

Corrigé : Centrale MP 2021 Maths 2

Thomas CHEN

1 Inégalité polynomiale de Bernstein et applications

1. Montrons par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n$.

- On a $\deg(T_0) = \deg(1) = 0$ et $\deg(T_1) = \deg(X) = 1$ donc la propriété est initialisée.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ telle que $\deg(T_n) = n, \deg(T_{n+1}) = n + 1$. Alors on a

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

mais $\deg(2XT_{n+1}) = 1 + n + 1 = n + 2$ et $\deg(T_n) = n$ donc

$$\deg(T_{n+2}) = \max(n + 2, n) = n + 2.$$

Par le principe de récurrence, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n}.$$

Ainsi, $(T_k)_{k \in [0, n]}$ est une famille de polynômes échelonnées en degré : cette famille est donc libre. Comme c'est une famille de $\mathbb{R}_n[X]$ de cardinal $n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$, $\boxed{\text{les } (T_k)_{k \in [0, n]} \text{ forment une base de } \mathbb{C}_n[X]}$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

- Comme $T_0 = 1$, on a

$$T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0 \times \theta).$$

- Comme $T_1 = X$, on a

$$T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1 \times \theta).$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n + 1)\theta)$. Alors

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2 \cos(\theta) T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\ &= 2 \cos(\theta) \cos((n + 1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n + 1)\theta + \theta) + \cos((n + 1)\theta - \theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n + 2)\theta). \end{aligned}$$

Par le principe de récurrence, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Ceci étant vrai pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)}.$$

3. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Par la question 1), $(T_k)_{k \in [0, n]}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ donc il existe $(a_k)_{k \in [0, n]} \in \mathbb{C}^{n+1}$ telle que

$$P = \sum_{k=0}^n a_k T_k.$$

Ainsi,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P(\cos(\theta)) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(\cos(\theta)) \stackrel{Q2}{=} \sum_{k=0}^n a_k \cos(k\theta)$$

donc $\boxed{\theta \in \mathbb{R} \mapsto P(\cos(\theta)) \in \mathbb{C} \text{ est bien dans } \mathcal{S}_n}$.

4. Soit $x \in [-1, 1]$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta) = x$. On a

$$|T_n(x)| \leq |T_n(\cos(\theta))| \stackrel{Q2)}{=} |\cos(n\theta)| \leq 1.$$

Ainsi, $\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} \leq 1$.

Or,

$$|T_n(1)| = |T_n(\cos(0))| \stackrel{Q2)}{=} |\cos(n \times 0)| = |1| = 1$$

donc

$$\sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| \geq |T_n(1)| = 1$$

i.e.

$$\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} \geq 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = 1}.$$

5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$.

- Pour $n = 0$, l'inégalité est simplement $0 \leq 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$. Alors

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)\theta)| &= |\sin(n\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(n\theta)| \\ &\leq \underbrace{|\sin(n\theta)|}_{\leq n|\sin(\theta)|} \underbrace{|\cos(\theta)|}_{\leq 1} + |\sin(\theta)| \underbrace{|\cos(n\theta)|}_{\leq 1} \\ &\leq (n+1)|\sin(\theta)|. \end{aligned}$$

Ainsi, par le principe de récurrence, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|.$$

Ceci étant vrai pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a le résultat intermédiaire

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dérive par rapport à θ la relation

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Cela donne

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, -\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta).$$

Ainsi,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, |\sin(\theta)||T_n'(\cos(\theta))| \leq n|\sin(n\theta)| \leq n^2|\sin(\theta)|.$$

- Pour $\theta \not\equiv 0[\pi]$, on peut diviser par $|\sin(\theta)|$ pour obtenir

$$|T_n'(\cos(\theta))| \leq n^2.$$

- Soit $\theta \in \pi\mathbb{Z}$. Par densité de $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ dans \mathbb{R} (par exemple parce que $\pi\mathbb{Z}$ est d'intérieur vide), il existe $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers θ . On a alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, |T_n'(\cos(\theta_k))| \leq n^2$$

donc l'inégalité passe à la limite en

$$|T_n'(\cos(\theta))| \leq n^2.$$

Ainsi,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, |T'_n(\cos(\theta))| \leq n^2$$

