Comparaison série-intégrale d'ordre 1

Thomas CHEN

Lorsque la comparaison série-intégrale échoue car on n'a pas la décroissance, on peut approximer avec un ordre plus élevé la comparaison grâce à l'intégrabilité de f'.

Exercice 1. 1. Montrer le théorème suivant :

> **Théorème 1.** *Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f' \in \mathrm{L}^1(]1, +\infty[)$. Alors $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\sum_{n\geq 0} f(n)$ ont la même nature.*

Remarque : on pourra remplacer $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge par $\left(\int_1^n f(t)\mathrm{d}t\right)_n$ converge, plus simple à montrer et suffisant pour la suite.

2. Étudier la nature des séries suivantes :

   a) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

   b) $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$.

3. Soit $\alpha > 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in^{1/2}}}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha > 1/2$ (Le sens direct est dur).

La suite est culturelle. Avec une formule du type Euler-Maclaurin, on peut démontrer le théorème suivant

> **Théorème 2.** *Soit $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Soit $f \in \mathcal{C}^p([0, +\infty[)$ telle que f et ses dérivées jusqu'à $p-1$ tendent vers 0 à l'infini et que $f^{(p)}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Alors $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.*

> **Corollaire 3.** Soit $\alpha > 0, \beta \in]0, 1[$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in^\beta}}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha + \beta > 1$

Corrigé :

1. Soit $F : x \in]0,+\infty[\mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Alors $F \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[)$ et par le théorème de Taylor avec reste intégral, pour tout $n > 0$,
$$F(n+1) - F(n) = F'(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)F''(t)\mathrm{d}t$$
ce qui s'écrit
$$\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n) = \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\mathrm{d}t.$$
Ainsi,
$$\left|\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right| \leq \int_n^{n+1} \underbrace{|n+1-t|}_{\leq 1}|f'(t)|\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|\mathrm{d}t.$$
Ainsi,
$$\sum_{n\geq 0} \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$$
converge absolument donc elle converge. Ainsi, $\sum f(n)$ converge si, et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)\mathrm{d}t\right)$ converge. On va alors montrer que c'est équivalent à la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.
$\Longleftarrow$ C'est évident. Si $F(x)$ converge en $+\infty$ quand $x \to +\infty$, alors la suite $(F(n))_n$ converge.
$\Longrightarrow$ Soit x réel. Alors
$$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{\lfloor x\rfloor} f(t)\mathrm{d}t + \int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\mathrm{d}t.$$
Or, l'intégrale $\int_1^{\lfloor x\rfloor} f(t)\mathrm{d}t$ converge lorsque $x \to +\infty$ ce qui entraine que $\sum f(n)$ converge donc $f(n)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. f' étant intégrable, nécessairement, $f(t)$ converge quand $t \to +\infty$ vers 0 donc $\int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\mathrm{d}t$ converge [1]. Ainsi, $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

2. (a) On regarde $f : x \in [1,+\infty[\mapsto \sin(\sqrt{x})/x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée
$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})x - \sin(\sqrt{x})}{x^2} = \frac{1}{2x^2}(\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) - 2\sin(\sqrt{x})).$$
Au voisinage de $+\infty$, cette fonction est intégrable car $\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) - 2\sin(\sqrt{x}) \in O(\sqrt{x})$ donc $f'(x) \in O(x^{-3/2})$. La continuité sur $[1,+\infty[$ assure donc l'intégrabilité de f'. Ainsi,
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n} \text{ et } \left(\int_1^n \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x\right)_n$$
ont la même nature. Soit $n > 0$. Un changement de variable indique que
$$\int_1^n \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x = 2\int_1^{n^2} \frac{\sin(u)}{u} < +\infty.$$
(c'est classique. Faites une IPP). La série converge.

