminant, ajouter à une colonne un multiple d'un autre ne change pas le déterminant. On conclut grâce au point précédent.

(iv) Si $X_1, .., X_m$ sont linéairement indépendants alors M est une matrice de passage, donc M^*M est inversible et $\det(M^*M) \neq 0$.
Pour le sens réciproque, on applique juste la formule précédente.

(v) Une transformation orthogonale préserve le produit scalaire, donc le déterminant généralisé par définition.

■

Lemme 2.4.4. *Soit* $X_1, .., X_m \in G^n$*, on note* $X_i = (x_{i1}, .., x_{in})$*. Alors en posant* $M = (X_1| \dots |X_m)$ *et* $N = \binom{n}{m}$ *on a :*

$$D^2(X_1, .., X_m) = \sum_{J \in P(m,n)} |\det(M_{J,\underline{1}})|^2 \quad \text{où } \underline{1} = \{1, \dots, m\}.$$

Preuve. On a $M = (X_1| \dots |X_m)$ et alors $D^2(X_1, .., X_m) = \det(M^*M)$.
Par la formule de Binet-Cauchy (théorème 2.1.1) on a :

$$\det(M^*M) = \det(M^*M)_{\underline{1},\underline{1}} = \sum_{J \in P(m,n)} \det(M^*_{\underline{1},J}) \cdot \det(M_{J,\underline{1}}) = \sum_{J \in P(m,n)} \overline{\det(M_{J,\underline{1}})} \cdot \det(M_{J,\underline{1}}),$$

ce qui nous permet de conclure.

■

Remarque 2.4.5. On a donc $D(X_1, .., X_m) = \|M^{(m)}\|_2$ avec $M^{(m)}$ les coordonnées de Grassmann associées à $X_1, \dots, X_m$.

Lemme 2.4.6 (Inégalité de Hadamard généralisée)**.** *Pour tous* $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_k$ *vecteurs de* G^n*, on a :*

$$D(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_k) \leq D(X_1, \dots, X_m) D(Y_1, .., Y_k),$$

avec égalité si, et seulement si :

$D(X_1, .., X_m) = 0$
ou $D(Y_1, .., Y_k) = 0$
ou les espaces Vect$(X_1, .., X_m)$ *et Vect*$(Y_1, .., Y_k)$ *sont orthogonaux*

Preuve. Si une des deux familles (X_i) ou (Y_j) est liée, les deux côtés de l'inégalité sont nuls par le (iv) de la propriété 2.4.3.
On suppose donc maitenant que les deux familles sont libres. Soit π la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_m)^\perp$.
D'après le (iii) de la propriété 2.4.3 on a :

$$D(X_1, .., X_m, Y_1, .., Y_k) = D(X_1, .., X_m, \pi(Y_1), .., \pi(Y_k)).$$

La matrice des produits scalaires associée au déterminant généralisé de droite est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} M_X & 0 \\ 0 & M_{\pi(Y)} \end{pmatrix},$$

avec M_X la matrice des produits scalaires des (X_i). On calcule le déterminant par blocs et on a donc :

$$D(X_1, .., X_m, Y_1, .., Y_k) = D(X_1, .., X_m) D(\pi(Y_1), .., \pi(Y_k)).$$

D'après la formule de la remarque 2.4.5 :

$$D(\pi(Y_1), .., \pi(Y_k)) = \|(PA)^{(k)}\|_2,$$

avec $A = (Y_1| \dots |Y_k)$ et P la matrice de la projection π. Or $(PA)^{(k)} = P^{(k)}A^{(k)}$.
On remarque par ailleurs que $P^{(k)}$ est une projection orthogonale :

$$\left(P^{(k)}\right)^2 = \left(P^2\right)^{(k)} = (P)^{(k)}$$

et

$${}^t\left(P^{(k)}\right) = \left({}^tP\right)^{(k)}.$$

On en déduit alors :

$$\|(PA)^{(k)}\|_2 \leq \|A^{(k)}\|_2,$$

avec égalité si et seulement si $(PA)^{(k)} = A^{(k)}$ ce qui est équivalent à $PA = A$.
On a donc bien :

$$D(\pi(Y_1), .., \pi(Y_k)) \leq D((Y_1), .., (Y_k)),$$

avec égalité si et seulement si $\pi(Y_j) = Y_j$ et donc le lemme.

■

Lemme 2.4.7. *On a :*

$$D(X + Y, X_2, .., X_m) \leq D(X, X_2, .., X_m) + D(Y, X_2, .., X_m),$$

avec égalité si, et seulement si, la famille $(X, Y, X_2, .., X_m)$ *est liée.*

Preuve. On suppose que la famille $X_2, \dots, X_m$ est libre, le résultat étant trivial sinon.
On note $M_{X+Y} = (X + Y|X_2| \dots |X_m)$, $M_X = (X|X_2| \dots |X_m)$ et $M_Y = (Y|X_2| \dots |X_m)$.
Par la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne on a :

$$M_{X+Y}^{(m)} = M_X^{(m)} + M_Y^{(m)}.$$

D'après la remarque 2.4.5 :

$$\begin{aligned} D(X + Y, X_2, .., X_m) &= \|M_{X+Y}^{(m)}\|_2 \\ &\leq \|M_X^{(m)}\|_2 + \|M_Y^{(m)}\|_2 \\ &= D(X, X_2, .., X_m) + D(Y, X_2, .., X_m). \end{aligned}$$

Pour le cas d'égalité, on remarque que si $D(X, X_2, .., X_m)$ ou $D(Y, X_2, .., X_m)$ est nul, cela implique l'égalité car alors $X \in \text{Vect}(X_2, \dots, X_m)$ ou $Y \in \text{Vect}(X_2, \dots, X_m)$ et on utilise la propriété 2.4.3 (iii).
Sinon on a égalité si et seulement si les vecteurs $M_X^{(m)}$ et $M_Y^{(m)}$ sont proportionnels. D'après le théorème 2.2.2, cela donne $\text{Vect}(X, X_2, \dots, X_m) = \text{Vect}(Y, X_2, \dots, X_m)$ et donc :

$$\text{il y a égalité} \iff (X, Y, X_2, \dots, X_m) \text{ est liée.}$$

■

Définition 2.4.8. Soit Γ un réseau de rang m. Soit $X_1, .., X_m$ une base de ce réseau. On définit le determinant du réseau Γ par :

$$d(\Gamma) = D(X_1, .., X_m) = \text{covol}(\Gamma).$$

L'indice d'un sous-réseau Γ de Λ est défini par la quantité $\dfrac{d(\Gamma)}{d(\Lambda)}$.

3 Hauteurs

3.1 Première définition

Schmidt introduit la notion de hauteur d'un sous-espace dans le premier paragraphe de son article.

Définition 3.1.1. On appelle une fonction distance une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ continue vérifiant :

- $F(x) = 0 \iff x = (0, \ldots, 0)$
- $\forall\, t \in \mathbb{R},\ F(tx) = |t|F(x)$

Exemple 3.1.2. On utilisera par la suite les fontions distance suivantes :

- $F_S(x) = \max\limits_{i=1}^{n}(|x_i|)$
- $F_E(x) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$
- $F_N(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$

Propriété 3.1.3. *Soit F_1, F_2 deux fonctions distance. Alors il existe $c(F_1, F_2) > 0$ tel que :*

$$F_1 \leq c(F_1, F_2)F_2.$$

Preuve. [2](IV,2.) ■

Exemple 3.1.4. On a

$$F_S \leq F_E \leq F_N \leq \sqrt{n}F_E \leq nF_S.$$

On se place dans le cas où $\mathbb{K}$ est un corps de nombres de degré p. On désigne par $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ son anneau d'entiers. Enfin on note $\sigma_1, .., \sigma_p$ les plongements de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $\xi \in \mathbb{K}$ et $i \in [\![1, p]\!]$, on pose $\xi^{(i)} = \sigma_i(\xi)$ et $v_i(\xi) = |\xi^{(i)}|$. Pour $X = (\xi_1, .., \xi_n) \in \mathbb{K}^n$ et $i \in [\![1, p]\!]$, on définit $X^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, .., \xi_n^{(i)})$.
On peut alors donner une première définition de hauteur dans le cas d'une droite :

Définition 3.1.5. Soit L une droite de $\mathbb{K}^n$ et $X = (\xi_1, .., \xi_n) \in L \setminus \{0\}$. On note $\alpha(X)$ l'idéal fractionnaire engendré par les ξ_i c'est-à-dire $\alpha(X) = \Big\{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\xi_i \mid \alpha_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\Big\}$. Soit F une fonction distance, on définit la **hauteur** de L par rapport à F :

$$H_F(L) = \frac{1}{N(\alpha(X))} \prod_{j=1}^{p} F(v_j(\xi_1), \ldots, v_j(\xi_n)).$$

Remarque 3.1.6. On rappelle que la norme $N(I)$ d'un idéal fractionnaire I est l'idéal principal de $\mathbb{Q}$ engendré par $\{N(x) \mid x \in I\}$ où $N(x) = \prod\limits_{j=1}^{p} \sigma_j(x)$ dans notre cas des corps de nombres. On identifie ici $N(I)$ et l'unique rationnel positif m_I tel que $N(I) = m_I\mathbb{Q}$.
Si $I \subset \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, on a $N(x) \in \mathbb{Z}$ pour $x \in I$ et donc $N(I) \in \mathbb{N}$.
Par les propriétés des fonctions distance, on a $H_F(L)$ indépendante du choix de X.

Une fois que le cas de la dimension 1 est traité, on peut généraliser la définition à tous les sous-espaces de $\mathbb{K}^n$ grâce aux outils préliminaires.

Définition 3.1.7. Soit S^d un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. On note $Y = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$ ses coordonnées de Grassmann (définition 2.2.1) avec $N = \binom{n}{d}$. Soit F une fonction distance τ-invariante sur G^N (avec τ l'application du théorème 2.2.4).
On définit alors la hauteur de l'espace S^d par rapport à F par :
- Si $d = 0$ ou $d = n$, $H_F(S) = 1$.
- Sinon $H_F(S) = H_F(S^*)$.

Remarque 3.1.8. On a $H_F(S) = H_F(S^{\perp})$ par le théorème 2.2.4.

3.2 Une notion différente de hauteur

Propriété 3.2.1. *Soit S^d un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ de dimension d et $X_1, .., X_d$ une base de S^d.*
Soit $Y = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$ les coordonnées de Grassmann de S^d associés à (X_i), on a alors pour tout $j \in [\![1,p]\!]$:

$$F_E(v_j(\eta_1), \ldots, v_j(\eta_N)) = D(X_1^{(j)}, \ldots, X_d^{(j)}).$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
F_E(v_j(\eta_1), \ldots, v_j(\eta_N))^2 &= \sum_{i=1}^{N} v_j(\eta_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} |\eta_i^{(j)}|^2 \\
&= D^2(X_1^{(j)}, .., X_d^{(j)}) \text{ par le lemme 2.4.4 .}
\end{aligned}$$

■

Remarque 3.2.2. On a $H_{F_E}(S^d) = \dfrac{1}{N(\alpha(Y))} \displaystyle\prod_{j=1}^{p} D(X_1^{(j)}, \ldots, X_d^{(j)})$ avec les notations des définitons 3.1.5 et 3.1.7.

On écrit $p = r_1 + 2r_2$ avec r_1 le nombre de plongements réels et r_2 le nombre de paires de plongements complexes non réels de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$ (si σ est un plongement complexe non réel, $\overline{\sigma}$ en est un aussi). Cela nous amène aux définitions suivantes :

Définition 3.2.3. On pose $\Delta = 2^{-r_2}|\delta|^{\frac{1}{2}}$ avec $\delta = \mathrm{disc}(\mathbb{K})(= \det((\sigma_j(x_i))^2)$ avec $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ sur $\mathbb{Z}$).

Définition 3.2.4. On pose pour $\xi \in \mathbb{K}$: $\xi^{[i]} = \begin{cases} \xi^{(i)} & \text{si } 1 \leq i \leq r_1 \\ \mathrm{Re}(\xi^{(i)}) & \text{si } r_1 < i \leq r_1 + r_2 \\ \mathrm{Im}(\xi^{(i)}) & \text{si } r_1 + r_2 < i \leq p. \end{cases}$

Définition 3.2.5. Soit $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$. On définit le vecteur suivant :

$$\rho(X) = \left(\xi_1^{[1]}, \ldots, \xi_1^{[p]}, \ldots, \xi_n^{[1]}, \ldots, \xi_n^{[p]}\right) \in \mathbb{R}^{np} \ ,$$

ainsi que, pour $\Sigma \subset \mathbb{K}^n$:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{K}}(\Sigma) = \Sigma \cap \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n \ .$$

Soit S^d un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension d. On peut alors voir cet espace S^d comme un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel de dimension dp (car $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = p$). Comme $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}(S^d)$ est un sous $\mathbb{Z}-$module de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n$ de dimension d, on a alors que $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}(S^d)$ est un réseau de $\mathbb{K}^n$ de rang dp. Et, à fortiori, $\rho(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}(S^d))$ est un réseau de $\mathbb{R}^{pn}$ de rang dp (en effet ρ est $\mathbb{Q}$-linéaire) que l'on note $\Lambda(S)$.
On définit alors une nouvelle notion de hauteur pour S^d.

Définition 3.2.6. $H'(S^d) = \begin{cases} \Delta^{-d} d(\Lambda(S)) & \text{si } d \neq 0 \\ 1 & \text{si } d = 0 \end{cases}$ avec $d(\Lambda(S))$ le déterminant du réseau $\Lambda(S)$.

Propriété 3.2.7. *On a $H'(\mathbb{K}^n) = 1 = H(\mathbb{K}^n)$.*

Preuve.
• Si $n = 1$ alors $\Lambda(\mathbb{K}) = \rho(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) = \{(\xi^{[1]}, \ldots, \xi^{[p]}) \mid \xi \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\}$.
Soit $x_1, \ldots, x_p$ une base intégrale de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{Q}$ (c'est-à-dire une base de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ sur $\mathbb{Z}$). Alors $\delta = \det((\sigma_j(x_i))^2)$.
On travaille sur ce déterminant, en faisant des opérations sur les lignes, on fait apparaitre les parties réelles et imaginaires des différents coefficients :

$$\begin{aligned}
|\delta| &= 2^{2r_2} \begin{vmatrix} x_1^{[1]} & \ldots & x_1^{[p]} \\ \vdots & & \vdots \\ x_p^{[1]} & \ldots & x_p^{[p]} \end{vmatrix}^2 \\
&= 2^{2r_2} D(\rho(x_1), \ldots, \rho(x_p))^2 \\
&= 2^{2r_2} d(\rho(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}))^2 \text{ car } (\rho(x_1), \ldots, \rho(x_p)) \text{ est une base de } \rho(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}).
\end{aligned}$$

On a alors $\Delta = d(\Lambda(\mathbb{K}))$ ce qui conclut le cas $n = 1$.
• Si $n > 1$, on trouve une base de $\Lambda(\mathbb{K}^n)$ en reprenant la base intégrale de $n = 1$: les $\rho(0, \ldots, x_j, \ldots, 0)$ forment une base de $\Lambda(\mathbb{K}^n)$. En arrangeant ces vecteurs dans un bon ordre on forme la matrice $M \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ diagonale par blocs et donc les blocs diagonaux sont :

$$\begin{pmatrix} x_1^{[1]} & \ldots & x_1^{[p]} \\ \vdots & & \vdots \\ x_p^{[1]} & \ldots & x_p^{[p]} \end{pmatrix} \text{ de déterminant } 2^{-r_2}\sqrt{|\delta|} \text{ d'après le cas } n = 1.$$

On a alors $d(\Lambda(\mathbb{K}^n)) = \det(M) = 2^{-nr_2}|\delta|^{\frac{n}{2}} = \Delta^n$ ce qui conclut le cas général.

■

On souhaite maintenant montrer que les hauteurs H et H' coïncident sur tout espace S^d. Pour cela on introduit les notations et les lemmes suivants :

Définition 3.2.8. Soit $S^d \subset \mathbb{K}^n$ de dimension $d \in]\!]1, n[\![$. Soit $X_1, \ldots, X_d \in O_{\mathbb{K}}(S^d)$ d vecteurs indépendants sur $\mathbb{K}$.
On définit l'ensemble $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}(X_1, \ldots, X_d) = \{a_1X_1 + \ldots + X_d a_d \mid a_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{K}}(S)$
et le sous-réseau de $\Lambda(S)$: $\Lambda(X_1, \ldots, X_d) = \rho(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}(X_1, \ldots, X_d))$.

Remarque 3.2.9. Le réseau $\Lambda(X_1, \ldots, X_d)$ est de rang dp sur $\mathbb{Z}$.

Dans la suite on fixe $X_1, \ldots, X_d \in O_{\mathbb{K}}(S^d)$ linéairement indépendants sur $\mathbb{K}$ avec $d \neq 0, n$.
On note $X_t = (\xi_{t1}, \ldots, \xi_{tn})$.

Lemme 3.2.10. *On a :*

$$d(\Lambda(X_1, \ldots, X_d)) = \Delta^d \prod_{j=1}^{p} D(X_1^{(j)}, \ldots, X_d^{(j)}).$$

Preuve. Soit $(\beta_1, \ldots, \beta_p)$ une base intégrale de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{Q}$.
On pose $Z_{jk} = \rho(\beta_j X_k)$. Les (Z_{jk}) forment une base de $\Lambda(X_1, \ldots, X_d)$ sur $\mathbb{Z}$ pour $j \in [\![1, p]\!]$ et $k \in [\![1, d]\!]$.
On a :

$$Z_{jk} = ((\beta_j\xi_{k1})^{[1]}, \ldots, (\beta_j\xi_{k1})^{[p]}, \ldots, (\beta_j\xi_{kn})^{[1]}, \ldots, (\beta_j\xi_{kn})^{[p]}).$$

On introduit :

$$Z^*_{jk} = ((\beta_j\xi_{k1})^{(1)}, \ldots, (\beta_j\xi_{k1})^{(p)}, \ldots, (\beta_j\xi_{kn})^{(1)}, \ldots, (\beta_j\xi_{kn})^{(p)}).$$

En faisant les mêmes manipulations sur le déterminant que dans la preuve de la propriété 3.2.7 on a :

$$\begin{aligned} d(\Lambda(X_1, \ldots, X_d)) &= D(Z_{11}, \ldots, Z_{p1}, \ldots, Z_{1d}, \ldots, Z_{pd}) \\ &= 2^{-dr_2} D(Z^*_{11}, \ldots, Z^*_{p1}, \ldots, Z^*_{1d}, \ldots, Z^*_{pd}). \end{aligned}$$

On pose maintenant la matrice $M(Z^*) = (Z^*_{11}| \ldots |Z^*_{p1}| \ldots |Z^*_{1d}| \ldots |Z^*_{pd})$ dont les colonnes sont les vecteurs Z^*_{jk}.
Donc, en posant $d^* = D^2(Z^*_{11}, .., Z^*_{pd})$, on a :

$$d^* = \sum_{J \in P(pd, nd)} |\det(M(Z^*)_{J,\underline{1}})|^2 \text{ d'après le lemme 2.4.4.}$$

On va étudier chacun de ces déterminants grâce à la formule de Laplace (théorème 2.1.4). On pose $A = M(Z^*)_{J,\underline{1}}$:

$$\det(A) = \sum_{K \in P(p, pd)} (-1)^{\ell(I)+\ell(K)} \det(A_{K,I}) \det(A_{\bar{K},\bar{I}}) \text{ avec } I = \{1, \ldots, p\}.$$

On regarde maintenant $A_{K,I}$ pour $K = \{k_1, \ldots, k_p\} \in P(p, pd)$ fixé. C'est une matrice extraite des p premières colonnes de $M(Z^*)$. On écrit plus précisement :

$$A_{K,I} = \left((\beta_j \xi_{1,u_{k_i}})^{(v_{k_i})}\right)_{i \in [\![1,p]\!], j \in [\![1,p]\!]} \text{ où on note } k_i = u_{k_i}p + v_{k_i}.$$

On peut calculer son déterminant :

$$\begin{aligned}\det(A_{K,J}) &= \sum_{\sigma\in S_p}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{p}(\beta_{\sigma(i)}\xi_{1,u_{k_i}})^{(v_{k_i})}\\ &= \left(\prod_{i=1}^{p}(\xi_{1,u_{k_i}})^{(v_{k_i})}\right)\sum_{\sigma\in S_p}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{p}(\beta_{\sigma(i)})^{(v_{k_i})}.\end{aligned}$$

On en conclut que si les v_{k_i} ne couvrent pas $[\![1,p]\!]$ alors ce déterminant est nul.
Sinon $\det(A_{K,J}) = \det((\beta_j^{(i)}))\cdot\Xi$ avec Ξ indépendant des β_j.
En rappellant que $\det((\beta_j^{(i)})) = \sqrt{|\delta|}$ et en appliquant le même procédé ($d-1$ fois) pour $\det(A_{\bar{K},\bar{I}})$ on trouve que :

$$\det(M(Z^*)_{J,\underline{1}}) = |\delta|^{\frac{d}{2}}\cdot\Xi \text{ avec } \Xi \text{ indépendant des } \beta_j.$$

Et donc $d^* = |\delta|^d\cdot\Xi$ avec Ξ indépendant des β_j.
On considère maintenant les $\beta_i^{(j)}$ comme des variables. On note d^{**} le déterminant d^* obtenu en substituant le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ à $\beta_i^{(j)}$. D'après ce qui précède on a $d^* = |\delta|^d d^{**}$.
On écrit comme avant $M(Z^{**})$ la matrice correspondante. Quite à permuter les lignes et les colonnes, on se ramène au cas où :

$$M(Z^{**}) = \mathrm{diag}(Y^{(1)},\dots,Y^{(p)}) \text{ avec } Y^{(j)} = (\xi_{ki}^{(j)})_{k\in[\![1,d]\!],i\in[\![1,n]\!]} = \begin{pmatrix} X_1^{(j)}\\ \vdots\\ X_d^{(j)}\end{pmatrix}.$$

Donc $d^{**} = \det(M(Z^{**})^*M(Z^{**})) = \prod_{j=1}^{p} D(X_1^{(j)},..,X_d^{(j)})^2$.