et comme à la question précédente, on en déduit que

$$\|T'_n\|_{L^\infty([-1,1])} \leq n^2.$$

Par ailleurs,

$$\forall \theta \neq 0[\pi], T'_n(\cos(\theta)) = \frac{n|\sin(n\theta)|}{|\sin(\theta)|} \underset{\theta \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{n|n\theta|}{|\theta|} = n^2$$

donc

$$T'_n(1) = n^2.$$

En particulier, on a

$$\|T'_n\|_{L^\infty([-1,1])} \geq n^2.$$

donc

$$\boxed{\|T'_n\|_{L^\infty([-1,1])} = n^2}.$$

6. On a, par décomposition en éléments simples, qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ des complexes tels que

$$\frac{B(X)}{A(X)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\lambda_k}{X - \alpha_k}.$$

Or, on sait que

$$\forall k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, \lambda_k = \frac{B(\alpha_k)}{A'(\alpha_k)}.$$

On en déduit donc que

$$\boxed{B(X) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{B(\alpha_k)}{A'(\alpha_k)(X - \alpha_k)} A(X)}.$$

7. On a $P(\lambda X) - P(\lambda) = 0$ quand $X = 1$ donc 1 est racine de P_λ i.e. $\boxed{X - 1 \mid P_\lambda}$.

8. On a

$$Q_\lambda(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} Q_\lambda(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{P(\lambda x) - P(\lambda)}{x - 1} = \lambda P'(\lambda \times 1) = \lambda P'(\lambda).$$

On a bien

$$\boxed{Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)}.$$

9. (Je vais calculer les racines même si on les connaît déjà. Pour répondre à la question sinon, il suffit de montrer qu'on a pour chaque k , $\omega_k^{2n} = 1$, qu'elles sont deux à deux distinctes et de regarder le degré de R .) On a

$$\begin{aligned} z^{2n} + 1 = 0 &\iff z^{2n} = -1 = e^{i\pi} \\ &\iff \left(\frac{z}{e^{\frac{i\pi}{2n}}}\right)^{2n} = 1 \\ &\iff \begin{cases} Z = \frac{z}{e^{\frac{i\pi}{2n}}} \\ Z^{2n} = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} Z = \frac{z}{e^{\frac{i\pi}{2n}}} \\ \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, Z = e^{\frac{ik\pi}{n}} \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, z = e^{i(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n})} = \omega_k. \end{aligned}$$

1. En effet, en notant $Q(X)$ tel que $A(X) = Q(X)(X - \alpha_k)$, on multiplie l'égalité par $X - \alpha_k$ et on évalue à gauche et à droite en α_k : on obtient à droite λ_k et à gauche, $\frac{B(\alpha_k)}{Q(\alpha_k)}$. Maintenant, en dérivant $A(X) = (X - \alpha_k)Q(X)$, on a $A'(X) = Q(X) + (X - \alpha_k)Q'(X)$ donc $A'(\alpha_k) = Q(\alpha_k)$ d'où la relation annoncée.

Ainsi, comme R dispose exactement de $2n$ racines par le théorème de d'Alembert-Gauss, on a

$$R(X) = \alpha \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k)$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$. Or R est unitaire donc $\alpha = 1$ donc

$$R(X) = \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k).$$

10. Par la relation (I.1) avec $A = R$ qui est scindé à racines simples de $B = Q_\lambda$, on a

$$Q_\lambda(X) = \sum_{k=1}^{2n} Q_\lambda(\omega_k) \frac{R(X)}{(X - \omega_k)R'(\omega_k)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1} \frac{X^{2n} + 1}{(X - \omega_k)2n\omega_k^{2n-1}}.$$

Or

$$\omega_k^{2n-1} = \omega_k^{2n} \frac{1}{\omega_k} = -\omega_k^{-1}$$

donc

$$Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1} \frac{X^{2n} + 1}{X - \omega_k} \omega_k.$$

Par la question 8), on a

$$\lambda P'(\lambda) = Q_\lambda(1) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1} \frac{2}{1 - \omega_k} \omega_k.$$

En coupant la somme, on a

$$\lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k P(\lambda\omega_k)}{(1 - \omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2}$$

11. Par (I.2), on a avec $P = X^{2n}$,

$$\lambda 2n \lambda^{2n-1} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \omega_k^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} - \frac{\lambda^{2n}}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} = -\frac{1}{n} \lambda^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2}.$$

