Présentation Ampère-EDF

Guy David, Laboratoire de mathématiques
Université de Paris Saclay

Guy.david@universite-paris-sud.fr

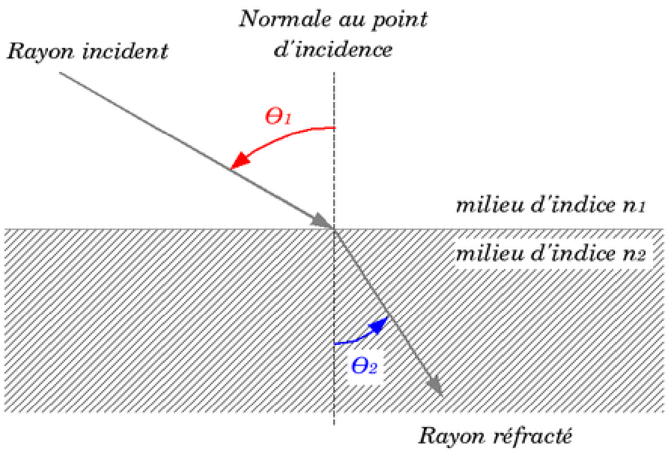
Domaine de recherche:
Analyse Mathématique
Calcul des Variations,
Théorie Géométrique de la Mesure

16 Mai 2022.

La nature aussi aime minimiser des fonctionnelles

Exemple 1: Un sauveteur situé sur la plage doit aller chercher une victime dans la mer. Il court deux fois plus vite qu'il ne nage. Quel trajet choisir? Variante avec des dunes (géodésiques).

Exemple 2: trajet de la lumière en changeant de milieu: loi de Snell-Descartes sur la réfraction.
Pareil que plus haut:
Principe de Fermat.



Exemple 3: les fourmis savent construire des lignes droites.

Exemple 4: bulles de savon. Voir plus bas.

La fonctionnelle de Mumford-Shah (1)

On se donne une image, i.e., une fonction g définie sur un rectangle R, avec $0 \leq g(x,y) \leq 1$ pour $(x,y) \in R$.

On cherche une segmentation de g, une version simplifiée donnée par K (un ensemble de traits) et u (une fonction qui ressemble à g, mais plus lisse sauf pour des sauts le long de K).

Dans la photo (par A. Lemenant),
le cagou à gauche,
La version noir et blanc au milieu,
Le dessin simplifié K à droite:

Un algorithme classique de segmentation consiste à minimiser la fonctionnelle de Mumford-Shah ci-dessous.

La fonctionnelle de Mumford-Shah (1)

On se donne une image, i.e., une fonction g définie sur un rectangle R, avec $0 \leq g(x, y) \leq 1$ pour $(x, y) \in R$.

On cherche une segmentation de g, une version simplifiée donnée par K (un ensemble de traits) et u (une fonction qui ressemble à g, mais plus lisse sauf pour des sauts le long de K).

Dans la photo (par A. Lemenant),
le cagou à gauche,
La version noir et blanc au milieu,
Le dessin simplifié K à droite:

Un algorithme classique de segmentation consiste à minimiser la fonctionnelle de Mumford-Shah ci-dessous.

La fonctionnelle de Mumford-Shah (2)

Donc on se donne une image $g : R \to [0,1]$,

et on cherche K, un ensemble de traits pas trop long
et une image u lisse en dehors de K, et qui ressemble à g.

Donc 3 contraintes en compétition. On minimise

$$J_g(K,u) = \mathcal{H}^1(K) + \int_{R\setminus K} |\nabla u(x,y)|^2 dxdy + \int_{R\setminus K} |g(x,y) - u(x,y)|^2 dxdy,$$

où $\mathcal{H}^1(K)$ est la longueur totale de K.
Le dessin K donné par la machine donnera-t-il une bonne
représentation de l'image? Peu sensible au bruit?
Question liée: quelle régularité aura K?
Par exemple, K sera-t-il toujours "(uniformément) rectifiable"?

La fonctionnelle de Mumford-Shah (2)

Donc on se donne une image $g : R \to [0,1]$,

et on cherche K, un ensemble de traits pas trop long
et une image u lisse en dehors de K, et qui ressemble à g.

Donc 3 contraintes en compétition. On minimise

$$J_g(K,u) = \mathcal{H}^1(K) + \int_{R\setminus K} |\nabla u(x,y)|^2 dxdy + \int_{R\setminus K} |g(x,y) - u(x,y)|^2 dxdy,$$

où $\mathcal{H}^1(K)$ est la longueur totale de K.
Le dessin K donné par la machine donnera-t-il une bonne représentation de l'image? Peu sensible au bruit?
Question liée: quelle régularité aura K?
Par exemple, K sera-t-il toujours "(uniformément) rectifiable"?