Il ne reste plus qu'à recoller les égalités :

$$\begin{aligned}d(\Lambda(X_1,..,X_d)) &= 2^{-dr_2}D(Z_{11}^*,\dots,Z_{p1}^*,\dots,Z_{1d}^*,\dots,Z_{pd}^*)\\ &= 2^{-dr_2}\sqrt{|d^*|}\\ &= 2^{-dr_2}|\delta|^{\frac{d}{2}}\sqrt{|d^{**}|}\\ &= \Delta^d\prod_{j=1}^{p}D(X_1^{(j)},\dots,X_d^{(j)}).\end{aligned}$$

∎

Lemme 3.2.11. *Soit $\eta_1,\dots,\eta_N$ les coordonnées de Grassmann associées à $X_1,\dots,X_d$.*
L'indice de $\Lambda(X_1,\dots,X_d)$ dans $\Lambda(S)$ est $N(\alpha)$ avec α l'idéal engendré par les $\eta_1,\dots,\eta_N$.

Preuve. L'indice de $\Lambda(X_1,\dots,X_d)$ dans $\Lambda(S)$ est celui de $\rho(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}(X_1,\dots,X_d))$ dans $\rho(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}(S))$ qui est le même que celui de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}(X_1,\dots,X_d))$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}(S)$.
Soit $Y = \alpha_1X_1+\dots+\alpha_dX_d\in\mathcal{O}_{\mathbb{K}}(S)$ avec $\alpha_1,\dots,\alpha_d\in\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.
En regardant les mineurs de taille d de $(X_1\mid\dots\mid X_{i-1}\mid Y\mid X_{i+1}\mid\dots\mid X_d)$, on trouve $\alpha_i\eta_j\in\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ pour tous i et j.
Soit $\rho\in\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ un multiple commun à tous les η_j, on pose $\beta_i = \rho\alpha_i\in\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Il nous reste alors à montrer que le nombre d'éléments $(\beta_1,\dots,\beta_d)\in\mathcal{O}_{\mathbb{K}}^d$ modulo $(\rho\mathcal{O}_{\mathbb{K}})^d$ satisfaisant $\beta_1X_1+\dots\beta_dX_d\in\rho\mathcal{O}_{\mathbb{K}}(S)$ est $N(\alpha)$. Cela revient à compter les solutions de :

$$\sum_{i=1}^{d}\beta_iX_i = 0 \mod (\rho).$$

On décompose pour cela les idéaux α et (ρ) en produit d'idéaux premiers dans $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$:

$$\alpha = \mathcal{P}_1^{e_1}\dots\mathcal{P}_s^{e_s} \text{ et } (\rho) = \mathcal{P}_1^{f_1}\dots\mathcal{P}_s^{f_s} \text{ avec } e_j\le f_j.$$

On se ramène alors à l'étude sur ces idéaux premiers. On cherche les solutions de :

$$\sum_{i=1}^{d}\beta_iX_i = 0 \mod \mathcal{P}_j^{f_j},$$

et l'on veut montrer que le nombre de ces solutions est $N(\mathcal{P})^{e_j}$ pour $j \in [\![1,s]\!]$. On pourra alors conclure grâce à la multiplicativité de la norme et au théorème chinois.
On se place alors à j fixé, on note $\mathcal{P}_j = \mathcal{P}, e_j = e$ et $f_j = f$. En écrivant $R_t = (\xi_{1t}, \ldots, \xi_{dt})$ et $B = {}^t(\beta_1, \ldots, \beta_d)$, la congruence étudiée devient :

$$\forall\, k \in [\![1,n]\!], BR_k = 0 \mod \mathcal{P}^f.$$

On note $v_\mathcal{P}$ est la valuation $\mathcal{P}-$adique. Comme $v_\mathcal{P}(\alpha) = e$, il existe un j tel que $\eta_j \in \mathcal{P}^e \setminus \mathcal{P}^{e+1}$. Quite à réarranger les X_i, on peut supposer que le déterminant des d premiers vecteurs $R_1, \ldots, R_d$ est cet η_j.
Les vecteurs $X_1, \ldots, X_d$ sont linéairement indépendants donc les d premiers vecteurs $R_1, \ldots, R_d$ forment une base de $\mathbb{K}^d$. On peut écrire alors :

$$R_k = c_1R_1 + \ldots + c_dR_d \text{ pour } k \in [\![d+1,n]\!],$$

où $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{K}$ dépendent de k.
Si on regarde le déterminant de $(R_1 \mid \ldots \mid R_{j-1} \mid R_k \mid R_{j+1} \mid \ldots \mid R_d)$, on trouve que celui-ci est dans $\mathcal{P}^e$ donc $v_\mathcal{P}(c_i) \geq 0$ pour tout $i \in [\![1,d]\!]$.
On peut alors se restreindre aux seuls d premiers vecteurs et notre système devient :

$$\forall\, k \in [\![1,d]\!], BR_k = 0 \mod \mathcal{P}^f.$$

On montre grâce au lemme suivant (cas $g_1 = \ldots = g_d = f$) que le cardinal de l'ensemble des solutions est bien $N(\mathcal{P})^e$.

■

Lemme 3.2.12. *Soit $e, f, g_1, \ldots, g_d \in \mathbb{Z}$ tels que $0 \leq e \leq g_k \leq f$ pour tout $k \in [\![1,d]\!]$.*
Soit $R_t = (\xi_{1t}, \ldots, \xi_{dt}) \in \mathcal{O}_\mathbb{K}^d$ tels que $\det(R_1 \mid \ldots \mid R_d) \in \mathcal{P}^e \setminus \mathcal{P}^{e+1}$ avec $\mathcal{P}$ idéal premier. Alors le nombre de solutions $(\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathcal{O}_\mathbb{K}^d$ modulo $\mathcal{P}^f$ du système :

$$\forall\, k \in [\![1,d]\!], BR_k = 0 \mod \mathcal{P}^{g_k}$$

est $N(\mathcal{P})^{df+e-g_1-\ldots-g_d}$.

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur e et est détaillée dans l'article de Schmidt ([10], lemme 6).

■

On arrive enfin au théorème important de cette section :

Théorème 3.2.13. *Soit S^d un sous-espace de K^n, alors pour $H = H_{F_E}$:*

$$H'(S^d) = H(S^d)\ .$$

Preuve. Les cas $d = 0$ et $d = n$ sont déjà traités.
On suppose $0 < d < n$. Le lemme 3.2.11 nous donne :

$$d(\Lambda(S)) = \frac{1}{N(\alpha)} d(\Lambda(X_1, \ldots, X_d)).$$

On applique maintenant le lemme 3.2.10 :

$$\begin{aligned} d(\Lambda(S)) &= \frac{1}{N(\alpha)} \Delta^d \prod_{j=1}^{p} D(X_1^{(j)}, .., X_d^{(j)}) \\ &= \Delta^d H_{F_E}(S^d) \text{ d'après la remarque 3.2.2.} \end{aligned}$$

■

3.3 Existence de certains sous-espaces

Sauf mention contraire, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

Lemme 3.3.1. *Soit $\beta \in \mathbb{K}$. On rappelle que $\rho(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \left(\xi_1^{[1]}, .., \xi_1^{[p]}, .., \xi_n^{[1]}, .., \xi_n^{[p]}\right)$.*
Alors il existe $c_2 > 0$ qui dépend seulement de β, n et $\mathbb{K}$ tel que :

$$\forall\, X \in \mathbb{K}^n, \|\rho(\beta X)\| \leq c_2 \|\rho(X)\|.$$

Preuve. On écrit $X = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.
Alors $\|\rho(X)\|^2 = \sum_{i,j} |\xi_j^{[i]}|^2$ et donc :

$$|\xi_j^{(i)}|^2 = \mathrm{Re}(\xi_j^{(i)})^2 + \mathrm{Im}(\xi_j^{(i)})^2 \leq \|\rho(X)\|^2.$$

D'un autre côté :

$$\begin{aligned} |(\beta\xi_j)^{[i]}|^2 &\leq |(\beta\xi_j)^{(i)}|^2 \\ &\leq |\beta^{(i)}|^2 \cdot |\xi_j^{(i)}|^2. \end{aligned}$$

En posant $c_2 = \sqrt{np \sup_i(|\beta^{(i)}|)}$ on a :

$$\|\rho(\beta X)\|^2 \leq c_2^2 \|\rho(X)\|^2.$$

■

Théorème 3.3.2. *Soit S^d un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ de dimension d. Alors il existe $c_1 > 0$ ne dépendant que de n et $\mathbb{K}$.*

(a) Soit $0 \leq d < e \leq n$. Alors S est contenu dans un sous-espace S^e de dimension e tel que :

$$H(S^e) \leq c_1 H(S^d)^{\frac{n-e}{n-d}}.$$

(b) Soit $0 \leq f < d \leq n$. Alors S contient un sous-espace S^f de dimension f tel que :

$$H(S^f) \leq c_1 H(S^d)^{\frac{f}{d}}.$$

Preuve. • Cas (a). Il suffit de traiter le cas $e = d + 1$, le reste suivant par récurrrence.
$\Lambda(S)$ est un réseau de $\mathbb{R}^{np}$ de rang pd. Par définition de la hauteur, $d(\Lambda(S)) = \Delta^d H(S^d)$.
Soit $E^{p(n-d)} = \mathrm{Vect}(\Lambda(S))^{\perp}$ l'orthogonal de $\Lambda(S)$, on note π la projection orthogonale de $\mathbb{R}^{np}$ sur $E^{p(n-d)}$ et $\Lambda' = \pi(\Lambda(\mathbb{K}^n))$. Alors Λ' est un réseau de déterminant :

$$d(\Lambda') = \frac{d(\Lambda(\mathbb{K}^n))}{d(\Lambda(S^d))} = \Delta^{n-d} H(S^d)^{-1}.$$

En effet, on peut écrire $\Lambda(\mathbb{K}^n) = \pi(\Lambda(\mathbb{K}^n)) \overset{\perp}{\bigoplus} (\Lambda(\mathbb{K}^n) \cap \mathrm{Vect}(\Lambda(S)))$ et donc, d'après le lemme 2.4.6, $d(\Lambda(\mathbb{K}^n)) = d(\pi(\Lambda(\mathbb{K}^n))) d(\Lambda(\mathbb{K}^n) \cap \mathrm{Vect}(\Lambda(S)))$ et on a $\Lambda(\mathbb{K}^n) \cap \mathrm{Vect}(\Lambda(S)) = \Lambda(S)$.
Pour m entier, on note $V(m)$ le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^m$. Le volume de la boule de centre 0 et de rayon ρ dans $\mathbb{R}^{p(n-d)}$ est donc $V(p(n-d))\rho^{p(n-d)}$.
On choisit ρ suffisamment grand pour que $V(p(n-d))\rho^{p(n-d)} > 2^{p(n-d)} \Delta^{n-d} H(S^d)^{-1}$, alors par le théorème de Minkowski (théorème 2.3.1), il existe $0 \neq g' \in \Lambda' \cap \overline{B(0, \rho)}$.
On a donc :

$$\|g'\| \leq c_3 H(S^d)^{\frac{-1}{p(n-d)}},$$

avec c_3 ne dépendant que de $n, d, e, \mathbb{K}$.
On écrit $g' = \pi(g)$ avec $g \in \Lambda(\mathbb{K}^n) \setminus \mathrm{Vect}(\Lambda(S))$. Et donc $g = \rho(X)$ avec $X \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n \setminus S$.
On a donc ce qu'il faut pour construire notre espace $S^e = S^{d+1}$:

$$S^{d+1} = S \oplus \mathrm{Vect}(X)$$

S^{d+1} est bien un espace de dimension $d + 1$, montrons qu'il convient :
Soit (β_i) une base intégrale de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{Q}$. On pose $G_i = \rho(\beta_i X)$. Le réseau $\Lambda(S^{d+1})$ contient alors le réseau Λ^* engendré par $\Lambda(S^d)$ et les G_i. On va montrer que :

$$d(\Lambda^*) \leq c_4 H(S^d)^{\frac{n-d-1}{n-d}},$$

et on pourra conclure car $H(S^{d+1}) = \Delta^{d+1} d(\Lambda(S^{d+1})) \leq c d(\Lambda^*)$.
On sait que $g - g' \in \mathrm{Vect}(\Lambda(S^d))$. On a $\rho(S^d)$ dense dans $\mathrm{Vect}(\rho(S^d))$ (car $\rho(S^d)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel). Donc en particulier $\rho(S^d)$ dense dans $\mathrm{Vect}(\Lambda(S^d))$, il existe alors $X^* \in S^d$ tel que

$$\|\rho(X^*) - (g - g')\| \leq c_3 H(S^d)^{\frac{-1}{p(n-d)}}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\|\rho(X-X^*)\| &= \|g-\rho(X^*)\| \\ &\le \|\rho(X^*)-(g-g')\|+\|g'\| \\ &\le 2c_3 H(S^d)^{\frac{-1}{p(n-d)}}.\end{aligned}$$

On pose $X_0 = X - X^*$, et par le lemme 3.3.1 on a :

$$\|\rho(\beta_j X_0)\| \le c_5 H(S^d)^{\frac{-1}{p(n-d)}}.$$

Or $\rho(\beta_j X_0) = G_j - \rho(\beta_j X^*)$ et $\rho(\beta_j X^*) \in \Lambda(S^d)$. Donc si $G'_j = \pi(G_j)$:

$$\|G'_j\| = \|\pi(G_j)\| \le c_5 H(S^d)^{\frac{-1}{p(n-d)}}.$$

On utilise ces projections pour calculer $d(\Lambda^*)$; soit $H_1, \dots, H_{pd}$ une base de $\Lambda(S^d)$ alors :

$$\begin{aligned}d(\Lambda^*) &= D(H_1,\dots,H_{pd},G'_1,\dots,G'_p) \text{ par les propriétés du déterminant généralisé} \\ &\le D(H_1,\dots,H_{pd})\|G'_1\|\dots\|G'_p\| \\ &\le \Delta^d H(S^d) c_5 H(S^d)^{\frac{-1}{(n-d)}} \\ &= c_4 H(S^d)^{\frac{n-d-1}{n-d}}.\end{aligned}$$

• Cas (b). On raisonne ici par dualité en posant $T^{n-d} = (S^d)^\perp$.
Par le cas (a) il existe T^{n-f} tel que :

$$H(T^{n-f}) \le c_1 H(T^{n-d})^{\frac{f}{d}} = c_1 H(S^d)^{\frac{f}{d}}.$$

On pose alors $S^f = (T^{n-f})^\perp$.

■

3.4 Nombre de sous-espaces de hauteur $\le H$

Lemme 3.4.1. *Pour S sous-espace de $\mathbb{K}^n$ on a $H(S) \ge 1$.*
De plus il y a exactement $\binom{n}{d}$ espaces S^d de dimension d dans $\mathbb{K}^n$ tels que $H(S^d) = 1$ (ce sont ceux engendrés par d vecteurs de la base canonique).

Preuve. Soit $(X_1, \dots, X_d)$ une base de S. On note (η_i) les coordonnées de Grassmann associées à S, $N = \binom{n}{d}$ et $A^{(j)} = (X_1^{(j} \mid \dots \mid X_d^{(j)})$. Avec $\alpha = \alpha(X)$ comme dans la définition 3.1.5, on a :

$$\begin{aligned}H^2(S) &= \frac{1}{N(\alpha)^2}\prod_{j=1}^{p} D^2(X_1^{(j)},\dots,X_d^{(j)}) \\ &= \frac{1}{N(\alpha)^2}\prod_{j=1}^{p}\sum_{K\in P(d,n)} |\det(A^{(j)}_{\underline{1},K})|^2 \\ &= \frac{1}{N(\alpha)^2}\prod_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{N} |\eta_k^{(j)}|^2 \\ &\ge \frac{1}{N(\alpha)^2}\sum_{k=1}^{N} |\prod_{j=1}^{p}\eta_k^{(j)}|^2 \\ &= \frac{1}{N(\alpha)^2}\sum_{k=1}^{N} N(\eta_k)^2.\end{aligned}$$

Or α est engendré par les η_k donc $N(\alpha) \le N(\eta_k)$ (si $\eta_k \ne 0$) et on a alors $H(S) \ge 1$.
On a de plus $H(S) = 1$ si et seulement si tous les η_k sont nuls sauf un.
Pour un tel $N-$uplet $(\eta_1, \dots, \eta_N)$, on note η_i la coordonnée non nulle. On peut la supposer égale à 1 d'après la propriété 2.2.2. En associant à i l'unique $I \in P(d,n)$ lui correspondant par l'ordre lexicographique, on obtient que $S = \mathrm{Vect}(e_j \mid j \in I)$.

■

Définition 3.4.2. On note $N(n, d, \mathbb{K}, H)$ ou $N(d, H)$ si il n'y a pas d'ambiguité, le nombre de sous-espaces de $\mathbb{K}^n$ de dimension d et de hauteur inférieure ou égale à H.

Théorème 3.4.3. *Soit $H \geq 1$. Il existe des constantes c_6 et c_7 strictement positives, ne dépendant que de n, d et $\mathbb{K}$ telles que :*

$$c_6 H^n \leq N(d, H) \leq c_7 H^n.$$

Ce théorème se base sur un théorème fort de Schanuel [9] :

Théorème 3.4.4 (Schanuel)**.** *Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres de degré p sur $\mathbb{Q}$. Alors le nombre de points de $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{K})$ de hauteur au plus B est :*

$$\frac{\kappa_m}{\zeta_{\mathbb{K}}(m)} B^m + \mathcal{O}(B^{m-\frac{1}{p}}) \text{ avec } \kappa_m \text{ ne dépendant que de } \mathbb{K} \text{ et } m.$$

Si $m = 2$ et $p = 1$ alors le terme d'erreur est remplacé par $\mathcal{O}(B \log(B))$ et $\kappa_2 = 2$.

Preuve. On ne fera pas ici la démonstration de ce théorème, voir [9] pour les détails.
On démontre cependant cette formule pour le cas particulier $m = 2$ et $p = 1$ (c'est à dire $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$). Cette preuve fait appel à des outils d'arithmétique élémentaires.
On considère la hauteur suivante sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$:

Pour $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$, on écrit $x = [x_0 : \ldots : x_n]$ avec les x_i entiers et $\mathrm{pgcd}(x_i) = 1$, alors $H(x) = \max_{i=0}^{n} |x_i|$.

On se place donc dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ et on cherche à évaluer :

$$N(B) = \#\big\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0) \mid |x| \leq B, |y| \leq B, \mathrm{pgcd}(x, y) = 1\big\}$$

On pose :

$$\begin{aligned} M(B) &= \#\big\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0) \mid |x| \leq B, |y| \leq B\big\} \\ &= (2\lfloor B \rfloor + 1)^2 - 1 \\ &= 4B^2 + \mathcal{O}(B). \end{aligned}$$

Alors on remarque que :

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0) \mid |x| \leq B, |y| \leq B\big\} = \bigsqcup_{1 \leq d \leq \lfloor B \rfloor} \big\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0) \mid |x| \leq B, |y| \leq B, \mathrm{pgcd}(x, y) = d\big\}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$M(B) = \sum_{1 \leq d \leq \lfloor B \rfloor} N\left(\frac{B}{d}\right).$$

Or on a clairement $N(B) = 0$ pour $B \in]0, 1[$ et $d \mapsto 1$ est complètement multiplicative d'inverse μ (pour la convolution de Dirichlet) où μ est la fonction de Möbius. Par la formule d'inversion de Möbius généralisée (théorème 2.23 de [1]) :

$$\begin{aligned} N(B) &= \sum_{1 \leq d \leq \lfloor B \rfloor} \mu(d) M\left(\frac{B}{d}\right) \\ &= \sum_{1 \leq d \leq \lfloor B \rfloor} \mu(d) \left(4\frac{B^2}{d^2} + \mathcal{O}\left(\frac{B}{d}\right)\right) \\ &= 4B^2 \sum_{1 \leq d \leq \lfloor B \rfloor} \frac{\mu(d)}{d^2} + \mathcal{O}\left(\sum_{1 \leq d \leq \lfloor B \rfloor} \frac{|\mu(d)| B}{d}\right). \end{aligned}$$

On étudie ces deux termes :

$$\sum_{1 \leq d \leq \lfloor B \rfloor} \frac{|\mu(d)| B}{d} \leq \sum_{1 \leq d \leq \lfloor B \rfloor} \frac{B}{d} \leq B \log(B)$$

et :

$$
\begin{aligned}
4B^2 \sum_{1\leq d\leq \lfloor B\rfloor} \frac{\mu(d)}{d^2} &= 4B^2 \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d\geq \lfloor B\rfloor} \frac{\mu(d)}{d^2} \right) \\
&= 4B^2 \left(\frac{1}{\zeta(2)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{B}\right)\right).
\end{aligned}
$$

On recolle alors nos deux termes :

$$
N(B) = \frac{4B^2}{\zeta(2)} + \mathcal{O}(B) + \mathcal{O}(B\log(B)).
$$

Le nombre d'éléments de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ de hauteur inférieure à B est $\frac{N(B)}{2}$ (car on a compté deux fois les termes $[x:y] = [-x:-y]$), ce qui conclut le cas $m = 2$ et $p = 1$.

■

Le théorème de Schanuel nous donne le cas $d = 1$ (et donc le cas $d = n-1$ par dualité) du théorème 3.4.3. On prouve le reste du théorème par récurrence sur d : montante pour la majoration et descendante pour la minoration.

4 Angles d'inclinaison entre deux espaces

4.1 Produits scalaires successifs

Dans cette partie U^n désigne un espace hermitien de dimension n. Cependant les résultats s'appliquent aussi au cas euclidien.

Définition 4.1.1. Soit X et Y vecteurs non nuls de U^n. On définit alors :

$$\lambda(X,Y) = \frac{|\langle X,Y\rangle|}{\|X\| \cdot \|Y\|}.$$

Remarque 4.1.2. On a $\lambda(X,Y) \leq 1$ par Cauchy-Schwarz.