On a donc

$$-n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2}.$$

Ainsi,

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} - P(\lambda) \underbrace{\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2}}_{=-n}$$

i.e.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} + nP(\lambda).$$

12. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $f(\theta)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} f(\theta) &= a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2} (e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}) + \frac{b_k}{2} (e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}) \\ &= e^{-in\theta} \left(a_0 e^{in\theta} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k + b_k}{2} e^{ik\theta} e^{in\theta} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k - b_k}{2} e^{-ik\theta} e^{in\theta} \right) \\ &= e^{-in\theta} \left(a_0 e^{in\theta} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_{n-k} + b_{n-k}}{2} e^{ik\theta} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-k} - b_{n-k}}{2} e^{ik\theta} \right) \\ &= e^{-in\theta} \left(a_0 X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_{n-k} + b_{n-k}}{2} X^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-k} - b_{n-k}}{2} X^k \right) (e^{i\theta}). \end{aligned}$$

En notant $U(X) = a_0 X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_{n-k} + b_{n-k}}{2} X^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-k} - b_{n-k}}{2} X^k$ qui est un polynôme de degré au plus $2n$, on a

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = e^{-in\theta} U(e^{i\theta}).$$

13. Soit $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$. Alors

$$\frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} = \frac{2\omega_k}{(1 - e^{i\varphi_k})^2} = \frac{2\omega_k}{2e^{i\varphi_k} (e^{-i\varphi_k/2} - e^{i\varphi_k/2})^2} = \frac{2}{(-2i \sin(\varphi_k/2))^2} = \frac{-1}{2 \sin^2(\varphi_k/2)}.$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$f'(\theta) = -inf(\theta) + ie^{i\theta} e^{-in\theta} U'(e^{i\theta}).$$

Or, par la question 11) avec $P = U$, on a

$$e^{i\theta} U'(e^{i\theta}) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} U(e^{i\theta} \omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} + nU(e^{i\theta}) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} U(e^{i\theta} \omega_k) \frac{-1}{2 \sin^2(\varphi_k/2)} + nU(e^{i\theta}).$$

On a aussi

$$ie^{-in\theta} e^{i\theta} U(e^{i\theta}) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} ie^{-in\theta} U(e^{i\theta} \omega_k) \frac{-1}{2 \sin^2(\varphi_k/2)} + in \underbrace{e^{-in\theta} U(e^{i\theta})}_{=f(\theta)}$$

i.e.

$$f'(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} ie^{-in\theta} U(e^{i\theta} \omega_k) \frac{-1}{2 \sin^2(\varphi_k/2)}.$$

Or

$$f(\theta + \varphi_k) = e^{-in(\theta + \varphi_k)} e^{i(\theta + \varphi_k)} U(e^{i(\theta + \varphi_k)}) = e^{-in\theta} e^{-in\varphi_k} U(e^{i\theta} e^{i\varphi_k}) = e^{-in\theta} e^{-i\pi/2} e^{-ik\pi} U(e^{i\theta} \omega_k) = e^{-in\theta} (-i)(-1)^k U(e^{i\theta} \omega_k).$$

On en déduit donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f'(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f(\theta + \varphi_k) \frac{(-1)^k}{2 \sin^2(\varphi_k/2)}.$$

14. On a par la question 11) et 13) que

$$n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2 \sin^2(\varphi_k/2)}.$$

Ainsi,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, |f'(\theta)| \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \underbrace{|f(\theta + \omega_k)|}_{\leq \|f\|_\infty} \frac{1}{2 \sin^2(\varphi_k/2)} \leq \|f\|_\infty \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2 \sin^2(\varphi_k/2)} = \|f\|_\infty n$$

i.e.

$$\boxed{\|f'\|_\infty \leq n\|f\|_\infty}.$$

15. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $f : t \in \mathbb{R} \mapsto P(\cos(t)) \in \mathbb{C}$. Alors $f \in \mathcal{S}_n$ par la question 3) donc par la question 14),

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, |f'(\theta)| \leq n\|f\|_\infty$$

i.e.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, |-\sin(\theta)f'(\cos(\theta))| \leq n\|f\|_\infty$$

i.e.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, |\sqrt{1 - \cos^2(\theta)}f'(\cos(\theta))| \leq n\|f\|_\infty.$$