La fonctionnelle de Mumford-Shah (2)

Donc on se donne une image $g : R \to [0,1]$,

et on cherche K, un ensemble de traits pas trop long
et une image u lisse en dehors de K, et qui ressemble à g.

Donc 3 contraintes en compétition. On minimise

$$J_g(K,u) = \mathcal{H}^1(K) + \int_{R\setminus K} |\nabla u(x,y)|^2 dxdy + \int_{R\setminus K} |g(x,y) - u(x,y)|^2 dxdy,$$

où $\mathcal{H}^1(K)$ est la longueur totale de K.
Le dessin K donné par la machine donnera-t-il une bonne représentation de l'image? Peu sensible au bruit?
Question liée: quelle régularité aura K?
Par exemple, K sera-t-il toujours "(uniformément) rectifiable"?

La fonctionnelle de Mumford-Shah (2)

Donc on se donne une image $g : R \to [0, 1]$,

et on cherche K, un ensemble de traits pas trop long
et une image u lisse en dehors de K, et qui ressemble à g.

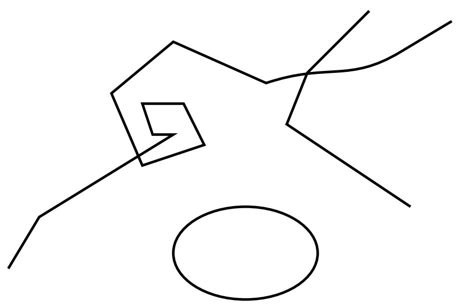
Donc 3 contraintes en compétition. On minimise

$$J_g(K, u) = \mathcal{H}^1(K) + \int_{R \setminus K} |\nabla u(x, y)|^2 dxdy \\ + \int_{R \setminus K} |g(x, y) - u(x, y)|^2 dxdy,$$

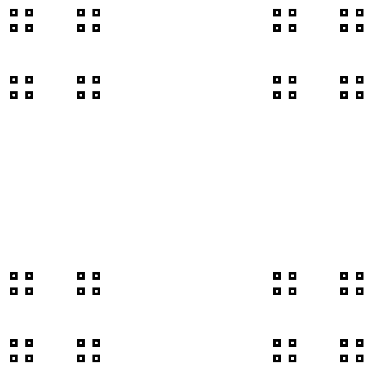
où $\mathcal{H}^1(K)$ est la longueur totale de K.
Le dessin K donné par la machine donnera-t-il une bonne représentation de l'image? Peu sensible au bruit?
Question liée: quelle régularité aura K?
Par exemple, K sera-t-il toujours "(uniformément) rectifiable"?

Théorie géométrique de la mesure (GMT)

Régularité (faible) des ensembles, structure de ces ensembles; souvent utile en calcul des variations.
Dans l'exemple plus haut: rectifiable vs. irrégulier



Ensemble rectifiable

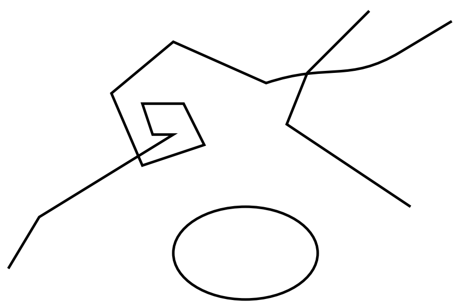


Ensemble de Cantor irrégulier

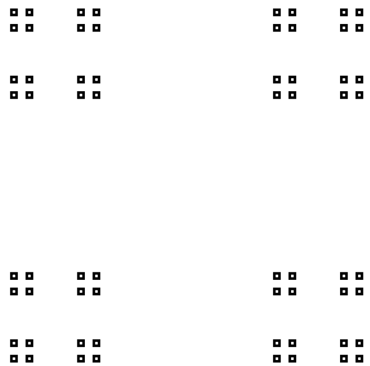
Commentaires: Pas une question de taille, mais de régularité; Mumford-Shah donne bien des ensembles K rectifiables (heureusement mais c'était pas explicite dans la fonctionnelle); On connait d'autres propriétés, mais pas encore le fait que K est une union finie de courbes de classe C^1 (la conjecture de MS)!