Théorème 4.1.3. *Soit A^d et B^e des sous-espaces de U^n. On note $f = min(d,e)$*
Il existe alors $X_1,..,X_d$ base orthonormale de A^d, $Y_1,..,Y_e$ base orthonormale de B^e et $1 \geq \lambda_1 \geq .. \geq \lambda_f \geq 0$ tels que :

$$\langle X_i, Y_j\rangle = \lambda_i \delta_{ij} \text{ pour tous } i,j \in [\![1,f]\!].$$

Preuve. On va construire les λ_k, X_i et Y_j par récurrence.
Soit $\lambda_1 = \max\limits_{\substack{X\in A\setminus\{0\}\\ Y\in B\setminus\{0\}}} \lambda(X,Y)$. Ce max est atteint pour $X_1 \in A$ et $Y_1 \in B$ qu'on peut supposer de norme 1.
Si $f > 1$ alors on définit A^{d-1} et B^{e-1} comme respectivement l'orthogonal de Vect(X_1) dans A^d et l'orthognal de Vect(Y_1) dans B^e.
Soit $X \in A^{d-1}$ de norme 1 et $\varepsilon \in \mathbb{C}$. On pose $X_\varepsilon = X_1 + \varepsilon X$. Alors $\|X_\varepsilon\| = \sqrt{1+|\varepsilon|^2}$ par orthogonalité et :

$$\begin{aligned}
\lambda(X_\varepsilon, Y_1) &= \frac{|\langle X_1, Y_1\rangle + \varepsilon\langle X, Y_1\rangle|}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} \\
&= \frac{|\lambda_1 + \varepsilon\langle X, Y_1\rangle|}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} \\
&= |\lambda_1 + \varepsilon\langle X, Y_1\rangle| + O_0(\varepsilon^2) \text{ en faisant le developpement limité de} \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \text{ en 0.}
\end{aligned}$$

Si $\langle X, Y_1\rangle \neq 0$, il existerait un $\varepsilon \neq 0$ tel que $\lambda(X_\varepsilon, Y_1) > \lambda_1$. Cela est contradictoire avec la définition de λ_1.
Donc $\langle X, Y_1\rangle = 0$ c'est-à-dire $X \perp Y_1$.
On a donc A^{d-1} orthogonal à Y_1. De la même façon, on montre que B^{e-1} est orthogonal à X_1.
On continue :

$$\lambda_2 = \max_{\substack{X\in A^{d-1}\setminus\{0\}\\ Y\in B^{e-1}\setminus\{0\}}} \lambda(X,Y).$$

De la même manière on trouve $X_2 \in A^{d-1}$ et $Y_2 \in B^{e-1}$ de norme 1 tel que $\lambda(X_2, Y_2) = \lambda_2$.
On a bien $\langle X_1, Y_2\rangle = \langle X_2, Y_1\rangle = 0$.
Par récurrence on trouve une famille orthonormale $(X_1,..,X_f)$ dans A^d et une famille orthonormale $(Y_1,..,Y_f)$ dans B^e tels que $\langle X_i, Y_j\rangle = \lambda_i\delta_{ij}$.
Si $d < f$ ou $e < f$ on complète ces familles en des bases orthonormées de A^d et B^e.

■

Propriété 4.1.4. *Les λ_k sont indépendants du choix des bases orthonormales $\{X_i\}$ et $\{Y_j\}$ et sont invariants par transformation unitaire appliquée simultanément à A et B.*

Preuve. Soit $X_1,..,X_d$ une base orthonormale de A^d et $Y_1,..,Y_e$ une base orthonormale de B^e.
On définit les matrices :

$$M(X) = (\langle X_i, X_j\rangle)_{i,j\in[\![1,d]\!]} \ , \ M(Y) = (\langle Y_i, Y_j\rangle)_{i,j\in[\![1,e]\!]} \ , \ M(X,Y) = (\langle X_i, Y_j\rangle)_{\substack{i\in[\![1,d]\!]\\ j\in[\![1,e]\!]}} \text{ et } M(Y,X) = {}^tM(X,Y).$$

Soit $p(\lambda) = D(X_1,..,X_d)^{-2} D(Y_1,..,Y_e)^{-2} \begin{vmatrix} \lambda M(X) & M(X,Y) \\ M(Y,X) & \lambda M(Y) \end{vmatrix}$ qui est un polynôme en λ.
• On montre que p est invariant par changement des bases X et Y.
Soit X'_i une base orthonormale de A et Y'_j une base orthonormale de B. On fixe par ailleurs une base de U^n qui nous permet de voir les X_i, X'_i, Y_j et Y'_j comme des vecteurs colonnes de $\mathbb{C}^n$. Il existe $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ tels que $X'_i = PX_i$ et $Y'_j = QY_j$.

Si on écrit M_X la matrice dont les colonnes sont les vecteurs X_i, on a $M_{X'} = PM_X$.
De plus on a $M(X,Y) = M_X M_Y^*$.
On montre alors que

$$\begin{aligned} M(X',Y') &= PM_X M_Y^* Q^* = PM(X,Y)Q^* \\ M(X') &= PM(X)P^* \\ M(Y') &= QM(Y)Q^* \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} \lambda M(X') & M(X',Y') \\ M(Y',X') & \lambda M(Y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda M(X) & M(X,Y) \\ M(Y,X) & \lambda M(Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^* & 0 \\ 0 & Q^* \end{pmatrix}$$

On peut maintenant calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} \lambda M(X') & M(X',Y') \\ M(Y',X') & \lambda M(Y') \end{vmatrix} = \det(P)\det(Q) \begin{vmatrix} \lambda M(X) & M(X,Y) \\ M(Y,X) & \lambda M(Y) \end{vmatrix} \det(P)\det(Q).$$

Par ailleurs, la définition du déterminant généralisé donne :

$$D(X_1',..,X_d') = \det(P)^2 D(X_1,..,X_d),$$

ce qui permet de conclure que p est invariant par changement de bases de A et de B. On note donc $p(\lambda) = p(\lambda, A, B)$.
• Soit τ une transformation unitaire.
On sait que τ laisse invariant le produit scalaire, donc les matrices $M(X,Y), M(Y,X), M(X)$ et $M(Y)$ ne changent pas quand on applique τ à A et B (donc aux X_i et Y_j) simultanément.
De plus, $D(\tau X_1, \ldots, \tau X_d) = D(X_1, \ldots, X_d)$ par la propriété 2.4.3. On a donc bien :

$$p(\lambda, A, B) = p(\lambda, \tau A, \tau B).$$

• On utilise les bases X et Y construites dans le théorème 4.1.3 et on note $h = \max(d,e)$:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_d & (\lambda_i \delta_{ij}) \\ (\lambda_j \delta_{ji}) & \lambda I_e \end{vmatrix}.$$

Et alors $p(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda_1^2)\ldots(\lambda^2 - \lambda_f^2)\lambda^{h-f}$ par des manipulations classiques sur le déterminant.
Les racines non nulles de $p(\lambda)$ déterminent alors les λ_i et leur unicité.

■

Les $\lambda_1, \ldots, \lambda_f$ sont appelés **produits scalaires successifs** de A et B.
Pour S un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ et $X \neq 0 \in \mathbb{K}^n$, on pose $\lambda(X,S) = \lambda_1(\mathrm{Vect}(X), S)$.
On fournit aussi une autre interprétation des produits scalaires successifs :

Lemme 4.1.5. *Soit A^d et B^e des sous-espaces de U^n.*
Alors λ_i est le plus grand réel λ tel que :

Il existe un espace $A^i \subset A^d, \forall\, X \in A^i \setminus \{0\}, \exists Y \in B^e \setminus \{0\}, \lambda(X,Y) \geq \lambda$.

Preuve. Soit λ_i' défini comme le plus grand réel λ tel que :

Il existe un espace $A^i \subset A^d, \forall\, X \in A^i \setminus \{0\}, \exists Y \in B^e \setminus \{0\}, \lambda(X,Y) \geq \lambda$.

On raisonne par double inégalité.
$\boxed{\lambda_i \leq \lambda_i'}$ Soit X_j et Y_k les bases données par le théorème 4.1.3.

On pose $A^i = \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_i)$. Soit $X = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j X_j \in A^i$.

On pose $Y = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j Y_j \in B^e$. Et alors :

$$\lambda(X,Y) = \frac{\left| \sum_{j=1}^{i} |\alpha_j|^2 \lambda_j \right|}{\|X\| \cdot \|Y\|} \geq \frac{\lambda_i \sum_{j=1}^{i} |\alpha_j|^2}{\sum_{j=1}^{i} |\alpha_j|^2} = \lambda_i.$$

λ_i respecte donc la condition d'inégalité et donc $\lambda_i \leq \lambda'_i$
$\boxed{\lambda'_i \leq \lambda_i}$ On garde les mêmes bases X_j et Y_k.
Soit $A^i \subset A^d$ de dimension i.
On a $A^i \cap \mathrm{Vect}(X_i, \dots, X_d) \neq \{0\}$ car la somme de leurs dimensions est $i + d - i + 1 = d + 1$ et ils sont tous deux inclus dans A^d de dimension d.
Soit alors $X \in A^i \cap \mathrm{Vect}(X_i, \dots, X_d)$ de norme 1.
Soit $Y = \sum_k \beta_k Y_k \in B^e$.
Alors :

$$\begin{aligned}
\lambda(X, Y) &= \frac{|\langle X, Y \rangle|}{\|Y\|} \\
&= \frac{\left| \sum_{j=i}^{f} \alpha_j \overline{\beta_j} \lambda_j \right|}{\|Y\|} \\
&=\leq \lambda_i \frac{\sum_{j=i}^{f} |\alpha_j| \cdot |\beta_j|}{\|Y\|} \\
&\leq \lambda_i \frac{\|X\| \cdot \|Y\|}{\|Y\|} \text{ par Cauchy-Schwarz} \\
&= \lambda_i.
\end{aligned}$$

Et donc $\lambda'_i \leq \lambda_i$.

■

Avec cette caractérisation on en déduit facilement le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.6. *Soit $A' \subset A$ et $B' \subset B$.*
Alors :

$$f' = f(A', B') \leq f = f(A, B)$$
$$\lambda_i(A', B') \leq \lambda_i(A, B) \text{ pour } i \in [\![1, f']\!].$$

4.2 Quantités $\nu_1, .., \nu_t$

Soit A^d et B^e deux sous-espaces de U^n. Si $d + e > n$ alors $A^d \cap B^e$ est de dimension supérieure ou égale à $d + e - n$ et alors $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{d+e-n} = 1$.
On pose $g = d + e - n$ et $t = \min(d, e, n - d, n - e) = \min(d, e, e - g, d - g)$.

Définition 4.2.1. Si $d + e \leq n$ alors $t = f$ et on définit $\forall\, i \in [\![1, t]\!], \nu_i = \lambda_i(A^d, B^e)$.
Si $d + e > n$ alors $t = f - g$ et on définit $\forall\, i \in [\![1, t]\!], \nu_i = \lambda_{i+g}(A^d, B^e)$.

On définit une relation d'équivalence sur les paires d'espaces A, B. On dit que deux paires d'espaces A^d, B^e et $A^{*,d}, B^{*,e}$ sont similaires si il existe τ transformation unitaire tel que :

$$\tau(A) = A^* \text{ et } \tau(B) = B^*.$$

On remarque que deux paires d'espaces similaires définissent les mêmes ν_i.

Théorème 4.2.2. *Soit $e, d \in]\!]0, n[\![$ et $0 \leq \nu_t \leq \ldots \leq \nu_1 \leq 1$. Alors il existe A^d, B^e uniques à similarité près tels que :*

$$\nu_i(A^d, B^e) = \nu_i.$$

Preuve.
• Existence. On peut supposer $d \leq e$ et on note $E_1, \dots, E_n$ une base orthonormale de U^n.
Cas $d + e \leq n$:
Alors $t = d$ et on pose pour $i \leq d$, $\omega_i = \sqrt{1 - \nu_i^2}$. On pose alors :

$$\begin{aligned}
X_i &= E_i \text{ pour } 1 \leq i \leq d \\
Y_i &= \nu_i E_i + \omega_i E_{d+i} \text{ pour } 1 \leq i \leq d \\
Y_i &= E_{d+i} \text{ pour } d + 1 \leq i \leq e.
\end{aligned}$$

On peut alors vérifier que les espaces $A^d = \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_d)$ et $B^e = \mathrm{Vect}(Y_1, \ldots, Y_e)$ conviennent.
Cas $d + e > n$:
Alors $t = n - e$. On pose $\lambda_1 = \ldots = \lambda_g = 1$ et $\lambda_{g+i} = \nu_i$ pour $1 \leq i \leq t$.
On pose $\omega_i = \sqrt{1 - \lambda_i^2}$ et :

$$\begin{aligned}
&X_i = E_i \text{ pour } 1 \leq i \leq d \\
&Y_j = E_j \text{ pour } 1 \leq j \leq g \\
&Y_j = \lambda_j E_j + \omega_j E_{n-e+j} \text{ pour } g+1 \leq j \leq d \\
&Y_j = E_{n-e+j} \text{ pour } d+1 \leq i \leq e.
\end{aligned}$$

Les espaces A^d et B^e correspondants conviennent.
• Unicité. On peut toujours supposer $d \leq e$ et on suppose que l'on $\lambda_i(A^d, B^e) = \lambda_i(A^{*,d}, B^{*,e})$. On pose X_i, Y_j et X_i^*, Y_j^* leurs bases correspondantes du théorème 4.1.3.
Soit $Z = \sum \alpha_i X_i + \sum \beta_j Y_j$ et $Z^* = \sum \alpha_i X_i^* + \sum \beta_j Y_j^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
Z = 0 &\Longleftrightarrow \forall\, i, j, \langle Z, X_i \rangle = 0 \text{ et } \langle Z, Y_j \rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \forall\, i, j, \langle Z^*, X_i^* \rangle = 0 \text{ et } \langle Z^*, Y_j^* \rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow Z^* = 0
\end{aligned}$$

On pose $\tau(Z) = Z^*$. Alors τ est injective sur $A + B$

$\tau(A) = A^*, \tau(B) = B^*$

τ peut se prolonger en une application unitaire de U^n car elle préserve le produit scalaire.

■

Théorème 4.2.3. *Soit $A, B \subset U^n$. On note $A^\perp, B^\perp$ leur orthogonal. Alors $t(A, B) = t(A^\perp, B^\perp)$ et :*

$$\textit{Pour tout } 1 \leq i \leq t, \nu_i(A, B) = \nu_i(A^\perp, B^\perp).$$

4.3 Angles d'inclinaison

Définition 4.3.1. Soit X, Y deux vecteurs non nuls de U^n. On définit $\omega(X, Y) = \sqrt{1 - \lambda^2(X, Y)}$.

Propriété 4.3.2. $\omega(X, Z) \leq \omega(X, Y) + \omega(Y, Z)$.

Preuve. Soit X, Y, Z des vecteurs de U^n qu'on suppose de norme 1. Si $X = uZ$ alors le résultat est clair.
On suppose donc que (X, Z) est libre et on note $V = \mathrm{Vect}(X, Z)$ et π la projection orthogonale sur V.
Alors :

$$\lambda(X, Y) = \frac{|\langle X, Y \rangle|}{\|X\| \cdot \|Y\|} = \frac{|\langle X, \pi(Y) \rangle|}{\|X\| \cdot \|Y\|} \leq \frac{|\langle X, \pi(Y) \rangle|}{\|X\| \cdot \|\pi(Y)\|} = \lambda(X, \pi(Y)).$$

Cela nous donne $\omega(X, Y) \geq \omega(X, \pi(Y))$ et de même $\omega(Z, Y) \geq \omega(Z, \pi(Y))$. On démontre alors le résultat pour $Y \in V$ ce qui nous place dans un plan et nous permet alors de considérer plus facilement les angles.
On écrit $V = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ avec (e_1, e_2) orthonormée et $e_1 = X$. On écrit :

$$Y = y_1 e_1 + y_2 e_2 \text{ et } Z = z_1 e_1 + z_2 e_2.$$

Comme $\|Y\| = 1$ on a $|y_1|^2 + |y_2|^2 = 1$, on peut donc écrire $|y_1| = \cos(u_y)$ et $|y_2| = \sin(u_y)$.
De même on pose $|z_1| = \cos(u_z)$ et $|z_2| = \sin(u_z)$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\omega(X, Z) &= \sqrt{1 - |\cos(u_z)|^2} = |\sin(u_z)|, \\
\omega(X, Y) &= \sqrt{1 - |\cos(u_y)|^2} = |\sin(u_y)|.
\end{aligned}$$

On calcule $\lambda(Y, Z)$:

$$\begin{aligned}
\lambda(Y, Z) &= |y_1 \bar{z_1} + y_2 \bar{z_2}| \\
&\leq \cos(u_y)\cos(u_z) + \sin(u_y)\sin(u_z) \\
&= \cos(u_z - u_y),
\end{aligned}$$

ce qui nous donne $\omega(Y, Z) = \sqrt{1 - \lambda(Y, Z)^2} \geq \sqrt{1 - \cos(u_z - u_y)^2} = |\sin(u_z - u_y)|$.
Or $|\sin(u)| \leq |\sin(u - v)| + |\sin(v)|$ et on conclut.

■

Définition 4.3.3. Soit A^d, B^e deux sous espaces de U^n. $f = \min(d,e) > 0$, $t = \min(d,e,n-d,n-e)$.
Pour $i \in [\![1,f]\!]$, on pose $\omega_i(A^d,B^e) = \sqrt{1-\lambda_i^2(A^d,B^e)}$.
Pour $j \in [\![1,t]\!]$, on pose $\psi_j(A^d,B^e) = \sqrt{1-\nu_j^2(A^d,B^e)}$.
On pose $\mu(A^d,B^e) = \psi_1(A^d,B^e)\dots\psi_t(A^d,B^e)$.

Les quantités $\psi_1(A^d,B^e),\dots,\psi_t(A^d,B^e)$ sont appelées **angles d'inclinaison** entre A^d et B^e.

Remarque 4.3.4. Si X est un vecteur non nul, on pose $\omega(X,B) = \omega(\mathrm{Vect}(X),B)$.
On a $\omega^2(X,B)+\omega^2(X,B^\perp) = 1$ ou de manière équivalente $\lambda^2(X,B)+\lambda^2(X,B^\perp) = 1$.

Propriété 4.3.5. *Soit A^d, B^e deux sous espaces de U^n. On note $X_1,\dots,X_d$ et $Y_1,\dots,Y_e$ des bases respectives de A^d et B^e. Alors :*

$$\mu(A^d,B^e) = \frac{D(X_1,\dots,X_d,Y_1,\dots,Y_e)}{D(X_1,\dots,X_d)D(Y_1,\dots,Y_e)}.$$

Preuve. On calcule $p(1)$ avec $p(\lambda) = (\lambda^2-\lambda_1^2)\dots(\lambda^2-\lambda_f^2)\lambda^{h-f} = D(X_1,..,X_d)^{-2}D(Y_1,..,Y_e)^{-2}\begin{vmatrix}\lambda M(X) & M(X,Y)\\ M(Y,X) & \lambda M(Y)\end{vmatrix}$ le polynome défini dans la preuve de la propriété 4.1.4 avec (λ_k) les produits scalaires successifs associés à X_i, Y_j.
D'un côté on a :

$$\begin{aligned}p(1) &= \psi_1^2(A^d,B^e)\dots\psi_f^2(A^d,B^e)\\ &= \mu^2(A^d,B^e).\end{aligned}$$

De l'autre :

$$\begin{aligned}p(1) &= D(X_1,..,X_d)^{-2}D(Y_1,..,Y_e)^{-2}\begin{vmatrix} M(X) & M(X,Y)\\ M(Y,X) & M(Y)\end{vmatrix}\\ &= D(X_1,..,X_d)^{-2}D(Y_1,..,Y_e)^{-2}D(X_1,\dots,X_d,Y_1,\dots,Y_e)^2 \text{ par définition du déterminant généralisé.}\end{aligned}$$

Cela nous donne la propriété. ■

Lemme 4.3.6. *Soit $d,e \in]\!]0,n[\![$, $f = \min(d,e)$. Soit $\sigma \in GL_n(U)$.*
Il existe alors $c = c(\sigma) > 0$ tel que :

$$\textit{Pour tout } A^d, B^e,\ \omega_i(\sigma(A^d),\sigma(B^e)) \leq c\,\omega_i(A^d,B^e).$$

Preuve. Il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que pour tout X on ait :

$$c_1\|X\| \leq \|\sigma(X)\| \leq c_2\|X\|.$$

Soit X, Y unitaires tel que $\langle X,Y\rangle \geq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\omega^2(X,Y) &= (1-\langle X,Y\rangle)(1+\langle X,Y\rangle)\\ &\geq (1-\langle X,Y\rangle)\\ &= \frac{1}{2}\|X-Y\|^2.\end{aligned}$$

D'un autre coté on a :

$$\begin{aligned}\omega^2(\sigma(X),\sigma(Y)) &= 1-\frac{|\langle\sigma(X),\sigma(Y)\rangle|^2}{\|\sigma(X)\|^2\cdot\|\sigma(Y)\|^2}\\ &= \frac{\|\sigma(X)\|^2\cdot\|\sigma(Y)\|^2-|\langle\sigma(X),\sigma(Y)\rangle|^2}{\|\sigma(X)\|^2\cdot\|\sigma(Y)\|^2}\end{aligned}$$

Or :

$$0 \leq |\langle\sigma(X),\sigma(Y)\rangle|^2 - 2|\langle\sigma(X),\sigma(Y)\rangle|\cdot\|\sigma(X)\|\cdot\|\sigma(Y)\| + \|\sigma(X)\|^2\cdot\|\sigma(Y)\|^2,$$

et on en déduit :

$$\|\sigma(X)\|^2\cdot\|\sigma(Y)\|^2 - |\langle\sigma(X),\sigma(Y)\rangle|^2 \leq 2\|\sigma(X)\|^2\cdot\|\sigma(Y)\|^2 - 2\|\sigma(X)\|\cdot\|\sigma(Y)\||\langle\sigma(X),\sigma(Y)\rangle|$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\omega^2(\sigma(X),\sigma(Y)) &\leq 2\frac{\|\sigma(X)\|^2\cdot\|\sigma(Y)\|^2-\|\sigma(X)\|\cdot\|\sigma(Y)\||\langle\sigma(X),\sigma(Y)\rangle|}{\|\sigma(X)\|^2\cdot\|\sigma(Y)\|^2}\\
&= 2\frac{\|\sigma(X)\|\cdot\|\sigma(Y)\|-|\langle\sigma(X),\sigma(Y)\rangle|}{\|\sigma(X)\|\cdot\|\sigma(Y)\|}\\
&\leq \frac{2}{c_1^2}\left(\|\sigma(X)\|\cdot\|\sigma(Y)\|-|\langle\sigma(X),\sigma(Y)\rangle|\right) \text{ par définition de } c_1 \text{ et car } X,Y \text{ sont unitaires.}
\end{aligned}$$

Or : $-|\langle\sigma(X),\sigma(Y)\rangle| \leq \frac{1}{2}(\|\sigma(X)-\sigma(Y)\|^2-\|\sigma(X)\|^2-\|\sigma(Y)\|^2)$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\omega^2(\sigma(X),\sigma(Y)) &\leq \frac{1}{c_1^2}\|\sigma(X)-\sigma(Y)\|^2+\frac{1}{c_1^2}\left(2\|\sigma(X)\|\cdot\|\sigma(Y)\|-\|\sigma(X)\|^2-\|\sigma(Y)\|^2\right)\\
&\leq \frac{1}{c_1^2}\|\sigma(X-Y)\|^2\\
&\leq \frac{c_2^2}{c_1^2}\|X-Y\|^2\\
&\leq \frac{2c_2^2}{c_1^2}\omega^2(X,Y).
\end{aligned}$$

Par le lemme 4.1.5 on peut définir $\omega_i(A^d,B^e)$ comme le plus petit réel ω tel que :

$$\text{Il existe un espace } A^i\subset A^d, \forall\, X\in A^i\setminus\{0\}, \exists Y\in B^e\setminus\{0\}, \omega(X,Y)\leq\omega.$$

Pour $\sigma(X)\in\sigma(A^i)$ il existe $\sigma(Y)\in\sigma(B^e)$ tel que :

$$\omega(\sigma(X),\sigma(Y))\leq\sqrt{\frac{2c_2^2}{c_1^2}}\omega_i(A^d,B^e)$$

On a donc $\omega(\sigma(A^d),\sigma(B^e))\leq\sqrt{\frac{2c_2^2}{c_1^2}}\omega_i(A^d,B^e)$.