Soit $x \in [-1, 1]$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta) = x$. Alors

$$|\sqrt{1 - x^2}f'(x)| \leq n\|f\|_\infty.$$

Or, comme $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, on a

$$P(\cos(\mathbb{R})) = P([-1, 1])$$

donc

$$\boxed{\|f\|_\infty = \|P\|_{L^\infty([-1, 1])}}.$$

16. Soit $Q \in \mathbb{C}_n[X]$. Alors $Q \circ \cos \in \mathcal{S}_{n-1}$ donc s'écrit

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, Q(\cos(\theta)) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)$$

donc

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R}, Q(\cos(\theta)) \sin(\theta) &= a_0 \cos(\theta) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos(k\theta) \sin(\theta) + b_k \sin(k\theta) \sin(\theta) \\ &= a_0 \cos(\theta) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sin((k+1)\theta) - a_k \sin((k-1)\theta) \\ &\quad + b_k \cos((k-1)\theta) - b_k \cos((k+1)\theta) \\ &= a_0 \cos(\theta) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n a_{k-1} \sin(k\theta) - b_{k-1} \cos(k\theta) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} a_{k+1} \cos(k\theta) + b_{k+1} \sin(k\theta) \end{aligned}$$

donc f est bien dans \mathcal{S}_n . Par la question 14),

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, |f'(\theta)| \leq n\|f\|_\infty.$$

On a

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f'(\theta) = -\sin^2(\theta)Q'(\cos(\theta)) + \cos(\theta)Q(\cos(\theta))$$

donc pour $\theta = 0$, on a

$$|f'(0)| = |Q(1)| \leq n\|f\|_\infty.$$

Ensuite, comme $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = Q(\cos(\theta))\sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$ et que \cos est à valeurs dans $[-1, 1]$, on a

$$|f(\theta)| \leq \sup_{x \in [-1, 1]} |Q(x)\sqrt{1 - x^2}|$$

et ce, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ donc

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in [-1,1]} |Q(x)\sqrt{1-x^2}|$$

et

$$\boxed{|Q(1)| \leq n \sup_{x \in [-1,1]} |Q(x)\sqrt{1-x^2}|.}$$

17. Soit $t \in [-1, 1]$. Alors $S_t \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ donc par la question précédente,

$$|R(t)| \leq n \sup_{x \in [-1,1]} |R(tx)\sqrt{1-x^2}|$$

mais pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $0 \leq 1-x^2 \leq 1-t^2x^2$ donc

$$0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-t^2x^2}$$

et donc

$$\sup_{x \in [-1,1]} |R(tx)\sqrt{1-x^2}| \leq \sup_{x \in [-1,1]} |R(tx)\sqrt{1-t^2x^2}| \leq \sup_{tx \in [-1,1]} \sup_{y \in [-1,1]} |R(y)\sqrt{1-y^2}|$$

et donc

$$\boxed{|R(t)| \leq n \sup_{x \in [-1,1]} |R(x)\sqrt{1-x^2}|.}$$

18. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Alors $P' \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Ainsi, par la question 17),

$$\forall t \in [-1, 1], |P'(t)| \leq n \sup_{x \in [-1,1]} |P'(x)\sqrt{1-x^2}| \leq n \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

par la question 16). Ainsi,

$$\forall t \in [-1, 1], |P'(t)| \leq n^2 \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

i.e.

$$\boxed{\|P'\|_{L^\infty([-1,1])} \leq n^2 \|P\|_{L^\infty([-1,1])}.}$$

19. Avec $P = T_n$, on a $\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = 1$ par la question 4) et $\|T_n'\|_{L^\infty([-1,1])} = n^2$ par la question 5) donc on peut avoir égalité avec $P = T_n$.