(b) On regarde $g : x \in [1,+\infty[\mapsto \dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée
$$\forall x > 0, g'(x) = \frac{-\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))}{x^2}$$

[1]. c'est un petit exercice. Il suffit de passer aux ε pour conclure rapidement. Pour x assez grand, l'intégrale est plus petite que $\varepsilon(x - \lfloor x\rfloor) \leq \varepsilon$.

intégrable au voisinage de $+\infty$, continue sur $[1,+\infty[$. Elle est donc intégrable sur $[1,+\infty[$. Ainsi, la série converge si, et seulement si $\left(\int_1^n \frac{\cos(\ln(x))}{x}\mathrm{d}x\right)_n$ converge. On réalise le changement de variable $u=\ln(x)$ ce qui donne $\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\int_1^n \frac{\cos(\ln(x))}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\ln(n)} \cos(x)\mathrm{d}x.$$

Ainsi, la série diverge.

3. On changera $\beta = 1/2$ juste après. Notons $f : t \in]0,+\infty[\mapsto \frac{e^{it^\beta}}{t^\alpha}$. Alors f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall t>0, |f'(t)| = \left|\frac{\beta i t^{\beta-1}e^{it^\beta}}{t^\alpha} - \frac{e^{it^\beta}}{t^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{\beta}{t^{1+\alpha-\beta}} + \frac{1}{t^{\alpha+1}}.$$

Puisque β est strictement positif, f' est intégrable sur $]1,+\infty[$ dès que $1+\alpha-\beta>1$ c'est-à-dire $\alpha>\beta$.

Ainsi, le théorème s'applique. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in^\beta}}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si,

$$\left(\int_1^n \frac{e^{it^\beta}}{t^\alpha}\mathrm{d}t\right)_n$$

converge. Or, par le changement de variable $u=t^\beta$ puis par intégration par parties, on a, en notant $\gamma = \alpha+\beta-1$

$$\begin{aligned}
\int_1^n \frac{e^{it^\beta}}{t^\alpha}\mathrm{d}t &= \int_1^{n^\beta} \frac{e^{iu}}{u^{\alpha/\beta}}\frac{1}{\beta u^{1-1/\beta}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\beta}\int_1^{n^\beta} \frac{e^{iu}}{u^{(\alpha+\beta-1)/\beta}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\beta}\left(\left[\frac{1}{i}\frac{e^{iu}}{u^\gamma}\right]_1^{n^\beta} + \int_1^{n^\beta} \frac{\gamma}{i}\frac{e^{iu}}{u^{\gamma+1}}\mathrm{d}u\right)
\end{aligned}$$

donc

$$\int_1^n \frac{e^{it^\beta}}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\beta}\left(\left[\frac{1}{i}\frac{e^{iu}}{u^\gamma}\right]_1^{n^\beta} + \int_1^{n^\beta} \frac{\gamma}{i}\frac{e^{iu}}{u^{\gamma+1}}\mathrm{d}u\right) \tag{1}$$

donc converge dès que $\gamma>0$. Ainsi, on impose $\alpha>\beta$ et $\alpha+\beta>1$.

Ainsi, lorsque $\beta=\frac{1}{2}$, la série converge lorsque $\alpha>\frac{1}{2}$. Si $\alpha\leq\frac{1}{2}$, f' n'est plus intégrable donc il faut être plus fin. Ici, f étant $\mathcal{C}^2$, on pourrait écrire un Taylor avec reste intégral un cran plus loin :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \left|\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n) - \frac{f'(n)}{2}\right| \leq \int_n^{n+1} \underbrace{\left|\frac{(n+1-t)^2}{2}\right|}_{\leq 1} f''(t)\mathrm{d}t$$

et ici, par Leibniz

$$f''(t) = \frac{-e^{i\sqrt{t}}}{4t^{\alpha+1}} + o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$$

donc f'' est intégrable. Ainsi, en raisonnant comme avant,

$$\sum \left|\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n) - \frac{f'(n)}{2}\right|$$

converge. Or, $f'(n) = \dfrac{ie^{i\sqrt{n}}}{2n^{\alpha+1/2} - \alpha\dfrac{e^{i\sqrt{n}}}{n^{1+\alpha}}}$ donc le résultat dans le cas « $\alpha > 1/2$ s'applique ici pour assurer la convergence de $\sum f'(n)$. Ainsi, $\sum \left|\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right|$ converge donc $\sum f(n)$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature. Vu l'équation (1), on a la divergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ donc la série diverge dans le cas $\alpha \leq 1/2$.