■

4.4 Quelques inégalités

Théorème 4.4.1. *Soit A^d et B^e deux sous-espaces de U^n et $i\in[\![1,f]\!]$ avec $f=min(d,e)$ tels qu'il existe $X_1,\dots,X_i\in A^d$ linéairement indépendants de sorte que $A^j=Vect(X_1,\dots,X_i)$ vérifie*

$$\forall\, j,\quad \lambda(X_j,A^{j-1})\leq 1-\delta<1.$$

On suppose de plus qu'il existe $Y_1,\dots,Y_i\in B^e$ non nuls de sorte que $\forall\, j,\omega(X_j,Y_j)\leq w$.

Alors $\omega_i(A^d,B^e)\leq\left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{i}{2}}\omega$.

Preuve. On sait que $\omega_i(A^d,B^e)\leq 1$. On traite donc seulement le cas où $\left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{i}{2}}\omega<1$. On va alors montrer un résultat plus fort que celui du théorème :

$$\text{Pour } j\in[\![1,d]\!], \omega_j(A^j,B^e)\leq\left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{j-1}{2}}\omega.$$

On raisonne par récurrence sur j :
• $j=1$:

$$\begin{aligned}
\omega_1(A^1,B^e) &= \omega_1(\mathrm{Vect}(X_1),B^e)\\
&= \sqrt{1-\lambda_1^2(\mathrm{Vect}(X_1),B^e)}\\
&\leq \sqrt{1-\langle X_1,Y_1\rangle^2}\\
&= \omega(X_1,Y_1)\\
&\leq \omega.
\end{aligned}$$

- $j = 2$:

On a $\omega < \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{i}{2}}$ avec $i \geq j = 2$ et $\delta \leq 1$, donc $\omega < \frac{\delta}{2}$.
On a $\lambda(X_1, X_2) = \lambda(X_2, A^1) \leq 1 - \delta$ et donc :

$$\omega^2(X_1, X_2) \geq 1 - (1-\delta)^2 = \delta(2-\delta) \geq \delta.$$

Par l'absurde on suppose que les vecteurs Y_1 et Y_2 sont linéairement dépendants, on a alors :

$$\begin{aligned}\omega(X_1, X_2) &\leq \omega(X_1, Y_1) + \omega(Y_1, X_2)\\ &\leq \omega(X_1, Y_1) + \omega(Y_1, Y_2) + \omega(Y_2, X_2)\\ &\leq \omega + 0 + \omega\\ &< \delta.\end{aligned}$$

Cela donne $\omega^2(X_1, X_2) < \delta^2 \leq \delta$ ce qui est contradictoire.
Les vecteurs Y_1 et Y_2 sont donc linéairement indépendants. On pose $B^2 = \mathrm{Vect}(Y_1, Y_2)$.
On peut supposer que X_1 et X_2 sont de norme 1. Pour simplifier, on écrit $\omega_j = \omega_j(A^2, B^2)$ et $\lambda_j = \lambda_j(A^2, B^2)$.
On se donne Z_1, Z_2 et W_1, W_2 de A^2 et B^2 données par le théorème 4.1.3.
Soit $X \in A^2$ de norme 1, $X = c_1 Z_1 + c_2 Z_2$ avec $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. On cherche à calculer $\lambda^2(X, B^2)$.
Soit $Y = aW_1 + bW_2 \in B^2$ de norme 1, on remarque que cela nous donne $|a|^2 = 1 - |b|^2$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}\lambda(X, B^2) &= \max_{\|Y\|=1} \lambda(X, Y)\\ &= \max_{\|Y\|=1} |\langle X, Y\rangle|\\ &= \max_{\substack{a,b\in\mathbb{C}\\ |a|^2=1-|b|^2}} |ac_1\lambda_1 + bc_2\lambda_2|\\ &= \max_{\substack{a\in\mathbb{C}\\ |a|\leq 1}} (|ac_1|\lambda_1 + \sqrt{1-|a|^2}|c_2|\lambda_2).\end{aligned}$$

Par une étude classique de fonction on montre que ce maximum est $\lambda(X, B^2) = \sqrt{|c_1|^2\lambda_1^2 + |c_2|^2\lambda_2^2}$.
On pose $\varepsilon = |c_2| = |\langle X, Z_2\rangle|$ et alors $\lambda^2(X, B^2) = (1-\varepsilon^2)\lambda_1^2 + \varepsilon^2\lambda_2^2$.
On arrive enfin à :

$$\begin{aligned}\omega^2(X, B^2) &= 1 - (1-\varepsilon^2)(1-\omega_1^2) - \varepsilon^2(1-\omega_2^2)\\ &= (1-\varepsilon^2)\omega_1^2 + \varepsilon^2\omega_2^2\\ &\geq \varepsilon^2\omega_2^2.\end{aligned}$$

On veut appliquer ces résultats à X_1 et X_2. On écrit $X_j = c_{j1}XZ_1 + c_{j2}Z_2$. On pose ici $\varepsilon = \max(|c_{12}|, |c_{22}|)$.
On peut supposer, quitte à inverser X_1 et X_2, que $\varepsilon = |c_{12}|$.
On a :

$$|c_{j1}|^2 \geq 1 - \varepsilon^2$$

et donc :

$$\begin{aligned}1 - \delta &\geq \lambda(X_1, X_2)\\ &= |c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22}|\\ &\geq |c_{11}c_{21}| - |c_{12}c_{22}|\\ &\geq \min(|c_{11}|, |c_{21}|)^2 - \max(|c_{12}|, |c_{22}|)^2\\ &\geq 1 - 2\varepsilon^2.\end{aligned}$$

De cela on déduit $\varepsilon^2 \geq \frac{\delta}{2}$. Et donc comme $\varepsilon = |c_{12}|$:

$$\begin{aligned}\omega^2 &\geq \omega^2(X_1, B^2)\\ &\geq \varepsilon^2\omega_2^2\\ &\geq \frac{\delta\omega_2^2}{2}.\end{aligned}$$

Ce qui conclut le cas $j = 2$.
• Récurrence. On suppose le résultat vrai pour $j - 1$.
On veut alors montrer, pour $X \in A^j$:

$$\omega(X, B^e) \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{j-1}{2}}.$$

Par hypothèse cela est vrai si $X = X_j$, donc on prend X non liée à X_j. On pose $A_j^2(X) = \mathrm{Vect}(X, X_j)$.
Soit $X_0 \in A_j^2(X) \cap A^{j-1}$ (qui est de dimension 1) :

$$\begin{aligned}
&\lambda(X_j, X_0) \leq 1 - \delta \\
&\omega(X_j, B^e) \leq \omega \\
&\omega(X_0, B^e) \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{j-2}{2}} \omega \text{ par hypothèse de récurrence.}
\end{aligned}$$

Or $\left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{j-2}{2}} \omega = \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{j}{2}} \omega < 1$, on peut donc appliquer le résultat pour $j = 2$ à $A_j^2(X)$ avec $\omega' pg \frac{2}{\delta}^{\frac{j-2}{2}} \omega$ $=$ et on trouve :

$$\omega_2(A_j^2(X), B^e) \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{j-1}{2}} \omega.$$

On conclut car $\omega(X, B^e) \leq \omega_2(A_j^2(X), B^e)$.

■

Corollaire 4.4.2. *Soit A^d, B^e, i, f comme dans le théorème précédant.*
Soit $X_1, .., X_i \in A^d$ et $Y_1, .., Y_i \in B^e$ non nuls tels que :

$$\forall\ 1 \leq j \leq k \leq i, \lambda(X_j, X_k) \leq \frac{1}{4^i} \text{ et } \forall\ 1 \leq j \leq i, \omega(X_j, Y_j) \leq \omega\ .$$

Alors $\omega_i(A^d, B^e) \leq 2^i \omega$.

5 Approximation Diophantienne

Dans cette partie on se place dans l'espace ambiant G^n ; on distingue deux cas :

(a) $G^n = E^n$ un espace euclidien. $\mathbb{K}$ est un corps de nombres réel et on pose $q = 1$.

(b) $G^n = U^n$ un espace hermitien. $\mathbb{K}$ est un corps de nombres complexe non réel et on pose $q = 2$.

Le corps $\mathbb{K}$, sauf mention contraire, est de degré p sur $\mathbb{Q}$. On note $\sigma_1, \ldots, \sigma_p : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{C}$ les plongements de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$. Dans la suite, on suppose que $\sigma_1 = id$. On écrit $p = r_1 + 2r_2$ où r_1 est le nombre de plongements réels et $2r_2$ le nombre de plongements complexes non réels. On note $\delta = \mathrm{disc}(\mathbb{K})$ et $\Delta = 2^{-r_2}\sqrt{|\delta|}$.
Pour $X = (\xi_1, .., \xi_n) \in \mathbb{K}^n$, on rappelle les notations de la partie 3 :

$$\begin{aligned}
&\xi^{(i)} = \sigma_i(\xi), v_i(\xi) = |\xi^{(i)}|,\\
&X^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, .., \xi_n^{(i)}),\\
&\xi^{[i]} = \left\{\begin{array}{ll} \xi^{(i)} & \text{si } 1 \leq i \leq r_1 \\ \mathrm{Re}(\xi^{(i)}) & \text{si } r_1 < i \leq r_1 + r_2 \\ \mathrm{Im}(\xi^{(i)}) & \text{si } r_1 + r_2 < i \leq p \end{array}\right. ,\\
&X^{[i]} = (\xi_1^{[i]}, .., \xi_n^{[i]}),\\
&\rho(X) = (\xi_1^{[1]}, .., \xi_1^{[p]}, .., \xi_n^{[1]}, .., \xi_n^{[p]}).
\end{aligned}$$

5.1 Un théorème basique

Rappel 5.1.1. *On rappelle la définition :*

$$\psi_i(A^d, B^e) = \left\{\begin{array}{ll} \omega_i(A^d, B^e) & si\ d + e \leq n \\ \omega_{i+g}(A^d, B^e) & si\ d + e > n \end{array}\right.$$

où $g = d + e - n$.

Théorème 5.1.2. *Soit $0 < d < n, c = n - d$ et $u = \min(c, d)$.*
Soit A^d un sous espace de G^n de dimension d et $H \geq 1$.
Alors il existe $B^1 \subset B^2 \subset .. \subset B^u \subset G^n$ des sous-espaces vectoriels définis sur $\mathbb{K}$ tel que :

$$H(B^i) \leq H^i, \tag{1}$$
$$H(B^1)\psi_i^q(A^d, B^i) \leq C_1 H^{\frac{-d}{c}} \leq C_1 H(B^i)^{\frac{-d}{ic}}. \tag{2}$$

Preuve.
On notera ici $\mathcal{X} = \rho(X) = (X^{[1]}, \ldots, X^{[p]})$. C'est la même fonction ρ qu'aux paragraphes précédents à permutations des coordonnées près.
On note encore $\Lambda = \Lambda(\mathbb{K}^n) = \rho(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n)$, on rappelle que c'est un réseau de E^{pn} de rang pn et de déterminant Δ^n.
On suppose que $B^i = \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_i)$ avec $X_j = (\xi_{j1}, \ldots, \xi_{jn}) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n$. Soit M la matrice dont les lignes sont les X_j. Soit α_i l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ engendré par les mineurs de taille i de M. Alors $N(\alpha_i) \geq 1$ car $\alpha_i \neq 0$.
Par la remarque 3.2.2 on a donc :

$$H(B^i) \leq \prod_{j=1}^{p} D(X_1^{(j)}, \ldots, X_i^{(j)}).$$

Pour avoir $H(B^i) \leq H^i$, il suffit de montrer :

$$D(X_1^{(j)}, \ldots, X_i^{(j)}) \leq H^{\frac{i}{p}}.$$

On traite les cas (a) et (b) séparément :
• Cas (a) :
On ordonne les σ_i de sorte que $\sigma_1 = id$.
On décompose $X^{[1]} = X$ en $X^A + X^*$ de manière unique avec $X^A \in A^d$ et $X^* \in A^\perp$. On va construire $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_u \in \Lambda \setminus \{0\}$ avec $\mathcal{X}_j = (X_j^{[1]}, \ldots, X_j^{[p]})$ tels que :

(i) $\|X_j^*\| \leq C_2 H^{-\frac{n}{c}+\frac{1}{p}}$ pour $1 \leq j \leq u$

(ii) $|\langle X_i^A, X_j^A\rangle| \leq \dfrac{1}{8^u u!}\|X_i^A\|^2$ pour $1 \leq i < j \leq u$

(iii) $D(X_1^A, \ldots, X_j^A) \leq \dfrac{H^{\frac{j}{p}}}{4^j}$ pour $1 \leq j \leq u$

(iv) $\|X_j^{[k]}\| \leq \frac{H^{\frac{1}{p}}}{2}$ pour $1 \leq j \leq u$ et $2 \leq k \leq p$

Avec de plus, $\mathcal{X}_j$ choisi de tel sorte que $D(X_1^A, \ldots, X_j^A)$ soit minimal.

⋄ On commence par trouver $\mathcal{X}_1$. On remarque que (ii) est satisfaite trivialement pour $j = 1$ et que (iii) devient $\|X_1^A\| \leq \frac{H^{\frac{1}{p}}}{4^1}$. Ces conditions définissent un ensemble $\mathcal{A}_1$ (convexe et symétrique).

On note $V(m)$ le volume de la boule unité de E^m. Comme X_1^A vit dans un espace de dimension d, X_1^* est dans un espace de dimension $n - d = c$ et $X_1^{[k]}$ est dans un espace de dimension n on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\mathcal{A}_1) &= (C_2^c H^{-n+\frac{c}{p}} V(c)) \cdot (\frac{H^{\frac{d}{p}}}{4^d} V(d)) \cdot (\frac{H^{\frac{n}{p}}}{2^n} V(n))^{p-1} \\
&= \frac{C_2^c}{2^{n(p-1)} 4^d} H^{\frac{c+d-n}{p}} V(c)V(d)V(n)^{p-1} \\
&= \frac{C_2^c}{2^{n(p-1)} 4^d} V(c)V(d)V(n)^{p-1} \\
&> 2^{pn}\Delta^n = 2^{pn} d(\Lambda) \text{ si } C_2 \text{ dépendant de } \mathbb{K} \text{ et } n \text{ assez grand.}
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Minkowski (théorème 2.3.1) il existe $\mathcal{X}_1 \in \Lambda \setminus \{0\}$ vérifiant nos conditions (i),(ii),(iii) et (iv). On le choisit tel que $\|X_1^A\|$ soit minimal.

⋄ On construit $\mathcal{X}_j$ à partir des $\mathcal{X}_1, \ldots, X_{j-1}$ déjà construits.

On note $\mathcal{A}_j$ l'ensemble (convexe symétrique) des $\mathcal{X}_j$ vérifiant (i)-(iv). On cherche à calculer son volume.

Si les vecteurs $X_1^A, \ldots, X_{j-1}^A$ sont liés alors (iii) est toujours satisfait. Et alors (ii) et (iii) donne un espace de dimension d d'un volume infini. On suppose alors $X_1^A, \ldots, X_{j-1}^A$ libre et on calcule le volume de $\mathcal{A}_j$.

⋆ La condition (i) définit un espace de dimension c de volume :

$$C_2^c H^{-n+\frac{c}{p}} V(c).$$

⋆ On calcule le volume de l'espace défini par (ii) :

On se ramène à chercher les $X_j^A \in \mathrm{Vect}(X_1^A, \ldots, X_{j-1}^A)$ car sa composante sur l'orthogonal de cet espace de dimension $j - 1$ n'apparait pas dans la condition (ii).

On écrit donc $X_j^A = \sum_{k=1}^{j-1} c_k X_k^A$.

Notre condition devient alors :

$$\text{Pour } 1 \leq i \leq j-1, \left| \sum_{k=1}^{j-1} c_k \langle X_k^A, X_i^A \rangle \right| \leq \frac{1}{8^u u!} \|X_i^A\|^2.$$

On note $C = (c_1, \ldots, c_{j-1})$. En utilisant la notation de la démonstration de la propriété 4.1.4, on pose $M(X^A) = (\langle X_k^A, X_l^A \rangle)_{k,l \in [\![1,j-1]\!]}$. Notre condition devient :

$$\text{Pour } 1 \leq i \leq j-1, \left| (M(X^A)C)_i \right| \leq \frac{1}{8^u u!} \|X_i^A\|^2.$$

L'ensemble $\mathcal{C}$ des solutions C de ce problème est de volume :

$$\frac{2^{j-1}}{\det(M(X^A))} \prod_{i=1}^{j-1} \left(\frac{1}{8^u u!} \|X_i^A\|^2 \right).$$

On cherche ici le volume de l'espace défini par la condition (ii), c'est-à-dire l'espace $\phi(\mathcal{C})$ avec :

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{j-1} & \longrightarrow & \mathrm{Vect}(X_1^A, \ldots, X_{j-1}^A) \\ (c_1, \ldots, c_{j-1}) & \longmapsto & \sum_{k=1}^{j-1} c_k X_k^A \end{array} \right.$$

On remarque que $\det(\phi) = D(X_1^A, \ldots, X_{j-1}^A)$. La condition (ii) définit donc un espace de dimension $j - 1$ et de volume :

$$\begin{aligned}
\frac{D(X_1^A, \ldots, X_{j-1}^A) 2^{j-1}}{\det(M(X^A))(8^u u!)^{j-1}} \prod_{i=1}^{j-1} (\|X_i^A\|^2) &= \frac{D(X_1^A, \ldots, X_{j-1}^A) 2^{j-1}}{D^2(X_1^A, \ldots, X_{j-1}^A)(8^u u!)^{j-1}} \prod_{i=1}^{j-1} (\|X_i^A\|^2) \\
&> \frac{D(X_1^A, \ldots, X_{j-1}^A)}{(8^u u!)^{j-1}}.
\end{aligned}$$

$\star$ Pour l'espace défini par (iii), on se ramène à $X_j^A \in \mathrm{Vect}(X_1^A, \dots, X_{j-1}^A)^\perp$ car la composante sur $\mathrm{Vect}(X_1^A, \dots, X_{j-1}^A)$ annule le déterminant généralisé. Par l'inégalité de Hadamard généralisée (lemme 2.4.6) on a alors :

$$D(X_1^A, \dots, X_{j-1}^A, X_j^A) = D(X_1^A, \dots, X_{j-1}^A)\|X_j^A\|.$$

Comme $\mathrm{Vect}(X_1^A, \dots, X_{j-1}^A)^\perp$ est de dimension $d-j+1$, la condition (iii) définit un espace de dimension $d-j+1$ de volume :

$$\left(\frac{H^{\frac{j}{p}}}{4^j D(X_1^A, \dots, X_{j-1}^A)}\right)^{d-j+1} V(d-j+1) = \left(\frac{H^{\frac{j}{p}}}{4^j D(X_1^A, \dots, X_{j-1}^A)}\right)\left(\frac{H^{\frac{j}{p}}}{4^j D(X_1^A, \dots, X_{j-1}^A)}\right)^{d-j} V(d-j+1)$$

On utilise (ii) avec $j-1$ pour minorer ce volume :

$$\begin{aligned}\left(\frac{H^{\frac{j}{p}}}{4^j D(X_1^A, \dots, X_{j-1}^A)}\right)\left(\frac{H^{\frac{j}{p}}}{4^j D(X_1^A, \dots, X_{j-1}^A)}\right)^{d-j} V(d-j+1) &\geq \left(\frac{H^{\frac{j}{p}}}{4^j D(X_1^A, \dots, X_{j-1}^A)}\right)\left(\frac{H^{\frac{j}{p}}4^{j-1}}{4^j H^{\frac{j-1}{p}}}\right)^{d-j} V(d-j+1) \\ &= \frac{H^{\frac{d}{p}}}{4^d D(X_1^A, \dots, X_{j-1}^A)} V(d-j+1)\end{aligned}$$

$\star$ L'espace défini par (iv) se comporte de la même façon que dans le cas $j=1$, son volume est donc :

$$\left(\frac{H^{\frac{n}{p}}}{2^n}V(n)\right)^{p-1} \geq \frac{H^{n-\frac{n}{p}}}{2^{np}}V(n)^{p-1}.$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(\mathcal{A}_j) &\geq C_2^c H^{-n+\frac{c}{p}} V(c)\frac{D(X_1^A, \dots, X_{j-1}^A)}{(8^u u!)^{j-1}} \frac{H^{\frac{d}{p}}}{4^d D(X_1^A, \dots, X_{j-1}^A)} V(d-j+1)\frac{H^{n-\frac{n}{p}}}{2^{np}}V(n)^{p-1} \\ &= \frac{C_2^c}{(8^u u!)^{j-1}4^d 2^{np} D(X_1^A, \dots, X_{j-1}^A)} V(c)V(d-j+1)V(n)^{p-1} \\ &\geq C_2^c V(c)V(d-j+1)V(n)^{p-1} \\ &> 2^{np}\Delta^n \text{ si } C_2 \text{ assez grand.}\end{aligned}$$

D'après le théorème de Minkowski (théorème 2.3.1) il existe $\mathcal{X}_j \in \Lambda$ vérifiant nos conditions et on le choisit tel que $D(X_1^A, \dots, X_j^A)$ soit minimal.