2 Inégalités de Bernstein et transformée de Fourier

20. Notons

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, \xi) &\mapsto f(x)e^{-ix\xi} \end{aligned}$$

- $\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^2, |\varphi(x, \xi)| \leq |f(x)|$. Comme f est intégrable, on en déduit que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\varphi(\cdot, \xi)$ est intégrable sur \mathbb{R} et de surcroît, φ est **dominée**.
- $\forall \xi \in \mathbb{R}, \varphi(\cdot, \xi) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- En particulier, \widehat{f} est bien définie.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x, \cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On peut donc appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres qui assure que

$$\boxed{\widehat{f} \text{ est une fonction continue sur } \mathbb{R}.}$$

21. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\lambda f + \mu g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(x) e^{-ix\xi} dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-ix\xi} dx$$

donc $\widehat{\lambda f + \mu g} = \lambda \widehat{f} + \mu \widehat{g} : f \mapsto \widehat{f}$ est bien linéaire. Ensuite, on écrit

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, |\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \underbrace{|e^{-ix\xi}|}_{=1} dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

et cette majoration ne dépend pas de ξ donc

$$\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

En particulier, $f \mapsto \widehat{f}$ est une application 1-lipschitzienne de $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ dans $(L^{\infty}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$: elle est donc continue. On a donc bien

$$\boxed{\begin{array}{ccc} (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) & \rightarrow & (L^{\infty}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty}) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array} \in \mathcal{C}^0((L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1), (L^{\infty}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})) \cap \mathcal{L}(L^1, L^{\infty}).}$$

22. Par le théorème de changement de variable affine, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda u)| du = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)| du$$

donc g est intégrable car f l'est. Comme f est continue, g est continue donc $\boxed{g \in L^1(\mathbb{R})}$. On peut donc considérer \widehat{g} . On a

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda x) e^{-ix\xi} dx \\ &\stackrel{u=\lambda x}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp\left(-iu \frac{\xi}{\lambda}\right) du \\ &= \frac{1}{\lambda} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\widehat{g} = \frac{1}{\lambda} \widehat{f}\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)}.$$

23. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leq |f(t)| \|g\|_{\infty}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

donc $t \in \mathbb{R} \mapsto f(t)g(x-t) \in \mathbb{C} \in L^1(\mathbb{R})$ et $f * g$ est bien définie. On a, par changement de variable affine,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt = (g * f)(x)}.$$

24. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x-t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \|g\|_{\infty} dt = \|f\|_{L^1} \|g\|_{\infty} < +\infty$$

donc

$$\boxed{\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{\infty} < +\infty}.$$

25. Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons $\varphi : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto f(t)g(x - t) \in \mathbb{R}$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(x, t) \in \mathbb{C} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- On a

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall t, x \in \mathbb{R}, \frac{\partial^j \varphi}{\partial x^j}(x, t) = g^{(k)}(x - t)f(t).$$

- On a

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\partial^j \varphi}{\partial x^j}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

- **Domination.** Soit $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $t, x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\left| \frac{\partial^j \varphi}{\partial x^j}(x, t) \right| \leq |g^{(k)}(x - t)f(t)| \leq \|g^{(k)}\|_\infty |f(t)|$$

et $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ donc les dérivées partielles en x de φ sont dominées.

Par le théorème de régularité des intégrales à paramètres, les dérivées partielles en x j -ème de φ pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ sont intégrables, $f * g$ est de classe \mathcal{C}^k et

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f * g)^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^{(k)}(x - t)dt = (f * g^{(k)})(x).$$

26. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f * g(x)e^{-ix\xi}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t)g(x - t)dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t)g(x - t)dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} g(x - t)dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\xi} e^{-it\xi} g(u)du dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\xi} g(u)du}_{=\widehat{g}(\xi)} dt \\ &= \widehat{g}(\xi)\widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}.$$

27. Pour $k = 0$, on a avec $P_0 = 1$, $\forall t > 0, \varphi^{(k)}(t) = P_0(1/t)e^{-1/t}$. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall t > 0, \varphi^{(k)}(t) = P_k(1/t)e^{-1/t}.$$

Alors en dérivant cette relation,

$$\forall t > 0, \varphi^{(k+1)}(t) = -\frac{1}{t^2}P_k'(t)e^{-1/t} + \frac{1}{t^2}P_k(1/t)e^{-1/t} = P_{k+1}(1/t)e^{-1/t}$$

avec $P_{k+1} = X^2(-P_k' + P_k)$.

