

Théorème de CAUCHY linéaire

Thomas CHEN

Si l'on doit retenir un seul théorème du cours d'équations différentielles linéaires, c'est bien le théorème de Cauchy linéaire.

Ce théorème assure l'existence et l'unicité d'une solution à n'importe quelle équation différentielle linéaire munie de conditions initiales. La preuve habituelle fait appel à la complétude et point fixe, hors-programme en classe préparatoire. On contourne cette difficulté via la convergence uniforme et normale (ce qui revient à la complétude soit dit en passant).

Exercice 1.

- Dans cet exercice, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Pour tout $(E, \|\cdot\|)$ $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$, on note

$$\|f\|_{\infty, J} = \sup_{t \in J} \|f(t)\|.$$

pour $J \subset I$.

- On considère donc $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie et $\|\cdot\|$ est la norme d'opérateur associée à $\|\cdot\|$.
- Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in E$.
- Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$.
- Soit

$$(P) : \begin{cases} (E) & : y'(t) = a(t)(y(t)) + b(t) ; t \in I \\ (CI) & : y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

On souhaite montrer que (P) admet une et unique solution.

1. Dans cette question, K est un compact de I contenant t_0 . On considère $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{C}^0(I, E))^{\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, f_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t a(s)(f_n(s)) ds.$$

Montrer qu'il existe $M, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in K, \|f_n(t)\| \leq M \frac{(\alpha|t - t_0|)^n}{n!}.$$

2. Conclure sur l'unicité de la solution de (P) .
3. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I par $\forall t \in I, g_0(t) = y_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, g_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t (a(s)[g_n(s)] + b(s)) ds.$$

Montrer que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I et que cette limite est solution de (P) .

Corrigé :

1. f_0 est continue de K dans E donc par le théorème des bornes atteintes, f_0 est bornée. Ainsi, $\|f_0\|_{\infty} =: M$ existe et est bien défini. Ensuite, a est continue de K dans $\mathcal{L}(E)$ donc de même, a est bornée. Ainsi,

$\|a\|_\infty =: \alpha$ existe et est bien défini.

Cela signifie que

$$\forall t \in K, \|f_0(t)\| \leq M ; \forall t \in K, \|a(t)\| \leq \alpha.$$

Procédons par récurrence.

- Si $n = 0$, on a $\forall t \in K, f_n(t) = f_0(t)$ ce qui donne $\|f_n(t)\| \leq M = M \frac{(\alpha|t - t_0|)^0}{0!}$.
- Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall t \in K, \|f_n(t)\| \leq M \frac{(\alpha|t - t_0|)^n}{n!}.$$

Alors

$$\forall t \in K, \|f_{n+1}(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t a(s)(f_n(s)) ds \right\| \leq \int_{(t_0, t)} \|a(s)(f_n(s))\| ds$$

où (t_0, t) désigne l'intervalle $[t_0, t]$ ou $[t, t_0]$. Ensuite, on sait que pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E, F), \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq \|u\| \|x\|_E$ donc ici,

$$\forall t \in K, \forall s \in (t_0, t), \|a(s)(f_n(s))\| \leq \|a(s)\| \|f_n(s)\| \leq \alpha M \frac{(\alpha|s - t_0|)^n}{n!}.$$

On en déduit que

$$\forall t \in K, \|f_{n+1}(t)\| \leq M \frac{\alpha^{n+1}}{n!} \int_{(t_0, t)} |s - t_0|^n ds = M \frac{\alpha^{n+1}}{n!} \frac{|t - t_0|^{n+1}}{n+1} = M \frac{(\alpha|t - t_0|)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- Par le principe de récurrence, on obtient l'assertion souhaitée.

Cette question nous indique donc que la série $\sum f_n$ converge normalement sur tout compact de I contenant t_0 .

2. Soit y_1, y_2 deux solutions de (P) . Notons $z = y_1 - y_2$. On a déjà $z(t_0) = 0$. De plus, pour tout $t \in I$,

$$z'(t) = y_1'(t) - y_2'(t) = a(t)[y_1(t)] - a(t)[y_2(t)] = a(t)[y_1(t) - y_2(t)] = a(t)[z(t)].$$

Ainsi, en intégrant sur le segment (t_0, t) , on en déduit que

$$z(t) - z(t_0) = z(t) = \int_{t_0}^t a(s)[z(s)] ds.$$

On applique donc la question précédente : la série $\sum z$ converge normalement sur tout compact de I contenant t_0 : nécessairement, z est nulle donc $y_1 = y_2$.

3. Posons $h_n = g_{n+1} - g_n$. Alors

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, h_{n+1}(t) &= g_{n+2}(t) - g_{n+1}(t) \\ &= y_0 + \int_{t_0}^t (a(s)[g_{n+1}(s)] + b(s)) ds - y_0 - \int_{t_0}^t (a(s)[g_n(s)] + b(s)) ds \\ &= \int_{t_0}^t (a(s)[g_{n+1}(s) - g_n(s)]) ds \\ &= \int_{t_0}^t a(s)[h_n(s)] ds. \end{aligned}$$

$(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait donc la question 1) : la série $\sum h_n$ converge normalement sur tout compact de I contenant t_0 et par télescopage, on en déduit la même chose pour $(g_n)_n$. On souhaite maintenant montrer la même chose pour $(a \circ g_n + b)_n$. Déjà, elle converge simplement vers $a \circ g + b$ par continuité de a . On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \|a(t)[g_n(t)] + b(t) - a(t)[g(t)] - b(t)\| &= \|a(t)[(g_n - g)(t)]\| \\ &\leq \|a(t)\| \|g_n(t) - g(t)\| \\ &\leq \|a\|_\infty \|g_n(t) - g(t)\|. \end{aligned}$$

On en déduit que la convergence normale de $(g_n)_n$ sur tout compact de I contenant t_0 entraîne celle de $(a \circ g_n + b)_n$.

Notons maintenant g la limite de $(g_n)_n$. L'égalité

$$\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, g_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t a(s)[g_n(s)] + b(s)ds$$

passse donc à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ en vertu du théorème d'interversion limite-intégrale sous convergence normale. On obtient

$$\forall t \in I, g(t) = y_0 + \int_{t_0}^t a(s)[g(s)] + b(s)ds.$$

Comme $(g_n)_n$ est continue sur I et qu'on a convergence normale sur tout segment de I contenant t_0 , le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique et g est continue. Par continuité de a, b et que a est à valeurs dans $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}_c(E)$ (car E est de dimension finie), $t \mapsto a(t)[g(t)] + b(t)$ est continue donc par le théorème fondamental de l'analyse, g est $\mathcal{C}^1$. Ainsi, en dérivant la relation obtenue sur g , g vérifie (E) et $g(t_0) = y_0$ donc g vérifie (CI) . Ainsi, g vérifie (P) ce qui conclut.