$\diamond$ On a donc nos $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_u$. On écrit $\mathcal{X}_i = \rho(X_i)$ avec $X_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n$ et on pose $B^i = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_i)$.

Il nous reste à montrer que B^i convient.

Par l'absurde on suppose que $\|X_1^A\| < 2^n C_2 H^{-\frac{n}{c}+\frac{1}{p}}$ alors d'après (i) on a, en écrivant $X_1 = (\xi_{11}, \dots, \xi_{1n})$:

$$\|X_1\| \leq 2^{n+1}C_2 H^{-\frac{n}{c}+\frac{1}{p}} \text{ et } |\xi_{1k}| \leq 2^{n+1}C_2 H^{-\frac{n}{c}+\frac{1}{p}}.$$

La condition (iv) nous donne $|\xi_{1k}^{(j)}| \leq H^{\frac{1}{p}}$ pour $j \in [\![2,p]\!]$. Donc :

$$|N(\xi_{1k})| = \prod_{j=1}^{p} |\xi_{1k}^{(j)}| \leq 2^{n+1}C_2 H^{1-\frac{n}{c}} < 1 \text{ pour } H \text{ suffisamment grand.}$$

Or $\xi_{1k} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ donc cela implique $X_1 = 0$ et donc $\mathcal{X}_1 = 0$ ce qui est contradictoire. On a donc :

$$\|X_1^A\| \geq 2^n C_2 H^{-\frac{n}{c}+\frac{1}{p}} \text{ si } H \text{ est suffisamment grand.}$$

On suppose dorénavant que H est suffisamment grand pour vérifier cette condition.

Soit $1 \leq k < j \leq u$. On remarque que $\mathcal{X}_j$ satisfait les conditions (i), (ii) et (iv) énoncées pour $\mathcal{X}_k$. Comme $\mathcal{X}_k$ est choisi pour minimiser le déterminant généralisé on a :

$$D(X_1^A, \dots, X_{k-1}^A, X_k^A) \leq D(X_1^A, \dots, X_{k-1}^A, X_j^A).$$

En particulier $0 < \|X_1^A\| \leq \|X_j^A\|$ et donc $\|X_j^A\| \neq 0$.
On souhaite maintenant montrer :

$$\|X_j^A\| \geq \frac{\|X_{j-1}^A\|}{2} \text{ et } \forall\, k < j, \lambda(X_k^A, X_j^A) \leq \frac{1}{4^u u!}.$$

On raisonne ici par récurrence sur j et on suppose le résultat vrai pour tout $k \leq j-1$. On pose $Y_j = \dfrac{X_j^A}{\|X_j^A\|}$ et on utilise $D(X_1^A, \ldots, X_{k-1}^A, X_k^A) \leq D(X_1^A, \ldots, X_{k-1}^A, X_j^A)$ avec $k = j-1$:

$$\|X_{j-1}^A\| D(Y_1^A, \ldots, Y_{j-2}^A, Y_{j-1}^A) \leq \|X_j^A\| D(Y_1^A, \ldots, Y_{j-2}^A, Y_j^A) \leq \|X_j^A\|.$$

Par l'hypothèse de récurrence et des minorations du déterminant on trouve $D(Y_1^A, \ldots, Y_{j-2}^A, Y_{j-1}^A) \geq \dfrac{1}{2}$. Cela montre au passage que $2D(X_1^A, \ldots, X_i^A) \geq \|X_1^A\| \ldots \|X_i^A\|$.
Maintenant, pour $k \in [\![1, j-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda(X_k^A, X_j^A) &= \frac{|\langle X_k^A, X_j^A\rangle|}{\|X_k^A\| \cdot \|X_j^A\|} \\
&\leq \frac{1}{8^u u!} \frac{\|X_k^A\|}{\|X_j^A\|} \text{ par (ii)} \\
&\leq \frac{1}{8^u u!} 2^{j-k} \\
&\leq \frac{1}{4^u u!},
\end{aligned}$$

ce qui conclut notre récurrence.
Le résultat $\lambda(X_k^A, X_j^A) \leq \dfrac{1}{4^u u!}$ permet de montrer que les vecteurs $X_1^A, \ldots, X_u^A$ sont linéairement indépendants et donc $\dim(B^i) = i$.
Pour conclure notre cas (a) il nous reste à montrer :

$$D(X_1^{(j)}, \ldots, X_i^{(j)}) \leq H^{\frac{i}{p}}.$$

Pour $j \geq 2$, (iv) donne directement le résultat.
On prend $j = 1$.

$$\begin{aligned}
\|X_i^A\| &\geq \frac{|X_1^A\|}{2^{i-1}} \\
&\geq 2^{n-i+1} C_2 H^{-\frac{n}{c}+\frac{1}{p}} \\
&\geq 2^{n-i+1} \|X_i^*\| \text{ par (i)} \\
&\geq \|X_i^*\|.
\end{aligned}$$

Cela nous donne alors $\|X_i\| \leq \|X_i^*\| + \|X_i^A\| \leq 2\|X_i^A\|$. On combine cette inégalité avec $2D(X_1^A, \ldots, X_i^A) \geq \|X_1^A\| \ldots \|X_i^A\|$:

$$\begin{aligned}
D(X_1, \ldots, X_i) &\leq \|X_1\| \ldots \|X_i\| \\
&\leq 2^i \|X_1^A\| \ldots \|X_i^A\| \\
&\leq 2^{i+1} D(X_1^A, \ldots, X_i^A) \\
&\leq 2^{i+1} \frac{H^{\frac{i}{p}}}{4^i} \text{ par (iii)} \\
&\leq H^{\frac{i}{p}}.
\end{aligned}$$

Cela nous donne $H(B^i) \leq H^i$.
Il nous reste à montrer $H(B^1)\psi_i^q(A^d, B^i) \leq C_1 H^{\frac{-d}{c}} \leq C_1 H(B^i)^{\frac{-d}{ic}}$:
On note que $\|X_1\| \leq 2^i \|X_i\|$ pour tout i.
D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\lambda(A^d, X_i) &= \max_{Y \in A} \frac{|\langle Y, X_i^A\rangle|}{\|Y\| \cdot \|X_i\|} \\
&= \frac{\|X_i^A\|}{\|X_i\|}.
\end{aligned}$$

On en déduit $\|X_i\|\omega(A^d, X_i) = \sqrt{\|X_i\|^2 - \|X_i^A\|^2} = \|X_i^*\|$.
D'après (i) on a donc $\|X_i\|\omega(A^d, X_i) \leq C_2 H^{-\frac{n}{c}+\frac{1}{p}}$ et enfin :

$$\begin{aligned}\|X_1\|\omega(A^d, X_i) &\leq 2^i C_2 H^{-\frac{n}{c}+\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^n C_2 H^{-\frac{n}{c}+\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

On a $H(B^1) \leq \prod_{k=1}^{p} D(X_1^{(k)})$ car $X_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n$ (la norme de l'idéal α est supérieure à 1). Et donc :

$$\begin{aligned}H(B^1) &\leq \prod_{k=1}^{p} D(X_1^{(k)}) \\ &\leq \|X_1\| \prod_{k=2}^{p} \|X_1^{[k]}\| \\ &\leq \|X_1\| H^{\frac{p-1}{p}} \text{ d'après (iv) }.\end{aligned}$$

On peut alors combiner et trouver :

$$\begin{aligned}H(B^1)\omega(A, X_i) &\leq \|X_1\| H^{\frac{p-1}{p}} \omega(A^d, X_i) \\ &\leq 2^n C_2 H^{-\frac{d}{c}}.\end{aligned}$$

On peut alors appliquer le corollaire 4.4.2 et on trouve :

$$H(B^1)\omega(A, B^1) \leq 2^{n+i} C_2 H^{-\frac{d}{c}}.$$

On a donc prouvé le théorème dans le cas (a) pour $H \geq H_0 \geq 1$.
Si $1 \leq H < H_0$, on pose $B^1 \subset \ldots \subset B^u$ de hauteur 1 (ils existent par le lemme 3.4.1).
Alors en posant $C_1 = H_0^{\frac{d}{c}}$ on a :

$$H(B^i) \leq H^i \tag{3}$$

$$\omega(A, X_i) \leq 1 \leq C_1 H^{-\frac{d}{c}}. \tag{4}$$

- Cas (b) :

La démonstration étant très similaire à celle du cas (a), on ne donne que les grandes lignes de la preuve.
On suppose toujours $\sigma_1 = id$ et de plus $\sigma_2(z) = \overline{z}$.
On remarque alors que : $\xi^{[1]} = \mathrm{Re}(\xi)$ et $\xi^{[2]} = \mathrm{Im}(\xi)$ et donc $X = X^{[1]} + iX^{[2]}$.
On écrit toujours $X = X^A + X^*$. De la même manière que dans le cas (a), on va trouver des vecteurs $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_u \in \Lambda \setminus \{0\}$ avec $\mathcal{X}_j = (X_j^{[1]}, \ldots, X_j^{[p]})$ tels que :

(i') $\|X_j^*\| \leq C_2 H^{-\frac{n}{2c}+\frac{1}{p}}$ pour $1 \leq j \leq u$

(ii') $|\langle X_i^A, X_j^A \rangle| \leq \dfrac{1}{8^u u!} \|X_i^A\|^2$ pour $1 \leq i < j \leq u$

(iii') $D(X_1^A, \ldots, X_j^A) \leq \dfrac{H^{\frac{j}{p}}}{4^j}$ pour $1 \leq j \leq u$

(iv') $\|X_j^{[k]}\| \leq \dfrac{H^{\frac{1}{p}}}{2}$ pour $1 \leq j \leq u$ et $3 \leq k \leq p$

Les conditions (ii') et (iii') sont les mêmes que dans le cas (a), (i) a seulement varié dans l'exposant de H et (iv) n'est maintenant valable que pour $k \geq 3$. On prendra de même $\mathcal{X}_j$ de sorte à minimiser $D(X_1^A, \ldots, X_j^A)$.
On a les résultats suivants (qui se démontrent comme en (a)) :

$$\begin{aligned}&\|X_1^A\| \geq 2^n C_2 H^{-\frac{n}{2c}+\frac{1}{p}} \text{ pour } H \text{ suffisamment grand,} \\ &\|X_j^A\| \geq \frac{\|X_{j-1}^A\|}{2} > 0 \text{ et } \forall\, k < j, \lambda(X_k^A, X_j^A) \leq \frac{1}{4^u u!}, \\ &\|X_i\|\omega(A^d, X_i) \leq C_2 H^{-\frac{n}{2c}+\frac{1}{p}}, \\ &\|X_1\|^2 \omega^2(A^d, X_i) \leq 2^{2n} C_2^2 H^{-\frac{n}{c}+\frac{2}{p}}.\end{aligned}$$

On conclut alors de la même manière qu'en (a). ■

Corollaire 5.1.3. *Si A^d ne contient pas d'espace B^i défini sur $\mathbb{K}$, alors il existe une infinité d'espaces B^i définis sur $\mathbb{K}$ vérifiant* (1) *et* (2).

Preuve. On fixe B_0^i vérifiant (1) et (2) pour $H = H_0$.
Puisque A^d ne contient pas d'espace B^i défini sur $\mathbb{K}$, on a $H(B^1)\psi_i^q(A^d, B_0^i) = \alpha > 0$.
Soit $H_1 \geq H_0$ tel que $C_1 H_1^{-\frac{d}{c}} < \alpha$.
Alors B_0^i ne vérifie pas (1) et (2) pour $H = H_1$, il existe donc B_1^i différent de B_0^i vérifiant (1) et (2) pour $H = H_1$.
On itère le processus et on obtient ainsi une infinité d'espaces B^i vérifiant (1) et (2).

■

5.2 Théorèmes de transfert

On démontre dans cette partie deux théorèmes importants dits de transfert. On les utilise par la suite pour exhiber des sous-espaces définis sur $\mathbb{K}$.

Théorème 5.2.1 (Going-up). *Soit d, e des entiers tels que $d + e < n$. Soient A^d, B^e deux sous-espaces de G^n avec B^e défini sur $\mathbb{K}$ tel que, pour tout $i \in [\![1, \min(d, e)]\!]$:*

$$H(B^e) \leq H \text{ et } H(B^e)^{x_i}\psi_i(A^d, B^e) \leq cH^{-y_i} \text{ avec } H \geq 1, x_i \geq 0 \text{ et } y_i \geq 0 \text{ et } c > 0$$

Alors il existe des constantes $C_3 = C_3(n, e, \mathbb{K})$, $C_4 = C_4(n, e, \mathbb{K}, x, y)$ telles qu'en posant $H' = C_3 H^{\frac{n-e-1}{n-e}}$ il existe un sous-espace $B^{e+1} \supset B^e$ défini sur $\mathbb{K}$ tel que :

$$H(B^{e+1}) \leq H', \tag{5}$$

$$H(B^{e+1})^{\frac{x_i(n-e)}{n-e-1}}\psi_i(A^d, B^{e+1}) \leq cC_4 H'^{\frac{-y_i(n-e)}{n-e-1}}, \text{ pour tout } i \in [\![1, \min(d, e)]\!]. \tag{6}$$

Preuve. On note $C_3 = c_1$ la constante donnée par le théorème 3.3.2. Par ce théorème, il existe $B^{e+1} \supset B^e$ défini sur $\mathbb{K}$ tel que :

$$H(B^{e+1}) \leq C_3 H(B^e)^{\frac{n-e-1}{n-e}} \leq H'.$$

D'autre part on sait que :

$$\psi_i(A^d, B^{e+1}) \leq \psi_i(A^d, B^e).$$

On écrit donc :

$$\begin{aligned} H(B^{e+1})^{\frac{x_i(n-e)}{n-e-1}}\psi_i(A^d, B^{e+1}) &\leq C_3^{\frac{x_i(n-e)}{n-e-1}} H(B^e)^{x_i}\psi_i(A^d, B^e) \\ &\leq C_3^{\frac{x_i(n-e)}{n-e-1}} cH^{-y_i} \\ &= C_3^{\frac{(x_i+y_i)(n-e)}{n-e-1}} cH'^{\frac{-y_i(n-e)}{n-e-1}}. \end{aligned}$$

On a donc le résultat avec $C_4 = C_3^{\frac{(x_i+y_i)(n-e)}{n-e-1}}$.

■

Théorème 5.2.2 (Going-down). *Soit A^d et B^e deux sous-espaces de G^n avec B^e défini sur $\mathbb{K}$ et $H(B^e) \leq H$. Soit $1 \leq h \leq f' = \min(d, e-1)$ et $c \geq 1$.*
1^{er} cas : Si on a $y_1 \geq .. \geq y_h \geq (qh)^{-1}$ tels que :

$$H(B^e)\omega_i^q(A^d, B^e) \leq c^q H^{-(qy_i - 1)} \text{pour tout } i \in [\![1, h]\!]. \tag{7}$$

Posons $y = y_1 + .. + y_h$ et on suppose $y_i' = \dfrac{y_i e}{qy + e - 1} \geq \dfrac{1}{q}$ pour tout $i \in [\![1, h]\!]$. Alors il existe $B^{e-1} \subset B^e$ défini sur $\mathbb{K}$ tel que :

$$H(B^{e-1}) \leq C_5 H(B^e) H^{\frac{qy-1}{e}} \leq C_5 H^{\frac{e+qy-1}{e}} = H', \tag{8}$$

$$H(B^{e-1})\omega_i^q(A^d, B^{e-1}) \leq C_6 c^q H^{-(qy_i'-1)\frac{qy+e-1}{e}} = C_7 c^q H'^{-(qy_i'-1)} \text{pour tout } i \in [\![1, h]\!]. \tag{9}$$

En particulier on aura $\omega_i(A^d, B^{e-1}) \leq C_8 c H(B^{e-1})^{-y_i'}$.
2^{me} cas : Si au lieu de (7) on a :

$$\omega_i(A^d, B^e) = 0 \text{ pour tout } i \in [\![1, h]\!]. \tag{10}$$

Alors on pose $y'_0 = \frac{e}{qh}$ et pour tout $H' \geq C_9 H$, il existe $B^{e-1} \subset B^e$ défini sur $\mathbb{K}$ tel que :

$$H(B^{e-1}) \leq H', \tag{11}$$

$$H(B^{e-1})\omega_i^q(A^d, B^{e-1}) \leq C_{10} H^{qy'_0} H'^{-(qy'_0-1)} \text{ pour tout } i \in [\![1,h]\!]. \tag{12}$$

En particulier on aura $\omega_i(A^d, B^{e-1}) \leq C_{11} H^{y'_0} H(B^{e-1})^{y'_0}$.

Remarque 5.2.3. Les constantes du théorème dépendent de n, K, d, e et des y_i mais pas de A, B, c ou H.

Preuve. On se place ici dans le cas (a) où $\mathbb{K}$ est réel. Le cas (b) est prouvé dans [7] , Schmidt ayant fait une erreur dans son article, celle-ci ayant été remarquée et corrigé par Poëls [7]. Les différences notables entre les deux cas se trouvent dans la construction du vecteur W et dans l'étude de sa norme.
On pose $m = n - e$. Dans le cas (a), on a $q = 1$ et donc $y_1 \geq h^{-1}$ pour tout $i \in [\![1,h]\!]$ et $y \geq 1$.
L'espace $B^{e,\perp}$ est de dimension m. Soit $Z_1, \dots, Z_m \in \mathbb{K}^n$ tels que $B^{e,\perp} = \mathrm{Vect}(Z_1, \dots, Z_m)$. Notre but ici est de construire un vecteur $W \in \mathbb{K}^n$ tel que notre espace recherché soit :

$$B^{e-1} = \mathrm{Vect}(W, Z_1, \dots, Z_m)^\perp.$$

On pose $\lambda_i = \lambda_i(A^d, B^e)$ et des bases orthonormées X_i, Y_j de A^d, B^e telles que $\langle X_i, Y_j \rangle = \delta_{ij}\lambda_i$.
De même on note $\omega_i = \omega_i(A^d, B^e)$.
On sait que $\Lambda(B^{e,\perp})$ est un réseau de $\mathbb{R}^{pn}$ de rang pm et de déterminant $\Delta^m H(B^{e,\perp}) = \Delta^m H(B^e)$.
Soit $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{pm}$ une base de ce réseau. On pose :

$$\Pi = \left\{ \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{pm} c_i \mathcal{L}_i \mid c_i \in \mathbb{R}, |c_i| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Alors Π est dans un espace de dimension pm et est de volume :

$$\mathrm{vol}(\Pi) = d(\Lambda(B^{e\perp})) = \Delta^m H(B^e).$$

On remarque de plus que $\Pi \cap \Lambda(\mathbb{K}^n) = \{0\}$.
Soit $S^* = \mathrm{Vect}(\Lambda(B^{e\perp}))$. On pose pour tout j, $\mathcal{D}_j = (Y_j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{pn}$. Alors $\mathcal{D}_j \perp S^*$ car $\langle Y_j, Z_i \rangle = 0$ pour tous i et j. Pour $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{pn}$ on écrit de manière unique :

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}^* + \mathcal{X}_1 + \ldots + \mathcal{X}_h + \mathcal{X}_0$$

$$\text{avec} \quad \begin{array}{c} \mathcal{X}^* \in S^* \\ \mathcal{X}_j \in \mathrm{Vect}(\mathcal{D}_j) \text{ pour tout } j \in [\![1,h]\!] \\ \mathcal{X}_0 \perp S^* \text{ et } \mathcal{X}_0 \perp \mathcal{D}_j \text{ pour tout } j \in [\![1,h]\!] \end{array}.$$

On remarque que $\mathcal{X}_0$ est dans un espace de dimension $pn - pm - h = ep - h$.
<u>1^{er} cas :</u> On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{A}$ des $\mathcal{X}$ vérifiant :

(i) $\mathcal{X}^* \in \Pi$

(ii) $\|\mathcal{X}_j\| \leq H^{-y_j + \frac{(y-1)}{ep}} \left(\frac{H}{H(B^e)} \right)^{\frac{1}{h}}$ pour $j \in [\![1,h]\!]$

(iii) $\|\mathcal{X}_0\| \leq C_{12} H^{\frac{y-1}{ep}}$

Alors $\mathcal{A}$ est un ensemble convexe symétrique de volume :

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\mathcal{A}) &= \Delta^m H(B^e) 2^h \left(\prod_{j=1}^h H^{-y_j + \frac{(y-1)}{ep}} \right) \left(\frac{H}{H(B^e)} \right) \left(C_{12} H^{\frac{y-1}{ep}} \right)^{ep-h} V(ep-h) \\ &= \Delta^m 2^h V(ep-h) C_{12}^{ep-h} \\ &> 2^{np} \Delta^m \text{ pour } C_{12} \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

D'après le théorème de Minkowski (théorème 2.3.1), il existe $0 \neq \mathcal{X} \in \Lambda(\mathbb{K}^n) \cap \mathcal{A}$.
On a $\mathcal{X}^* \in \Pi$ donc $\mathcal{X} \notin \Lambda(B^{e\perp})$. On peut poser $W \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n$ tel que $\mathcal{X} = \rho(W)$ et on a $W \notin B^{e\perp}$.
On calcule pour $j \in [\![1,h]\!]$, $|\langle W, Y_j \rangle| = |\langle \mathcal{X}, \mathcal{D}_j \rangle| = |\mathcal{X}_j|$ par définition de $\mathcal{D}_j$ et donc :

$$|\langle W, Y_j \rangle| \leq H^{-y_j + \frac{(y-1)}{ep}} \left(\frac{H}{H(B^e)} \right)^{\frac{1}{h}}. \tag{13}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{X} - \mathcal{X}^*\| &= \|\mathcal{X}_1 + \ldots + \mathcal{X}_h + \mathcal{X}_0\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{h} H^{-y_j + \frac{(y-1)}{ep}} \left(\frac{H}{H(B^e)}\right)^{\frac{1}{h}} + C_{12} H^{\frac{y-1}{ep}} \\ &\leq \sum_{j=1}^{h} H^{\frac{y-1}{ep}} \left(\frac{1}{H(B^e)}\right)^{\frac{1}{h}} + C_{12} H^{\frac{y-1}{ep}} \text{ car } y_j \geq \frac{1}{h} \\ &\leq C_5 H^{\frac{y-1}{ep}}.\end{aligned}$$