Ainsi, par le principe de récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists P_k \in \mathbb{R}[X], \varphi^{(k)}(t) = P_k(1/t)e^{-1/t}.$$

Déjà, φ est continue puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 0 = \varphi(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$. Par ailleurs,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{\varphi^{(k)}(x)}_{=0} = 0$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} P_k(1/x)e^{-1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{P_k(x)e^{-x}}_{\sim x^{d_k} e^{-x}} = 0$$

par croissances comparées (où $d_k := \deg(P_k)$). Par le théorème de raccord \mathcal{C}^∞ , on en déduit que

$$\varphi \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Remarque importante. Bien que φ est de classe \mathcal{C}^∞ , elle n'est pas développable en série entière au voisinage de 0! Si elle l'était au voisinage de 0, alors on sait qu'elle égale sa formule de Taylor donc

$$\exists r > 0, \forall x \in]-r, r[, \varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} x^k = 0$$

mais ceci est absurde.

Ainsi, "développable en série entière" donne \mathcal{C}^∞ mais la réciproque n'est pas vrai.

28. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\varphi(1 - t^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 - t^2 \leq 0 \\ \exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right) & \text{si } 1 - t^2 > 0 \end{cases}$$

Comme $1 - t^2 > 0 \iff t \in]-1, 1[$, on a bien

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(1 - t^2) = \psi(t).$$

29. Par le théorème fondamental de l'analyse, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\theta(t) = \int_0^t \psi(x) dx.$$

Comme ψ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , θ l'est aussi.

- Si $t \leq -1$, on a

$$\theta(t) = \int_0^t \psi(x) dx = - \int_t^0 \psi(x) dx = \int_t^1 \underbrace{\psi(x)}_{=0} dx - \int_{-1}^0 \psi(x) dx = - \int_0^1 \psi(t) dt.$$

par changement de variable affine $t = -x$ et parité de ψ . Ainsi, θ est constant sur $] - \infty, -1]$:

$$\forall t \leq -1, \theta(t) = - \int_0^1 \psi(x) dx = A.$$

- Si $t \in [1, +\infty[$, alors

$$\theta(t) = \int_0^t \psi(x) dx = \int_0^1 \psi(x) dx + \int_1^t \underbrace{\psi(x)}_{=0} dx = \int_0^1 \psi(x) dx = B$$

donc θ est aussi constante sur $[1, +\infty[$.

On a $A \neq B$ car $A = -B$ et $A \neq 0$ en tant qu'intégrale d'une fonction continue non identiquement nulle.

30.

Au brouillon. En faisant un dessin, on veut trouver une fonction qui transforme

- $(-1, \theta(-1))$ en $(-2, 0)$
- $(1, \theta(1))$ en $(-1, 1)$
- $(0, 0)$ en $(-3/2, 1/2)$.

On obtiendra alors une fonction plateau mais que sur \mathbb{R}^- . Il faudra compléter par parité.

On teste avec un changement de variable affine puisqu'il faut décaler le graphe vers le haut et vers la gauche, et ramasser le graphe. En essayant $f(x) = \theta(ax + b)$, on trouve $a = 2$ et $b = 3$ convient pour le "rescaling".

Posons $g(x) = \frac{\theta(2x + 3) - \theta(-1)}{2\theta(1)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^-$. Alors

- si $x \leq -2$, alors $2x + 3 \leq -1$ donc $\theta(2x + 3) = A = \theta(-1)$ donc $g(x) = 0$.
- si $x \geq -1$, on a $2x + 3 \geq 1$ donc $\theta(2x + 3) = B = -A$ donc $g(x) = \frac{B + B}{2B} = 1$.

Posons donc $\rho : x \in \mathbb{R} \mapsto g(x)\mathbb{1}_{x \leq 0}(x) + g(-x)\mathbb{1}_{x > 0}(x)$. Alors g est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* et le raccord en 0 est clairement C^∞ (c'est une fonction constante au voisinage de 0) donc ρ est C^∞ , nulle sur $] -\infty, 2]$ donc aussi sur $[2, +\infty[$ par parité, et vaut 1 sur $[-1, 0]$ donc aussi sur $[0, 1]$ par parité. Ainsi, la fonction suivante convient :

$$\rho : x \in \mathbb{R} \mapsto g(x)\mathbb{1}_{x \leq 0}(x) + g(-x)\mathbb{1}_{x > 0}(x) \in \mathbb{R} \text{ avec } \forall x \in \mathbb{R}^-, g(x) = \frac{\theta(2x + 3) - \theta(-1)}{2\theta(1)}.$$