On écrit $W = U + V$ avec $U \in B^{e\perp}$ et $V \in B^e$.
On pose $\mathcal{V}_j = (0, \ldots, 0, V^{(j)}, 0, \ldots, 0)$. On a $\mathcal{V}_j \perp S^*$ et $\mathcal{V}_j \perp \mathcal{X} - \mathcal{V}_j$ et donc :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{V}_j\|^2 &= |\langle \mathcal{V}_j, (\mathcal{X} - \mathcal{V}_j) - \mathcal{V}_j \rangle| \\ &= |\langle \mathcal{V}_j, \mathcal{X} \rangle| \\ &= |\langle \mathcal{V}_j, \mathcal{X} - \mathcal{X}^* \rangle| \\ &\leq \|\mathcal{V}_j\| C_5 H^{\frac{y-1}{ep}}\end{aligned}$$

On a alors

$$\|V^{(j)}\| = \|\mathcal{V}_j\| \leq C_5 H^{\frac{y-1}{ep}}. \tag{14}$$

Soit α l'idéal engendré par les mineurs de taille m de la matrice $(Z_1 \mid \ldots \mid Z_m)$ et β l'idéal engendré par les mineurs de taille $m+1$ de la matrice $(W \mid Z_1 \mid \ldots \mid Z_m)$.
Comme $W \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n$, chaque mineur de taille $m+1$ de la matrice $(W \mid Z_1 \mid \ldots \mid Z_m)$ est de la forme $\sum u_k \alpha_k$ avec $u_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ et α_k un mineur de taille m de la matrice $(Z_1 \mid \ldots \mid Z_m)$.
On a alors :

$$\beta \subset \alpha \text{ et donc } N(\beta) \geq N(\alpha).$$

On rappelle les formules :

$$\begin{aligned}H(B^e) = H(B^{e,\perp}) &= \frac{1}{N(\alpha)} \prod_{j=1}^{p} D(Z_1^{(j)}, .., Z_m^{(j)}) \\ H(B^{e-1}) = H(B^{e-1,\perp}) &= \frac{1}{N(\beta)} \prod_{j=1}^{p} D(W^{(j)}, Z_1^{(j)}, .., Z_m^{(j)}).\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}H(B^{e-1}) &= \frac{1}{N(\beta)} \prod_{j=1}^{p} D(W^{(j)}, Z_1^{(j)}, .., Z_m^{(j)}) \\ &\leq \frac{1}{N(\alpha)} \prod_{j=1}^{p} \|V^{(j)}\| D(Z_1^{(j)}, .., Z_m^{(j)}) \text{ par l'inégalité de Hadamard généralisée} \\ &\leq H(B^e) \prod_{j=1}^{p} \|V^{(j)}\| \\ &\leq H(B^e) C_5^p H^{\frac{y-1}{e}} \leq C_5^p H^{\frac{e+y-1}{e}} = H'.\end{aligned}$$

On a donc (8), il nous reste à montrer (9). On a :

$$\begin{aligned}\omega^2(B^{e-1,\perp}, Y_i) &= \mu^2(B^{e-1,\perp}, Y_i) \\ &= \frac{D^2(Y_i, W, Z_1, \ldots, Z_m)}{D^2(W, Z_1, \ldots, Z_m) \|Y_i\|^2} \text{ d'après la propriété 4.3.5.}\end{aligned}$$

On calcule $D^2(Y_i, W, Z_1, \ldots, Z_m)$. On pose M tel que $D^2(Y_i, W, Z_1, \ldots, Z_m) = \det(M)$, M étant la matrice des produits scalaires. On remarque alors que la première ligne de M est :

$$\begin{pmatrix} \|Y_i\|^2 & \langle Y_i, W\rangle & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ car } \langle Y_i, Z_j\rangle = 0.$$

On développe le déterminant par rapport à cette première ligne :

$$D^2(Y_i, W, Z_1, \ldots, Z_m) = \|Y_i\|^2 D^2(W, Z_1, \ldots, Z_m) - \langle Y_i, W\rangle \det(M_1),$$

avec $M_1 = \begin{pmatrix} \langle W, Y_i\rangle & (\star) \\ 0 & \\ \vdots & M(Z) \\ 0 & \end{pmatrix}$ et $M(Z) = (\langle Z_i, Z_j\rangle)$. On développe $\det(M_1)$ par rapport à la première colonne et on a donc :

$$D^2(Y_i, W, Z_1, \ldots, Z_m) = \|Y_i\|^2 D^2(W, Z_1, \ldots, Z_m) - \langle Y_i, W\rangle^2 D^2(Z_1, \ldots, Z_m).$$

On injecte cela dans nos calculs :

$$\begin{aligned} \omega^2(B^{e-1,\perp}, Y_i) &= \frac{\|Y_i\|^2 D^2(W, Z_1, \ldots, Z_m) - \langle Y_i, W\rangle^2 D^2(Z_1, \ldots, Z_m)}{D^2(W, Z_1, \ldots, Z_m)\|Y_i\|^2} \\ &= 1 - \frac{\langle Y_i, W\rangle^2 D^2(Z_1, \ldots, Z_m)}{D^2(W, Z_1, \ldots, Z_m)} \text{ car } \|Y_i\|^2 = 1. \end{aligned}$$

On passe à B^{e-1} :

$$\omega(B^{e-1}, Y_i) = \frac{|\langle Y_i, W\rangle| D(Z_1, \ldots, Z_m)}{D(W, Z_1, \ldots, Z_m)}.$$

Ceci nous permet d'évaluer :

$$\begin{aligned} H(B^{e-1})\omega(B^{e-1}, Y_i) &= \frac{1}{N(\beta)} \prod_{j=2}^{p} D(W^{(j)}, Z_1^{(j)}, .., Z_m^{(j)}) D(W, Z_1, \ldots, Z_m)\omega(B^{e-1}, Y_i) \\ &\leq \frac{1}{N(\beta)} \left(\prod_{j=2}^{p} D(W^{(j)}, Z_1^{(j)}, .., Z_m^{(j)}) \right) |\langle Y_i, W\rangle| D(Z_1, \ldots, Z_m) \\ &\leq \frac{1}{N(\alpha)} \prod_{j=1}^{p} D(Z_1^{(j)}, .., Z_m^{(j)}) \left(\prod_{j=2}^{p} \|V^{(j)}\| \right) H^{-y_j - \frac{(y-1)}{ep}} \left(\frac{H}{H(B^e)} \right)^{\frac{1}{h}} \text{ d'après (13)} \\ &\leq C_{16} H(B^e) \left(\prod_{j=2}^{p} H^{\frac{y-1}{ep}} \right) H^{-y_i + \frac{(y-1)}{ep}} \left(\frac{H}{H(B^e)} \right) \text{ d'après (14)} \\ &\leq C_{16} H^{\frac{(p-1)(y-1) - epy_i + (y-1) + ep}{ep}} \\ &= C_{16} H^{\frac{y-1+e}{e} - y_i} \\ &= C_{16} H^{\frac{(y-1+e)(1-y_i')}{e}}. \end{aligned}$$

Par définition de $\omega_i(B^{e-1}, Y_i)$, il existe $U_i \in B^{e-1}$ tel que :

$$H(B^{e-1})\omega(U_i, Y_i) \leq C_{16} H^{\frac{(y-1+e)(1-y_i')}{e}}.$$

On rappelle que par hypothèse on a :

$$H(B^e)\omega(X_i, Y_i) \leq cH^{-y_i+1}.$$

Combiné avec (8) cela donne :

$$\begin{aligned} H(B^{e-1})\omega(X_i, Y_i) &\leq C_5 H(B^e) H^{\frac{y-1}{e}} \omega(X_i, Y_i) \\ &\leq C_5 H^{\frac{y-1}{e}} cH^{-y_i+1} \\ &= cC_5 H^{\frac{(y-1+e)(1-y_i')}{e}}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire sur ω (lemme 4.3.2) :

$$\begin{aligned} H(B^{e-1})\omega(X_i,U_i) &\leq H(B^{e-1})\omega(X_i,Y_i) + H(B^{e-1})\omega(U_i,Y_i) \\ &\leq C_{17}cH^{\frac{(y-1+e)(1-y'_i)}{e}}. \end{aligned}$$

On peut alors appliquer le théorème 4.4.1 et on trouve C_6 tel que :

$$H(B^{e-1})\omega_i(A^d,B^{e-1}) \leq C_6 cH^{\frac{(y-1+e)(1-y'_i)}{e}}.$$

Cela prouve donc (9) et conclut le 1^{er} cas.
2^{me} cas :
On suppose alors (10). On propose ici un schéma de preuve dans le cas (a).
Soit $H_1 = \left(\dfrac{H'}{C_9 H}\right)^{\frac{e}{h}}$, avec C_9 qu'on définira plus tard. On considère maintenant $\mathcal{A}'$ l'ensemble des $\mathcal{X}$ vérifiant :
(i') $\mathcal{X}^* \in \Pi$
(ii') $\|\mathcal{X}_j\| \leq H_1^{-(1-\frac{h}{ep})}$ pour tout $j \in [\![1,h]\!]$
(iii') $\|\mathcal{X}_0\| \leq C_{18} H_1^{\frac{h}{ep}}$
On peut alors appliquer le théorème de Minkowski (théorème 2.3.1) pour C_{18} assez grand, et on trouve $W \in \mathcal{A}' \cap \Lambda(\mathbb{K}^n)$ non nul. On écrit $W = \rho(\mathcal{X})$ avec $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n$, et $W = U + V$ avec $U \in B^{e\perp}$ et $V \in B^e$.
De manière analogue au premier cas on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle W, Y_j\rangle| &\leq 2C_{19} H_1^{-(1-\frac{h}{ep})}, \\ \|V^{(j)}\| &\leq 2C_{20} H_1^{\frac{h}{ep}}. \end{aligned}$$

On a toujours $H(B^{e-1}) \leq H(B^e) \displaystyle\prod_{j=1}^{p} \|V^{(j)}\|$ et donc :

$$H(B^{e-1}) \leq CH(B^e) H_1^{\frac{h}{e}}.$$

On peut maintenant choisir $C_9 = C$, ce qui nous donne $H(B^{e-1}) \leq H'$ et donc (11).
Il reste alors à montrer (12). Les calculs sont exactement les mêmes que dans le 1^{er} cas mais les estimations changent :

$$\begin{aligned} H(B^{e-1})\omega(B^{e-1},Y_i) &\leq C_{20} H(B^e) \left(\prod_{j=2}^{p} \|V^{(i)}\|\right) |\langle Y_i, W\rangle| \\ &\leq C_{21} H(B^e) H_1^{\frac{h(p-1)}{ep}} H_1^{-(1-\frac{h}{ep})} \\ &\leq C_{21} H H_1^{\frac{h-e}{e}} \\ &= C_{10} H^{\frac{e}{h}} H'^{\frac{h-e}{e}} \\ &= C_{10} H^{y'_0} H'^{-(y'_0-1)}. \end{aligned}$$

Cela conclut notre démonstration. ■

Théorème 5.2.4. *Soit $d, e > 0$ tels que $e + d < n$. Soit A^d et B^e deux sous-espaces de G^n avec B^e défini sur $\mathbb{K}$ tel que :*

$$\begin{aligned} &H(B^e) \leq H \\ &H(B^e)\mu^q(A^d,B^e) \leq cH^{-x} \text{ avec } x \geq 0. \end{aligned}$$

Alors il existe B^{e+1} tel que $B^e \subset B^{e+1}$ et :

$$H(B^{e+1}) \leq H^{\frac{e+1}{e}} = H' \tag{15}$$

$$H(B^{e+1})\mu^q(A^d,B^{e+1}) \leq cC_{22} H^{x-\frac{d+e}{e(n-d+e)}} = cC_{22} H'^{-\frac{ex+\frac{d+e}{n-d-e}}{e+1}}. \tag{16}$$

Preuve. On raisonne de la même manière que pour le théorème 5.2.2 en exhibant un ensemble convexe convenable. Schmidt détaille la preuve dans [10]. ■

5.3 Bornes supérieures

On rappelle la définition de $t = \min(d, e, n-d, n-e)$.

Théorème 5.3.1. *Soit $d, e > 0$ tels que $e + d < n$. Soit $1 \leq j \leq t = \min(d, e)$. Soit $A^d \subset G^n$ et $H \geq 1$. Alors il existe un espace B^e défini sur $\mathbb{K}$ tel que :*

$$H(B^e) \leq H \tag{17}$$

$$\psi_j^q(A^d, B^e) \leq C_{24} H^{-\frac{d(n-j)}{j(n-d)(n-e)}}. \tag{18}$$

Si $j = 1$ on a une meilleure estimation :

$$H(B^e)^{\frac{n-1}{n-e}} \psi_1^q(A^d, B^e) \leq C_{24} H^{-\frac{d(n-1)}{(n-d)(n-e)}}. \tag{19}$$

Preuve. Soit $j \in [\![1, t]\!]$ fixé. On raisonne par récurrence sur e.
• Cas $e = j$: D'après le théorème 5.1.2 (appliqué avec $H^{\frac{1}{j}} \geq 1$), il existe un sous-espace B^j tel que :

$$H(B^j) \leq (H^{\frac{1}{j}})^j = H$$

$$\psi_j^q(A^d, B^j) \leq \frac{C_1 H^{\frac{-d}{j(n-d)}}}{H(B^j)} \leq C_1 H^{-\frac{d}{j(n-d)}}$$

• $e > j$: Soit $H_1 = \left(\frac{H}{C_3}\right)^{\frac{n-e+1}{n-e}}$ avec C_3 la constante du théorème 5.2.1 (Going-up). On suppose H suffisamment grand pour que $H_1 \geq 1$.
On suppose notre résultat vrai pour $e - 1$, il existe donc B^{e-1} défini sur $\mathbb{K}$ tel que $H(B^{e-1}) \leq H_1$ et $\psi_j^q(A^d, B^{e-1}) \leq C_{24} H_1^{-\frac{d(n-j)}{j(n-d)(n-e+1)}}$.
On applique maintenant le théorème du Going-up, il existe B^e qui contient B^{e-1} tel que :

$$H(B^e) \leq C_3 H_1^{\frac{n-e}{n-e+1}} = H$$

$$\psi_j^q(A^d, B^e) \leq C_{24} H^{-\frac{d(n-j)}{j(n-d)(n-e)}}.$$

On a donc le cas e pour H suffisamment grand. Quitte à augmenter la constante C_{24}, on a le résultat pour tout $H \geq 1$ (car $\psi_j(A^d, B^j) \leq 1$).
• j=1 : Pour le cas particulier où $j = 1$ on raisonne aussi par récurrence sur e en appliquant le Going-up.
Si $e = 1$, le théorème 5.1.2 donne un espace B^1 tel que :

$$H(B^1) \leq H$$

$$H(B^1)\psi_1^q(A^d, B^1) \leq C_1 H^{-\frac{d}{n-d}} = C_1 H^{-\frac{d(n-1)}{n-d(n-1)}}.$$

On applique alors $e - 1$ fois le Going-up, celui-ci fait alors apparaitre en exposant un facteur :

$$\prod_{k=1}^{e-1} \frac{n-k}{n-k-1} = \frac{n-1}{n-e}.$$

On obtient alors (19) pour e.

■

On déduit de ce théorème un corollaire qui nous permettra de minorer l'exposant d'approximation (voir la partie suivante).

Corollaire 5.3.2. *Soit $A^d \subset G^n$ tel que :*

$$\textit{pour tout } B^e \textit{ défini sur } \mathbb{K}, \dim(A^d \cap B^e) < j. \tag{20}$$

Alors il existe une infinité d'espaces B^e définis sur $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$\psi_j^q(A^d, B^e) \leq C_{24} H(B^e)^{-\frac{d(n-j)}{j(n-d)(n-e)}}.$$

Et si $j = 1$ il existe une infinité d'espaces B^e définis sur $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$H(B^e)^{\frac{n-1}{n-e}} \psi_1^q(A^d, B^e) \leq C_{24} H(B^e)^{-\frac{d(n-1)}{(n-d)(n-e)}}.$$

Preuve. La condition "pour tout B^e défini sur $\mathbb{K}, \dim(A^d \cap B^e) < j$ " est équivalente à "pour tout B^e défini sur $\mathbb{K}, \psi_j(A^d, B^e) > 0$ ".
Soit B_0^e un espace de dimension e donné par le théorème 5.3.1. Alors B_0^e vérifie :

$$H(B_0^e) \leq H$$
$$\psi_j^q(A^d, B_0^e) \leq C_{24} H^{-\frac{d(n-j)}{j(n-d)(n-e)}}.$$

La quantité $C_{24} H^{-\frac{d(n-j)}{j(n-d)(n-e)}}$ tend vers 0 quand H tend vers $+\infty$ et $\psi_j(A^d, B_0^e) > 0$.
Soit H_0 tel que $\psi_j^q(A^d, B_0^e) > C_{24} H_0^{-\frac{d(n-j)}{j(n-d)(n-e)}}$.
Il existe alors B_1^e vérifiant les conditions pour $H = H_0$. On a alors $B_1 \neq B_0$.
On continue par récurrence et on construit alors notre infinité d'espaces (B_n^e).
Le cas $j = 1$ se traite de la même façon.

■

On peut affiner ce théorème sous certaines conditions.

Théorème 5.3.3. *Soit $d, e > 0$ tels que $d + e < n$. Soit $1 \leq j \leq t = \min(d, e)$ tel que :*

$$j + n - t \geq j(j + n - d - e).$$

Soit $A^d \subset G^n$ et $H \geq 1$.
Alors il existe B^e défini sur $\mathbb{K}$ tel que :

$$H(B^e) \leq H \tag{21}$$
$$H(B^e)\psi_j^q(A^d, B^e) \leq C_{26} H^{1-\frac{j+n-t}{j(j+n-d-e)}}. \tag{22}$$

Preuve. • Cas $e \leq d$: On a alors $t = e$.
Comme la hauteur et les angles d'inclinaison sont invariants par passage aux sous-espaces orthogonaux, il est équivalent de montrer qu'il existe un espace B^e tel que :

$$H(B^e) \leq H$$
$$H(B^e)\psi_j^q(A^d, B^e) \leq C_{26} H^{1-\frac{j+e}{j(j+d+e-n)}}$$

sous les hypothèses $j + e \geq j(j + d + e - n)$, $d + e \geq n$ et $e \geq d$.
On raisonne par récurrence sur j.
$\diamond\, j = 1$. On pose $g = d + e - n$. Alors $\psi_1(A^d, B^e) = \omega_{g+1}(A^d, B^e)$.
Soit B^{e+1} de hauteur 1 (qui existe par 5.1.2). Comme $d + e \geq n$ on $\dim(A^d, B^{e+1}) \geq g + 1$. On en déduit que :

$$\text{Pour tout } i \in [\![1, g+1]\!], \quad \omega_i(A^d, B^{e+1}) = 0.$$

On remarque qu'on est alors dans le cas 2 du théorème du Going-down 5.2.2 car on vérifie (10). On peut donc l'appliquer pour $H \geq C_9 = C_9 H(B^{e+1})$ avec C_9 la constante intervenant dans le théorème (on aura de plus $y_0' = \dfrac{e+1}{q(g+1)}$). Il existe alors $B^e \subset B^{e+1}$ tel que :

$$H(B^e) \leq H$$
$$H(B^e)\omega_i^q(A^d, B^e) \leq C_{10} H^{-(qy_0'-1)} = C_{10} H'^{1-\frac{e+1}{g+1}} \; i \in [\![1, g+1]\!].$$

Cela nous donne le cas $j = 1$ du théorème 5.3.3 pour H suffisamment grand. On gère les "petits" H en faisant varier la constante.
$\diamond$ Hérédité : on suppose la propriété vraie pour $j - 1$. On a $\psi_j(A^d, B^e) = \omega_{g+j}(A^d, B^e)$.
On pose $h = g + j$, $y = \dfrac{j+e}{(j-1)q}$ et $H_1 = \left(\dfrac{H}{C_5}\right)^{\frac{e+1}{e+qy}}$ où C_5 est la constante définie dans le Going-down (théorème 5.2.2).
On suppose de plus que H est suffisamment grand pour que l'on ait $H_1 \geq 1$. Comme $j + e \geq j(j + d + e - n)$ on a $(j-1) + (e+1) \geq (j-1)((j-1) + d + (e+1) - n)$. Par hypothèse de récurrence il existe B^{e+1} vérifiant :

$$H(B^{e+1}) \leq H_1$$
$$H(B^{e+1})\psi_{j-1}^q(A^d, B^{e+1}) \leq C_{26} H_1^{1-\frac{j-1+n-t}{(j-1)(j+n-d-e)}}.$$

On applique le Going-down avec $y_1 = \ldots = y_h = \dfrac{j+e}{(j-1)qh} \geq \dfrac{1}{qh}$. On peut l'appliquer car les $\omega_i(A^d, B^{e+1})$, pour $i \in [\![1,h]\!]$ satisfont la même majoration que $\psi^q_{j-1}(A^d, B^{e+1})$. En effet pour $\in [\![1,h]\!]$, cela est clair et pour $i = h$, on a $\omega_h(A^d, B^{e+1}) = \omega_{d+e-n+j}(A^d, B^{e+1}) = \psi_{j-1}(A^d, B^{e+1})$.
Cela nous donne $y = \dfrac{j+e}{(j-1)q}$ et $y'_1 = \ldots y'_h = \dfrac{j+e}{jqh}$.
Il existe donc B^e tel que :

$$\begin{aligned} H(B^e) &\leq C_5 H_1^{\frac{e+qy}{e+1}} = H \\ H(B^e)\psi^q_j(A^d, B^e) &\leq C_7 c^q H^{1-\frac{j+e}{jh}} = C_{26} H^{1-\frac{j+e}{j(j+d+e-n)}}. \end{aligned}$$

On n'oublie pas d'augmenter la constante C_{26} pour gérer les "petits" H et on a alors le théorème pour $e \leq d$.
• Cas $e \geq d$: On traite de la même façon ce cas par récurrence. L'initialisation étant faite dans le cas précédent, il ne reste que l'hérédité à prouver. Celle-ci se fait en appliquant le Going-down comme précédemment avec des valeurs y_i bien choisies.

■

On associe à ce théorème le corollaire suivant de la même manière que pour le théorème 5.1.2.

Corollaire 5.3.4. *Soit $d, e > 0$ tels que $d + e < n$. Soit $1 \leq j \leq t = \min(d, e)$ tel que :*

$$j + n - t \geq j(j + n - d - e).$$

Soit $A^d \subset G^n$ tel que :

$$\textit{pour tout } B^e \textit{ défini sur } \mathbb{K}, \dim(A^d \cap B^e) < j.$$

Alors il existe une infinité de sous-espaces B^e définis sur $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$\psi^q_j(A^d, B^e) \leq C_{26} H(B^e)^{-\frac{j+n-t}{j(j+n-d-e)}}. \tag{23}$$

Preuve. On distingue deux cas :
• Cas $j + n - t > j(j + n - d - e)$:
On raisonne alors comme dans la preuve du corollaire 5.1.3 en utilisant que $H^{1-\frac{j+n-t}{j(j+n-d-e)}}$ tend vers 0 quand $H \longrightarrow \infty$ et en divisant par $H(B^e)$ dans (22).
• Cas $j + n - t = j(j + n - d - e)$:
On remarque déjà que cela implique $j > 1$ (car $d, e > 0$).
On suppose d'abord que $e \leq d$, on a alors $t = e$. On a construit dans la preuve précédente un sous-espace B^{e+1} contenant B^e tel que :

$$H(B^{e+1})\psi^q_{j-1}(A^d, B^{e+1}) \leq C_{26} H_1^{1-\frac{j-1+n-t}{(j-1)(j-1+n-d-e)}}.$$

On en déduit $\psi^q_{j-1}(A^d, B^e) \leq C_{26} H_1^{1-\frac{j-1+n-t}{(j-1)(j-1+n-d-e)}}$. Or $1 - \dfrac{j-1+n-t}{(j-1)(j-1+n-d-e)} < 0$, donc en appliquant toujours le même raisonnement consistant à faire tendre H_1 vers l'infini, on trouve une infinité de sous-espaces B^e satisfaisant :

$$\psi^q_j(A^d, B^e) \leq C_{26} H(B^e)^{-\frac{j+n-t}{j(j+n-d-e)}}.$$

Le cas $d < e$ se traite de manière similaire.

■

Théorème 5.3.5. *Soit $0 < d < n$. On note $u = \min(d, n-d)$. Soit $A^d \subset G^n$ et $H \geq 1$.*
Alors il existe des espaces $B^1 \subset \ldots \subset B^u$ définis sur $\mathbb{K}$ tels que :

$$H(B^i) \leq H^i \tag{24}$$

$$H(B^i)\mu^q(A^d, B^i) \leq C_{27} H^{-\frac{d}{n-d}-\frac{d+1}{n-d-1}-\cdots-\frac{d+i-1}{n-d-i+1}}. \tag{25}$$

Plus précisement on a :

$$\mu^q(A^d, B^i) \leq C_{27} H(B^i)^{\frac{n}{i}\left(-\frac{1}{n-d}-\frac{1}{n-d-1}-\cdots-\frac{1}{n-d-i+1}\right)}.$$

Preuve. Comme $\psi_1(A^d, B^1) = \mu(A^d, B^1)$, le théorème 5.1.2 nous donne l'existence d'un espace B^1 vérifiant (24) et (25) pour $i = 1$.
On suppose maintenant qu'on a construit i premiers espaces $B^1 \subset \ldots \subset B^i$ avec $i < u$.
On applique le théorème 5.2.4 avec H^i et $x = \frac{1}{i}\left(\frac{d}{n-d} + \frac{d+1}{n-d-1} + \ldots + \frac{d+i-1}{n-d-i+1}\right)$. Alors :

$$ix + \frac{d+i}{n-d-i} = \frac{d}{n-d} + \frac{d+1}{n-d-1} + \ldots + \frac{d+i}{n-d-i}.$$

Il existe donc un espace B^{i+1} défini sur $\mathbb{K}$ contenant B^i tel que :

$$H(B^{i+1}) \leq \left(H^i\right)^{\frac{i+1}{i}} = H^{i+1}$$
$$H(B^{i+1})\mu^q(A^d, B^{i+1}) \leq C_{22}C_{27}\left(H^{i+1}\right)^{-\frac{ix+\frac{d+i}{n-d-i}}{i+1}} = \tilde{C}_{27}H^{-\frac{d}{n-d}-\frac{d+1}{n-d-1}-\ldots-\frac{d+i}{n-d-i}}.$$

Notre espace B^{i+1} convient pour notre théorème (quitte à changer C_{27} en $\tilde{C}_{27}$).
On précise maintenant le calcul pour obtenir la dernière majoration. On divise (25) par $H(B^i)$ et comme $H(B^i) \leq H^i$ on a :

$$\mu^q(A^d, B^i) \leq C_{27}H(B^i)^{\frac{1}{i}\left(-\frac{d}{n-d}-\frac{d+1}{n-d-1}-\ldots-\frac{d+i-1}{n-d-i+1}\right)-1}$$

On simplifie l'exposant :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i}\left(-\frac{d}{n-d} - \frac{d+1}{n-d-1} - \ldots - \frac{d+i-1}{n-d-i+1}\right) - 1\\
&= \frac{1}{i}\left(-\frac{d}{n-d} - \frac{d+1}{n-d-1} - \ldots - \frac{d+i-1}{n-d-i+1} - i\right)\\
&= -\frac{1}{i}\left(\left(\frac{d}{n-d}+1\right) + \left(\frac{d+1}{n-d-1}+1\right) + \ldots + \left(\frac{d+i-1}{n-d-i+1}+1\right)\right)\\
&= -\frac{1}{i}\left(\left(\frac{n}{n-d}\right) + \left(\frac{n}{n-d-1}\right) + \ldots + \left(\frac{n}{n-d-i+1}\right)\right)\\
&= \frac{n}{i}\left(-\frac{1}{n-d} - \frac{1}{n-d-1} - \ldots - \frac{1}{n-d-i+1}\right),
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'exposant annoncé.

■

Corollaire 5.3.6. *Soit $d, e > 0$ tels que $d + e < n$.On note $t = \min(d, e)$. Soit $A^d \subset G^n$ et $H \geq 1$. Alors il existe un espace B^e défini sur $\mathbb{K}$ tel que :*

$$H(B^e) \leq H$$
$$H(B^e)^{\frac{n-t}{n-e}}\mu^q(A^d, B^e) \leq C_{28}H^{-\left(\frac{n-t}{t(n-e)}\right)\left(\frac{d}{n-d}+\frac{d+1}{n-d-1}+\ldots+\frac{d+t-1}{n-d-t+1}\right)}.$$

Plus précisement on a :

$$\mu^q(A^d, B^e) \leq C_{28}H(B^e)^{-\left(\frac{n(n-t)}{t(n-e)}\right)\left(\frac{1}{n-d}+\frac{1}{n-d-1}+\ldots+\frac{1}{n-d-t+1}\right)}.$$

Preuve.
• Cas $e \leq d$:
On a alors $t = e$. On applique le théorème 5.3.5 avec $H^{\frac{1}{e}}$. On trouve alors B^e tel que :

$$H(B^e) \leq H$$
$$H(B^e)\mu^q(A^d, B^e) \leq C_{27}H^{\frac{1}{e}\left(-\frac{d}{n-d}-\frac{d+1}{n-d-1}-\ldots-\frac{d+e-1}{n-d-e+1}\right)}.$$

Cet espace B^e convient donc pour notre théorème.
• Cas $e \geq d$:
On a alors $t = d$. On raisonne par récurrence sur e.
L'initialisation est $e = d$ et a été traitée dans le cas précédent.

On va appliquer le Going-up (théorème 5.2.1) pour l'hérédité. On pose $H_1 = \left(\dfrac{H}{C_3}\right)^{\frac{n-e}{n-e-1}}$. On suppose H suffisamment grand pour que $H_1 \geq 1$. On suppose qu'on a un espace B^e tel que

$$\begin{aligned} &H(B^e) \leq H_1 \\ &H(B^e)^{\frac{n-t}{n-e}}\mu^q(A^d, B^e) \leq C_{28} H_1^{-\left(\frac{n-t}{t(n-e)}\right)\left(\frac{d}{n-d}+\frac{d+1}{n-d-1}+\ldots+\frac{d+t-1}{n-d-t+1}\right)}. \end{aligned}$$

On peut alors trouver, pour $i \in [\![1,t]\!]$, $x_i, y_i \geq 0$ tel que :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{t} x_i = \frac{n-t}{q(n-e)} \\ &\sum_{i=1}^{t} y_i = \left(\frac{n-t}{qt(n-e)}\right)\left(\frac{d}{n-d}+\frac{d+1}{n-d-1}+\ldots+\frac{d+t-1}{n-d-t+1}\right) \\ &\forall\, i \in [\![1,t]\!], \quad H(B^e)^{x_i}\psi_i^q(A^d, B^e) \leq C_{28}^{\frac{1}{q}} H_1^{-y_i}. \end{aligned}$$

On applique alors le Going-up avec H_1, il existe B^{e+1} tel que :

$$\begin{aligned} &H(B^{e+1}) \leq C_3 H_1^{\frac{n-e-1}{n-e}} = H, \\ &H(B^{e+1})^{\frac{x_i(n-e)}{n-e-1}}\psi_i^q(A^d, B^{e+1}) \leq C_{28}^{\frac{1}{q}} C_4 H^{\frac{-y_i(n-e)}{n-e-1}}. \end{aligned}$$

On pose $\tilde{C}_{28} = C_{28}C_4^q$. On multiplie sur i et on passe à la puissance q dans la deuxième inégalité et comme $\mu(A^d, B^e) = \displaystyle\prod_{i=1}^{d} \psi_i(A^d, B^e)$, on trouve :

$$\begin{aligned} H(B^{e+1})^{\frac{n-t}{n-e-1}}\mu^q(A^d, B^{e+1}) &\leq \tilde{C}_{28} H^{-\left(\frac{-(n-e)}{n-e-1}\right)\left(\frac{n-t}{t(n-e)}\right)\left(\frac{d}{n-d}+\frac{d+1}{n-d-1}+\ldots+\frac{d+t-1}{n-d-t+1}\right)} \\ &= \tilde{C}_{28} H^{-\left(\frac{n-t}{t(n-e-1)}\right)\left(\frac{d}{n-d}+\frac{d+1}{n-d-1}+\ldots+\frac{d+t-1}{n-d-t+1}\right)}. \end{aligned}$$

Notre espace B^{e+1} convient et on traite les H "petits" en changeant la constante.
Enfin on prouve le cas particulier en divisant par $H(B^e)^{\frac{n-t}{n-e}}$ et en simplifiant l'exposant.

∎

5.4 Meilleures estimations possibles

Soit $L/\mathbb{K}$ une extension de corps de nombres ; un $\mathbb{K}$-plongement de L dans $\mathbb{C}$ est un plongement de L dans $\mathbb{C}$ induisant l'identité sur $\mathbb{K}$. On rappelle qu'une extension de corps $L/\mathbb{K}$ algébrique est dite normale si $\forall\, \sigma$ $\mathbb{K}$-plongement de L dans $\mathbb{C}$ on a $\sigma(L) \subset L$.
Pour $L/\mathbb{K}$ algébrique, il existe une plus petite extension L'/L tel que $L'/\mathbb{K}$ soit normale. On dit que L' est la clôture normale de L sur $\mathbb{K}$.
Si $L/\mathbb{K}$ est finie alors sa clôture normale l'est aussi.

On rappelle que le théorème de finitude du groupe de classes :

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres, alors $Cl(\mathbb{K})$ est fini,

où $Cl(\mathbb{K})$ est le groupe des idéaux fractionnaires de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ quotienté par $\mathbb{K}^*$. En particulier on a l'existence d'une borne $C_{30} = C_{30}(\mathbb{K})$ telle que pour tout idéal α de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ il existe $\tilde{\alpha}$ dans la classe de α tel que $N(\tilde{\alpha}) \leq C_{30}$.

Théorème 5.4.1. *Soit $d, e \in [\![1,n]\!]$ tels que $d+e \leq n$. On pose $t = \min(d,e)$.*
Soit L un corps de nombres contenant $\mathbb{K}$ avec $[L:\mathbb{K}] = n$ vérifiant dans les différents cas :

(a) L et les images de L par les $\mathbb{K}$-plongements de L dans $\mathbb{C}$ sont réels

(b) $L \subset \mathbb{C}$

Alors il existe un espace $A^d \subset G^n$ de dimension d défini sur la cloture normale L' de $L/\mathbb{Q}$ et $C_{29} = C_{29}(n,d,e,\mathbb{K},A^d)$ tel que :

$$\forall\ B^e \text{ défini sur } \mathbb{K}, \psi_t(A^d, B^e) \geq C_{29} H(B^e)^{-\frac{n}{qt(n+t-d-e)}}.$$

Preuve. Soit $c = n - d$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_c, \beta_1, \ldots, \beta_d$ une base de $L/\mathbb{K}$.
On notera comme usuellement, $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ les plongements de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$. On supposera que $\sigma_1 = id$ et dans le cas (b), $\sigma_2 : z \mapsto \bar{z}$.
On a $[L : \mathbb{Q}] = np$. On note τ_{ij} les plongements de L dans $\mathbb{C}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$. On arrange les τ_{ij} de sorte que $\tau_{ij}|_{\mathbb{K}} = \sigma_j$. En notant alors $\tau_i = \tau_{i1}$, on a $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ qui est l'ensemble des $\mathbb{K}$-plongements de L dans $\mathbb{C}$.
Dans le cas (b), on s'arrange pour avoir $\tau_{i1} = \overline{\tau_{i2}}$.
Soit $M = (\alpha_j^{\tau_i})_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,c]\!]}$. Alors M est de rang c par définition des α_j, on suppose sans perte de généralité que $M_{\underline{1},\underline{1}} = (\alpha_j^{\tau_i})_{i \in [\![1,c]\!], j \in [\![1,c]\!]}$ est de rang c.
Soit $N = (\beta_j^i)_{i \in [\![1,c]\!], j \in [\![1,d]\!]}$. On écrit :

$$(\gamma_{ji})_{i \in [\![1,c]\!], j \in [\![1,d]\!]} = (M_{\underline{1},\underline{1}})^{-1} N \in \mathrm{M}_{c,d}(L').$$

On a alors pour $i \in [\![1, c]\!], j \in [\![1, d]\!]$:

$$\beta_j^{\tau_i} = \gamma_{j1}\alpha_1^{\tau_i} + \ldots + \gamma_{jc}\alpha_c^{\tau_i}.$$

On pose maintenant les vecteurs de G^n :

$$\begin{aligned} Y_1 &= (1, 0, \ldots, 0, \gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1c}) \\ &\vdots \\ Y_d &= (0, \ldots, 0, 1, \gamma_{d1}, \ldots, \gamma_{dc}) \end{aligned}$$

Et on pose enfin $A^d = \mathrm{Vect}(Y_1, \ldots, Y_d)$. On montre que cet espace convient.
• Cas $e = 1$: On a alors $t = 1$. Soit B^1 défini sur $\mathbb{K}$. On choisit $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n$ tel que $B^1 = \mathrm{Vect}(X)$.
En notant α l'idéal fractionnaire engendré par les ξ_i, on peut supposer $N(\alpha) \leq C_{30}(\mathbb{K})$ quitte à multiplier à multiplier tous les ξ_i par un même $z \in \mathbb{K}^*$.
On pose $c_0 = \psi_1(A^d, B^1)H(B^1)^{\frac{n}{qc}}$; le but de la preuve est de minorer c_0 par une constante.
D'après la propriété 4.3.5 on a :

$$\begin{aligned} D(X, Y_1, \ldots, Y_d) &= \mu(A^d, B^1)D(X)D(Y_1, \ldots, Y_d) \\ &= \psi_1(A^d, B^1)\|X\|D(Y_1, \ldots, Y_d) \\ &= c_0\|X\|D(Y_1, \ldots, Y_d)H(B^1)^{-\frac{n}{qc}}. \end{aligned}$$

Par le lemme 2.4.4 les mineurs de taille $d + 1$ de la matrice $(X \mid Y_1 \mid \ldots \mid Y_d)$ sont majorés (en module) par $c_0\|X\|D(Y_1, \ldots, Y_d)H(B^1)^{-\frac{n}{qc}}$.
Soit $k \in [\![1, c]\!]$. Soit D_k la matrice de taille $(d + 1) \times (d + 1)$ extraite de $(X \mid Y_1 \mid \ldots \mid Y_d)$ avec pour lignes $1, \ldots, d, d + k$. Alors :

$$D_k = \begin{pmatrix} \xi_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_d & 0 & \cdots & 1 \\ \xi_{d+k} & \gamma_{1k} & \cdots & \gamma_{dk} \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne de D_k on a :

$$|\xi_1\gamma_{1k} + \ldots + \xi_d\gamma_{dk} - \xi_{d+k}| = |\det(D_k)| \leq c_0\|X\|D(Y_1, \ldots, Y_d)H(B^1)^{-\frac{n}{qc}}. \quad (26)$$

On pose ϕ la forme linéaire telle que $\phi(X) = \xi\beta_1 + \ldots + \xi_d\beta_d - \xi_{d+1}\alpha_1 - \ldots - \xi_n\alpha_c$. En multipliant (26) par $\alpha_k^{\tau_i}$ et en sommant sur k on arrive à :

$$\begin{aligned} \forall\ i \in [\![1, c]\!], |\phi^{\tau_i}(X)| &= |\xi\beta_1^{\tau_i} + \ldots + \xi_d\beta_d^{\tau_i} - \xi_{d+1}\alpha_1^{\tau_i} - \ldots - \xi_n\alpha_c^{\tau_i}| \\ &\leq c_0 C_{31}\|X\|H(B^1)^{-\frac{n}{qc}}, \end{aligned}$$

avec C_{31} qui dépend de A^d.

Par continuité il existe C_{32} tel que $\forall\ c < i \leq n, |\phi^{\tau_i}(X)| \leq C_{32}\|X\|$. On peut alors calculer :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} |\phi(X)^{\tau_i}| &= \prod_{i=1}^{n} |\phi^{\tau_i}(X)| \\ &= \prod_{i=1}^{c} |\phi^{\tau_i}(X)| \prod_{i=c+1}^{c} |\phi^{\tau_n}(X)| \\ &\leq \left(c_0 C_{31}\|X\|H(B^1)^{-\frac{n}{qc}}\right)^c (C_{32}\|X\|)^d \\ &= c_0^c C_{33}\|X\|^n H(B^1)^{-\frac{n}{q}}.\end{aligned}$$

Dans le cas (b) on a $\tau_{i1} = \overline{\tau_{i2}}$ donc et alors $|\phi(X)^{\tau_{i1}}| = |\phi(X)^{\tau_{i2}}|$ ce qui donne :

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{q} |\phi(X)^{\tau_{ij}}| \leq c_0^{cq} C_{33}^q \|X\|^{qn} H(B^1)^{-n}.$$

Soit $C_{34} > 0$ tel que pour tout i, j on ait $|\phi(X)^{\tau_{ij}}| \leq C_{34}\|X^{\sigma_j}\|$. On a alors :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{p} |\phi(X)^{\tau_{ij}}| &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{q} |\phi(X)^{\tau_{ij}}| \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=q+1}^{p} |\phi(X)^{\tau_{ij}}| \\ &\leq c_0^{cq} C_{33}^q \|X\|^{qn} H(B^1)^{-n} \left(\prod_{j=q+1}^{p} \|X^{\sigma_j}\|\right)^n \\ &= c_0^{cq} C_{33}^q H(B^1)^{-n} N(\alpha)^n H(B^1)^n \\ &\leq c_0^{cq} C_{34},\end{aligned}$$

car $H(B^1) = \dfrac{1}{N(\alpha)} \displaystyle\prod_{j=1}^{p} \|X^{\sigma_j}\|$ et $\|X^{\sigma_1}\| = \|X^{\sigma_q}\|$. Les nouvelles constantes évoquées ici ne dépendent que de A^d.

D'autre part on a $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{p} |\phi(X)^{\tau_{ij}}| = |N_L(\phi(X))|$.

Comme $X \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n \setminus \{0\}$, $\phi(X) \neq 0$ et les éléments $\beta_1, \ldots, \beta_d, \alpha_1, \ldots, \alpha_c \in\ L$ définissant ϕ sont fixés, il existe une constante $C_{39} > 0$ telle que $|N_L(\phi(X))| \geq C_{39}$ pour $X \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n \setminus \{0\}$.

On en déduit alors qu'il existe $C_{29} > 0$ tel que $C_{29} \leq c_0$. Cela démontre le théorème pour le cas $e = 1$.

- Cas $e \leq d$: On a alors $t = e$ et $n + t - d - e = n - d$. L'espace A^d construit auparavant convient toujours et on le montre par récurrence sur e. Soit B^e de dimension e défini sur $\mathbb{K}$, on note :

$$c_0 = \psi_t(A^d, B^e)H(B^e)^{\frac{n}{q(n-d)t}}.$$

Par le théorème 3.3.2 (b), il existe un espace B^{e-1} défini sur $\mathbb{K}$ avec $B^{e-1} \subset B^e$ tel que :

$$H(B^{e-1}) \leq c_1 H(B^e)^{\frac{e-1}{e}}.$$

On a par ailleurs, $\psi_{t-1}(A^d, B^{e-1}) \leq \psi_t(A^d, B^e)$ (lemme 4.1.5) et donc :

$$\begin{aligned}\psi_{t-1}(A^d, B^{e-1}) &\leq c_0 H(B^e)^{-\frac{n}{q(n-d)t}} \\ &\leq \frac{c_0}{c_1^{\frac{e}{e-1}}} H(B^{e-1})^{-\frac{en}{q(n-d)t(e-1)}} \\ &= c_0 C_{38} H(B^{e-1})^{-\frac{n}{q(n-d)(t-1)}} \text{ car } t = e.\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $\psi_{t-1}(A^d, B^{e-1})H(B^{e-1})^{-\frac{n}{q(n-d)(t-1)}}$ est bornée inférieurement donc en particulier $c_0 C_{38}$ aussi et donc c_0 aussi. Cela nous donne le théorème dans le cas $e \leq d$.

- Cas $d \leq e$: On alors $t = d$ et $n + t - d - e = n - e$. Comme $d + e \leq n$, on a de plus $e \leq n - d$. On raisonne par récurrence descendante sur e.

Le cas $e = n - d$ se traite par dualité grâce au cas $e \leq d$.