31. Soit $\varphi : (x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{ix\xi}\rho(\xi) \in \mathbb{C}$. Alors

- $\forall \xi \in \mathbb{R}, \varphi(\cdot, \xi) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) :$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \xi) = i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi).$$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x, \cdot), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \cdot) \in \mathcal{C}_{pm}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\varphi(x, \cdot)| = |\rho|$ et ρ est intégrable donc $\varphi(x, \cdot)$ aussi.
- **DOMINATION** : soit $x, \xi \in \mathbb{R}$. On a

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \xi) \right| = |\xi|\rho(\xi).$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|\rho(\xi)d\xi = \int_{-2}^2 |\xi|\rho(\xi)d\xi < +\infty$$

par continuité de $\xi \mapsto |\xi|\rho(\xi)$ sur $[-2, 2]$. Ainsi, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est dominée.

Par le théorème de régularité des intégrales à paramètres, $2\pi r$ donc r est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, r'(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{ix\xi}\rho(\xi)d\xi.$$

32. Comme ρ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , par intégrations par parties, on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 2\pi x^2 r(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{ix\xi} \rho(\xi) d\xi \\ &= \int_{-2}^2 x^2 e^{ix\xi} \rho(\xi) d\xi \\ &= \left[ix e^{ix\xi} \rho(\xi) \right]_{-2}^2 - i \int_{-2}^2 x e^{ix\xi} \rho'(\xi) d\xi \\ &= ix e^{2ix} \underbrace{\rho(2)}_{=0} - ix e^{-2ix} \underbrace{\rho(-2)}_{=0} - i \underbrace{\left[ie^{ix\xi} \rho'(\xi) \right]_{-2}^2}_{=0} - \int_{-2}^2 e^{ix\xi} \rho''(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|2\pi x^2 r(x)| \leq \int_{-2}^2 |\rho''(\xi)| d\xi < +\infty$$

donc $x \mapsto x^2 r(x)$ est bornée sur \mathbb{R} , disons par M . La fonction r étant continue, elle est bornée sur $[-1, 1]$ par le théorème des bornes atteintes. Si $|x| > 1$,

$$|r(x)| \leq \frac{M}{x^2} \leq M$$

donc r est bornée sur \mathbb{R} .

Enfin, r est continue sur \mathbb{R} , et vérifie $r(x) = o_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$ qui est intégrable par le critère de Riemann, donc r est intégrable au voisinage de $\pm\infty$. On en déduit que r est intégrable sur \mathbb{R} .

33. La fonction $f * r_\lambda$ est intégrable et par la question 25, elle est continue donc $f * r_\lambda \in L^1$ et $\widehat{f * r_\lambda}$ existe. Comme $f \in L^1, r_\lambda \in L^1 \cap L^\infty$,

$$\widehat{\lambda f * r_\lambda} = \lambda \widehat{f r_\lambda} \stackrel{Q.22}{=} \widehat{f \hat{r}} \left(\frac{\cdot}{\lambda} \right) = \widehat{f} \rho \left(\frac{\cdot}{\lambda} \right)$$

par inversion de Fourier, justifié car ρ et r sont dans L^1 . La fonction \widehat{f} est nulle en dehors $[-\lambda, \lambda]$ et $\rho \equiv 1$ sur $[-\lambda, \lambda]$ donc

$$\widehat{\lambda f * r_\lambda} = \widehat{f}.$$

Comme f et $\lambda f * r_\lambda$ sont dans L^1 , comme \widehat{f} est intégrable, par inversion de Fourier,

$$\lambda f * r_\lambda = f.$$

34. On a $f' = \lambda f * (r_\lambda)'$ et par la question 24,

$$\|f'\|_\infty = |\lambda| \|f * (r_\lambda)'\|_\infty \leq \lambda \|f\|_\infty \|r'_\lambda\|_1.$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r'_\lambda(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda r'(\lambda x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |r'(u)| du = \|r'\|_1.$$

On en déduit que

$$\|f'\|_\infty \leq \|r'\|_1 \lambda \|f\|_\infty.$$

donc

$$\|f'\|_\infty \leq C \lambda \|f\|_\infty ; C = \|r'\|_1.$$

FIN DU SUJET