Soit B^{e-1} défini sur $\mathbb{K}$. On pose comme auparavant :

$$c_0 = \psi_t(A^d, B^{e-1})H(B^{e-1})^{\frac{n}{qt(n-e+1)}}.$$

On applique le Going-up (théorème 5.2.1) avec $x_t = 0$, $y_t = -\dfrac{n}{qt(n-e+1)}$. Il existe un espace B^e contenant B^{e-1} tel que :

$$\begin{aligned}\psi_t(A^d, B^e) &\leq c_0 C_{39} H(B^e)^{-\frac{n(n-e+1)}{qt(n-e+1)(n-e)}} \\ &= c_0 C_{39} H(B^e)^{-\frac{n}{qt(n-e)}}.\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence $\psi_t(A^d, B^e) H(B^e)^{\frac{n}{qt(n-e)}}$ est bornée inférieurement donc en particulier $c_0 C_{39}$ aussi et donc c_0 aussi. Cela nous donne le théorème dans le cas $d \leq e$.

■

Corollaire 5.4.2. *Soit $d, e \in [\![1, n]\!]$ tels que $d + e \leq n$. On pose $t = \min(d, e)$. On suppose de plus que :*

$$n \geq t(t + n - d - e).$$

Soit $A^d \subset G^n$ tel que pour tout B^e défini sur $\mathbb{K}$:

- *Si $n >$ t(t+n-d-e) alors $\dim(A^d \cap B^e) < t$.*
- *Si $n=$ t(t+n-d-e) alors $\dim(A^d \cap B^e) < t - 1$.*

Alors il existe une infinité d'espaces B^e définis sur $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$\psi_t^q(A^d, B^e) \leq C_{29} H(B^e)^{-\frac{n}{t(t+n-d-e)}}.$$

De plus l'exposant $\dfrac{n}{t(t+n-d-e)}$ est le meilleur possible.

Preuve. L'existence d'une infinité d'espaces B^e vient simplement du corollaire 5.3.4 avec $j = t$.
Le théorème 5.4.1 nous donne que l'exposant est le meilleur possible. Pour cela il nous faut une extension de corps $L/\mathbb{K}$ de degré n vérifiant les bonnes conditions dans les cas (a) et (b). Soit l un nombre premier tel que :

$$l \equiv 1 \mod 2n \text{ et } l > p.$$

Soit ζ_l une racine primitive l-ième de l'unité. On a $\zeta_l \notin \mathbb{K}$. On note $M = \mathbb{K}(\zeta_l + \overline{\zeta_l})$. Alors :

$$\begin{aligned}[M : \mathbb{K}] &= \frac{[\mathbb{K}(\zeta_l) : \mathbb{K}]}{[\mathbb{K}(\zeta_l) : M]} \\ &= \frac{l-1}{2}.\end{aligned}$$

Ces extensions sont galoisiennes et $\#\mathrm{Gal}(M/\mathbb{K}) = \dfrac{l-1}{2}$ est divisible par n. On peut même voir que $G = \mathrm{Gal}(M/\mathbb{K})$ est cyclique (car $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}(\zeta_l)/\mathbb{K})$ l'est), et on pose H un sous-groupe d'indice n de G.
On pose $L = M^H$ le sous-corps de M stabilisé par H et on montre que L convient. On a :

$$[L : \mathbb{K}] = [G : H] = n.$$

On montre maintenant que L vérifie les conditions du théorème. Le cas (b) est trivial et il n'y a rien à vérifier. Dans le cas (a) : $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$. Soit σ un plongement de L dans $\mathbb{C}$. On peut prolonger σ en $\tilde{\sigma}$ plongement de M dans $\mathbb{C}$. Comme $M \subset \mathbb{R}$, on a $\sigma(L) \subset \tilde{\sigma}(M) \subset M \subset \mathbb{R}$ car M est normale car galoisienne.
On peut donc appliquer le théorème 5.4.1 qui minore $\psi_t(A^d, B^e)$ et cela conclut.

■

5.5 Bornes inférieures

On énonce ici quelques résultats démontrés par Schmidt dans la partie 14 de [10]. La notation $\lceil \cdot \rceil$ désigne la partie entière supérieure dans $\mathbb{R}$.

Théorème 5.5.1. *Soit $d, e \in [\![1, n]\!]$ tels que $d + e \leq n$. On pose $t = \min(d, e)$ et*

$$m = \left\lceil \frac{e(n-e)+1}{n+1-d-e} \right\rceil.$$

Soit L un corps de nombres contenant $\mathbb{K}$ avec $[L : \mathbb{K}] = l \geq m$ vérifiant dans les différents cas :

(a) $L \subset \mathbb{R}$
(b) $L \subset \mathbb{C}$.

Alors il existe A^d défini sur L et une constante $C_{40} = C_{40}(n, d, e, \mathbb{K}, L, A^d)$ tels que :

$$\forall\ B^e \text{ défini sur } \mathbb{K}, \mu^q(A^d, B^e) \geq C_{40} H(B^e)^{-l}.$$

Corollaire 5.5.2. *Soit $d, e \in [\![1, n]\!]$ tels que $d + e \leq n$. On pose $t = \min(d, e)$. On pose :*

$$m = \left\lceil \frac{e(n-e)+1}{n+1-d-e} \right\rceil.$$

Alors il existe un sous-espace A^d de G^n et une constante $C_{41} = C_{41}(n, d, e, \mathbb{K}, A^d)$ tels que :

$$\forall\ B^e \text{ défini sur } \mathbb{K}, \quad \mu^q(A^d, B^e) \geq C_{41} H(B^e)^{-m}.$$

Corollaire 5.5.3. *Soit $d, e \in [\![1, n]\!]$ tels que $d + e \leq n$. On pose $t = \min(d, e)$. On pose :*

$$m = \left\lceil \frac{e(n-e)+1}{n+1-d-e} \right\rceil.$$

Soit $i \in [\![1, \min(d, e)]\!]$. Alors il existe un sous-espace A^d de G^n et une constante $C_{42} = C_{42}(n, d, e, \mathbb{K}, A^d)$ tels que :

$$\forall\ B^e \text{ défini sur } \mathbb{K}, \quad \psi_i^q(A^d, B^e) \geq C_{42} H(B^e)^{-\frac{m}{i}}.$$

6 Exposants d'irrationnalité et d'approximation

On généralise ici la notion d'exposant d'irrationnalité définie sur les réels et rappelée en introduction. Les définitions et notations proviennent de [5].

6.1 Définitions

Il faut d'abord généraliser la notion d'irrationnalité pour des espaces de dimension d.
On note $\mathcal{R}_{n,\mathbb{K}}(e)$ l'ensemble des sous-espaces $\mathbb{K}$-rationnels de G^n de dimension e, c'est-à-dire les espaces de dimension e qui admettent une base formée de vecteurs à coordonnées dans $\mathbb{K}$.

Définition 6.1.1. Soit $d, e \geq 1$ tels que $d + e \leq n$. Soit $1 \leq j \leq \min(d, e)$. Soit $A^d \subset G^n$ un sous-espace de dimension d.
On dit que A^d est (e, j)-$\mathbb{K}$-irrationnel si pour tout sous-espace B^e $\mathbb{K}$-rationnel de dimension e :

$$\dim(A^d \cap B^e) < j.$$

On note $\mathcal{I}_{n,\mathbb{K}}(d, e)_j$ l'ensemble des sous-espaces (e, j)-$\mathbb{K}$-irrationnels de dimension d de G^n.

Définition 6.1.2. Soit $A^d \in \mathcal{I}_{n,\mathbb{K}}(d, e)_j$. On définit le **$j$-ième exposant d'irrationnalité** de A par :

$$\mu_{n,\mathbb{K}}(A|e)_j = \sup \left\{ \beta > 0 \mid \text{ il existe une infinité d'espaces } B^e \in \mathcal{R}_{n,\mathbb{K}}(e) \text{ tels que } \psi_j^q(A^d, B^e) \leq \frac{1}{H(B)^\beta} \right\}$$

On définit alors le **j-ième d-exposant de e-approximation** par :

$$\mathring{\mu}_{n,\mathbb{K}}(d|e)_j = \inf_{A \in \mathcal{I}_{n,\mathbb{K}}(d,e)_j} \mu_{n,\mathbb{K}}(A|e)_j$$

On se permettra de noter seulement $\mu_n(d|e)_j$ et $\mathring{\mu}_n(d|e)_j$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Propriété 6.1.3. *Soit $d, e \geq 1$ tels que $d + e \leq n$. Soit $1 \leq l \leq e$ et $1 \leq j \leq \min(l, d)$.*
Alors :

$$\frac{n-l}{n-e} \mathring{\mu}_{n,\mathbb{K}}(d|l)_j \leq \mathring{\mu}_{n,\mathbb{K}}(d|e)_j.$$

Preuve. Soit $A \in \mathcal{I}_{n,\mathbb{K}}(d, e)_j$. On montre que pour $l < e$, on a $A \in \mathcal{I}_{n,\mathbb{K}}(d, l)_j$ et

$$\frac{n-l}{n-e} \mu_{n,\mathbb{K}}(A^d|l)_j \leq \mu_{n,\mathbb{K}}(A^d|e)_j.$$

Cela nous donnera alors la propriété en passant à l'inf car $\mathcal{I}_{n,\mathbb{K}}(d, e)_j \subset \mathcal{I}_{n,\mathbb{K}}(d, l)_j$.
On se simplifie la tâche en démontrant seulement :

$$\frac{n-l}{n-l-1} \mu_{n,\mathbb{K}}(A^d|l)_j \leq \mu_{n,\mathbb{K}}(A^d|l+1)_j.$$

En effet, pour conclure il suffit simplement de remarquer que :

$$\prod_{k=l}^{e-1} \frac{n-k}{n-k-1} = \frac{n-l}{n-e}.$$

Dans la suite, on écrira $\mu = \mu_{n,\mathbb{K}}(A^d|l)_j$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de μ il existe une infinité d'espaces $B^l \in \mathcal{R}_{n,\mathbb{K}}(l)$ tels que :

$$\psi_j^q(A^d, B^l) \leq \frac{1}{H(B^l)^{\mu-\varepsilon}}.$$

On applique le théorème du Going-up (théorème 5.2.1) avec $H = H(B^l), x_j = 0, y_j = \dfrac{\mu - \varepsilon}{q}$. Il existe alors B^{l+1} $\mathbb{K}$-rationnel tel que $H(B^{l+1}) \leq H'$ et

$$\psi_j^q(A^d, B^{l+1}) \leq \left(C_4 H'^{-\left(\frac{\mu+\varepsilon}{q}\right)\left(\frac{n-l}{n-l-1}\right)} \right)^q \leq C H(B^{l+1})^{-(\mu-\varepsilon)\left(\frac{n-l}{n-l-1}\right)}. \tag{27}$$

Comme $A^d \in \mathcal{I}_{n,\mathbb{K}}(d,l+1)_j$ on a $\psi_j(A^d, B^{l+1}) > 0$ pour tout $B^{l+1} \in \mathcal{R}_{n,\mathbb{K}}(l+1)$.
On suppose par l'absurde qu'il n'existe qu'un nombre fini de B^{l+1} vérifiant (27). Alors avec ce qui précède on aurait une constante $m > 0$ telle que :

$$\forall\ B^{l+1} \in \mathcal{R}_{n,\mathbb{K}}(l+1), \psi_j(A^d, B^{l+1}) \geq m.$$

Or comme il existe une infinité de B^l, on pourrait en choisir un tel que $\psi_j(A^d, B^l) < m$ (on peut prendre sa hauteur arbitrairement grande). Et alors :

$$\psi_j(A^d, B^{l+1}) \leq \psi_j(A^d, B^l) < m,$$

ce qui est absurde. Il existe donc une infinité d'espaces $B^{l+1} \in \mathcal{R}_{n,\mathbb{K}}(l+1)$ vérifiant (27).
On en déduit alors :

$$\mu_{n,\mathbb{K}}(A^d|l+1)_j \geq (\mu - \varepsilon)\,\frac{n-l}{n-l-1}.$$

Cela est valable pour tout ε, en le faisant tendre vers 0 on trouve alors :

$$\mu_{n,\mathbb{K}}(A^d|l)_j \frac{n-l}{n-l-1} \leq \mu_{n,\mathbb{K}}(A^d|l+1)_j,$$

ce qui conclut la preuve.

■

6.2 Résultats

On peut reformuler les résultats obtenus précédemment en terme d'exposant. Tous les résultats sont donnés dans le cas $d+e \leq n$.
Le corollaire 5.1.3 nous donne :

$$\mathring{\mu}_{n,\mathbb{K}}(d|e)_e \geq \frac{d}{e(n-d)}.$$

Le corollaire 5.3.2 améliore cela en :

$$\mathring{\mu}_{n,\mathbb{K}}(d|e)_j \geq \frac{d(n-j)}{j(n-d)(n-e)}$$
$$\mathring{\mu}_{n,\mathbb{K}}(d|e)_1 \geq \frac{n(n-1)}{(n-d)(n-e)}.$$

Le corollaire 5.3.4 nous donne :

$$\text{Pour } j+n-t \geq j(j+n-d-e) \text{ avec } t = \min(d,e),$$
$$\mathring{\mu}_{n,\mathbb{K}}(d|e)_j \geq \frac{j+n-t}{j(j+n-d-e)}.$$

Le corollaire 5.4.2 donne :

$$\text{Pour } n \geq t(t+n-d-e) \text{ avec } t = \min(d,e),$$
$$\mathring{\mu}_{n,\mathbb{K}}(d|e)_t = \frac{n}{t(t+n-d-e)}.$$

En particulier, comme dans le cas $t = 1$, l'inégalité $n \geq t(t+n-d-e)$ est toujours vérifiée, on détermine $\mathring{\mu}_{n,\mathbb{K}}(d|1)_1$ et $\mathring{\mu}_{n,\mathbb{K}}(1|e)_1$ pour tous d et e. On a ainsi résolu le problème dans le cas où l'on cherche à approcher des droites ou à approcher des sous-espaces par des droites.
Le corollaire 5.5.3 donne :

$$\mathring{\mu}_{n,\mathbb{K}}(d|e)_j \leq \frac{1}{j}\left\lceil \frac{e(n-e)+1}{n+1-d-e} \right\rceil.$$

6.3 Conjectures

6.3.1 Conjecture de Joseph

Schmidt propose à la fin de son article une méthode pour étudier des espaces mal approchés par des droites. Ceux-ci seront en effet mieux approchés par des espaces de dimension supérieure. Cette méthode est appliquée dans [5] et permet à Joseph de conjecturer une valeur pour $\mathring{\mu}_n(d|e)_e$.
Soit $d \in [\![1, n-1]\!]$ et $e \in [\![1, \min(d, n-d)]\!]$. Soit $A^d \in \mathcal{I}_{n,\mathbb{K}}(d,e)_e$ un sous-espace mal approché par des droites dans le sens :

$\forall\ \varepsilon > 0$ il n'existe qu'un nombre fini d'espaces $B^1 \in \mathcal{R}_{n,\mathbb{K}}(1)$ tels que $\psi_1^q(A^d, B^1) \leq H(B^1)^{-\left(\frac{n}{n-d}+\varepsilon\right)}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On peut alors trouver une constante $C = C(A, n, \varepsilon) > 0$ telle que :

$$\forall\ B^1 \in \mathcal{R}_{n,\mathbb{K}}(1),\ \psi_1^q(A^d, B^1) \geq CH(B^1)^{-\left(\frac{n}{n-d}+\varepsilon\right)}.$$

Par le corollaire 5.1.3, il existe une infinité d'espaces $B^1 \in \mathcal{R}_{n,\mathbb{K}}(1)$ et $B^e \in \mathcal{R}_{n,\mathbb{K}}(e)$ avec $B^1 \subset B^e$ tels que :

$$H(B^1)\psi_e^q(A^d, B^e) \leq C_1 H(B^e)^{-\frac{d}{e(n-d)}}.$$

Or $\psi_1^q(A^d, B^1) \geq CH(B^1)^{-\left(\frac{n}{n-d}+\varepsilon\right)}$ donc $\psi_1^q(A^d, B^1)^{\frac{n-d}{n+(n-d)\varepsilon}} \geq \tilde{C}H(B^1)^{-1}$.
En utilisant que $\psi_1(A^d, B^1) \leq \psi_e(A^d, B^e)$ et en combinant nos inégalités on arrive à :

$$\begin{aligned}\psi_e^q(A^d, B^e) &\leq \tilde{C}_1 H(B^e)^{-\frac{d}{e(n-d)}} \psi_1^q(A^d, B^1)^{\frac{n-d}{n+(n-d)\varepsilon}} \\ &\leq \tilde{C}_1 H(B^e)^{-\frac{d}{e(n-d)}} \psi_e^q(A^d, B^e)^{\frac{n-d}{n+(n-d)\varepsilon}}.\end{aligned}$$

On en conclut donc :

$$\psi_e^q(A^d, B^e)^{1-\frac{n-d}{n+(n-d)\varepsilon}} \leq \tilde{C}_1 H(B^e)^{-\frac{d}{e(n-d)}}.$$

Et donc :

$$\psi_e^q(A^d, B^e) \leq \tilde{\tilde{C}}_1 H(B^e)^{\frac{-d}{e(n-d)}\frac{\varepsilon(n-d)+n}{\varepsilon(n-d)+d}},$$

avec $\tilde{\tilde{C}}_1 = \tilde{\tilde{C}}_1(A, \varepsilon, e, n)$. On peut faire tendre ε vers 0, cela nous donne une minoration du e-ième exposant d'irrationnalité de A :

$$\mu_{n,\mathbb{K}}(A|e)_e \geq \frac{n}{e(n-d)}.$$

On avait auparavant $\mu_{n,\mathbb{K}}(A|e)_e \geq \dfrac{d}{e(n-d)}$. Pour des espaces mal approchés par des droites on a donc une amélioration d'un facteur $\dfrac{n}{d}$.
Joseph [5] s'est alors basé sur ces résultats et ceux de De Saxcé [8] pour émettre la conjecture suivante :

Conjecture 6.3.1 (Joseph)**.** *Soit $d \in [\![1, n-1]\!]$ et $e \in [\![1, \min(d, n-d)]\!]$. Alors :*

$$\mathring{\mu}_n(d|e)_e = \frac{n}{e(n-d)}.$$

6.3.2 Une mauvaise conjecture

On cherche maintenant à approcher ces mêmes espaces par un espace B^e mais lorsque l'on cherche seulement à rendre petit $\psi_j^q(A^d, B^e)$ avec $j \leq \min(d, e)$. On cherche donc à évaluer $\mathring{\mu}_{n,\mathbb{K}}(d|e)_j$. On se place dans le même contexte que la partie précédente avec $A^d \in \mathcal{I}_{n,\mathbb{K}}(d, e)_j$ un sous-espace mal approché par des droites.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède on peut trouver une infinité d'espaces $B^j \in \mathcal{R}_{n,\mathbb{K}}(j)$ tels que

$$\psi_j^q(A^d, B^j) \leq H(B^j)^{\frac{-n}{j(n-d)}+\varepsilon}.$$

On applique le théorème du going-up $(e-j)$ fois pour construire un espace $B^e \in \mathcal{R}_{n,\mathbb{K}}(e)$ qui approche A^d. De la même manière que dans la propriété 6.1.3, on construit une infinité d'espaces $B^e \in \mathcal{R}_{n,\mathbb{K}}(e)$ vérifiant :

$$\psi_j^q(A^d, B^e) \leq CH(B^e)^{-\left(\frac{n}{j(n-d)}-\varepsilon\right)\frac{n-j}{n-e}}.$$

On fait tendre ε vers 0 et on en déduit :

$$\mu_{n,\mathbb{K}}(A^d|e)_j \geq \frac{n(n-j)}{j(n-d)(n-e)}.$$

Auparavant on avait $\mu_{n,\mathbb{K}}(A^d|e)_j \geq \dfrac{d(n-j)}{j(n-d)(n-e)}$. Pour des espaces mal approchés par des droites on a donc toujours une amélioration d'un facteur $\dfrac{n}{d}$.

On pourrait alors raisonnablement conjecturer $\mathring{\mu}_{n,\mathbb{K}}(d|e)_j = \dfrac{n(n-j)}{j(n-d)(n-e)}$.
Or on peut simplement trouver un contre exemple à cette affirmation. Si on prend $n = 5$, $d = 3$, $e = 2$ et $j = 1$ on a :

$$\begin{aligned} j + n - t &= 4 \\ &\geq 1 \\ &= j(j + n - d - e). \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le corollaire 5.3.4, reformulé dans la partie 6.2 et on obtient :

$$\mathring{\mu}_{5,\mathbb{K}}(3|2)_1 \geq 4.$$

Or $\dfrac{n(n-j)}{j(n-d)(n-e)} = \dfrac{20}{6} < 4$.
Cela contredit directement notre conjecture. Il faut alors trouver une nouvelle approche pour estimer la valeur de $\mathring{\mu}_{n,\mathbb{K}}(d|e)_j$.

Références

[1] T. M. Apostol – *Introduction to analytic number theory*, Springer, 1976.

[2] J. Cassels – *An introduction to the geometry of numbers*, Grundlehren der Math. Wiss., no. 99, Springer, 1959.

[3] M. Hindry & J. H. Silverman – *Diophantine geometry, an introduction*, volume 201 de Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.

[4] W. V. D. Hodge & D. Pedoe – *Methods of algebraic geometry, tome 1*, Cambridge University Press, 1953.

[5] E. Joseph – « Approximation rationnelle de sous-espaces vectoriels », Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, soutenue en mai 2021 ; preprint arXiv 2101.07648 [math.NT].

[6] P.Caldero & J.Germoni – *Histoires hédonistes de groupes et géométries, tome second*, Calvage et Mounet, 2015.

[7] A. Poels – « The complex case of Schmidt's going-down theorem », *Monatsh Math* **184** (2017), p. 649–666.

[8] N. de Saxcé – « Groupes arithmétiques et approximation diophantienne », Mémoire en vue d'une habilitation à diriger des recherches, Université Sorbonne Paris Nord, disponible sur la page `https://www.math.univ-paris13.fr/~desaxce/`, 2020.

[9] S. Schanuel – « On heights in number fields », *Bulletin of the American Mathematical Society* **70** (1964), p. :262–263.

[10] W. Schmidt – « On heights of algebraic subspaces and Diophantine approximations », *Annals of Math.* **85** (1967), p. 430–472.

[11] D. Zeilberger & W. Zudilin – « The irrationality measure of pi is at most 7.103205334137... », *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory* (2020), p. 407–419.