Théorie géométrique de la mesure (GMT)

Régularité (faible) des ensembles, structure de ces ensembles; souvent utile en calcul des variations.
Dans l'exemple plus haut: rectifiable vs. irrégulier



Ensemble rectifiable

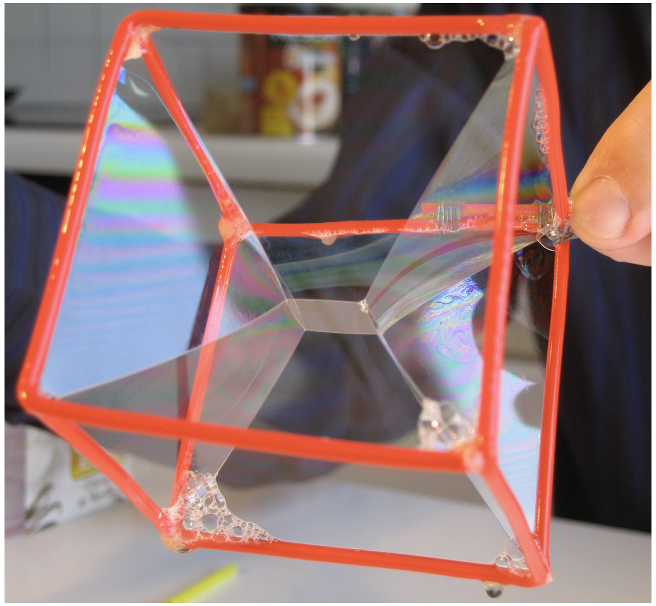


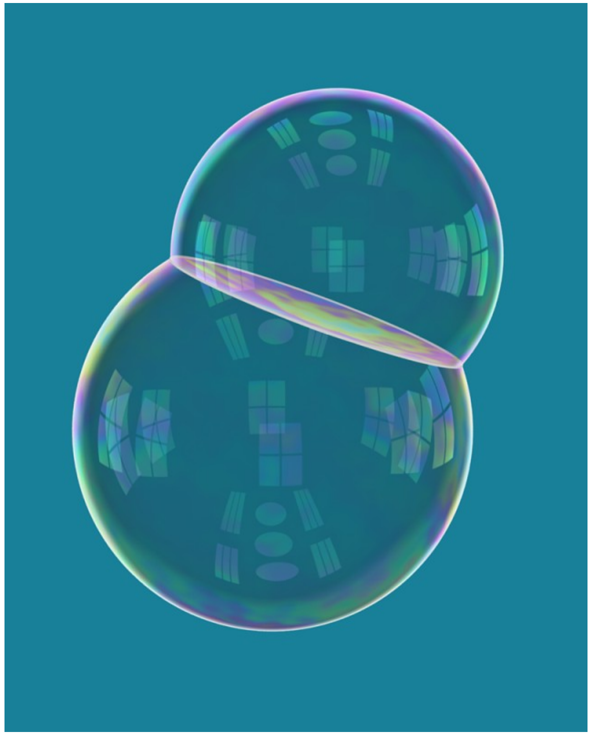
Ensemble de Cantor irrégulier

Commentaires: Pas une question de taille, mais de régularité;
Mumford-Shah donne bien des ensembles K rectifiables (heureusement mais c'était pas explicite dans la fonctionnelle);
On connait d'autres propriétés, mais pas encore le fait que K est une union finie de courbes de classe C^1 (la conjecture de MS)!

Films de savon; surfaces minimales

Encore plus simple (Pb de Plateau): minimiser $\mathcal{H}^2(S)$, la surface d'un ensemble qui s'appuie sur une courbe donnée $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$.
Modèle (déraisonnablement) bon des films de savon.
(Ajouter un terme de pression pour les bulles.)

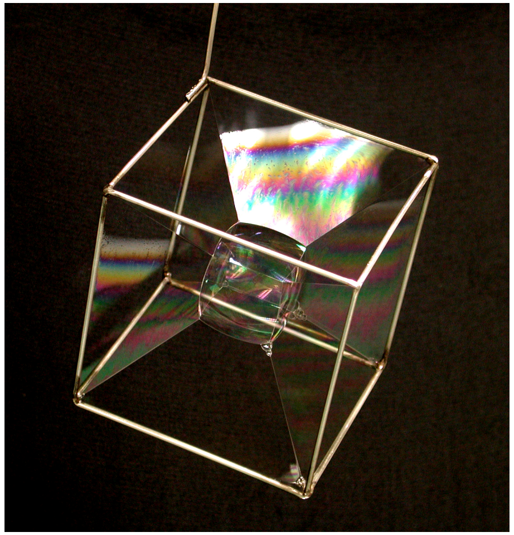




Questions simples à poser: Comment écrire le problème?
Quelle régularité pour S? Existence??

Films de savon - Ensembles minimaux

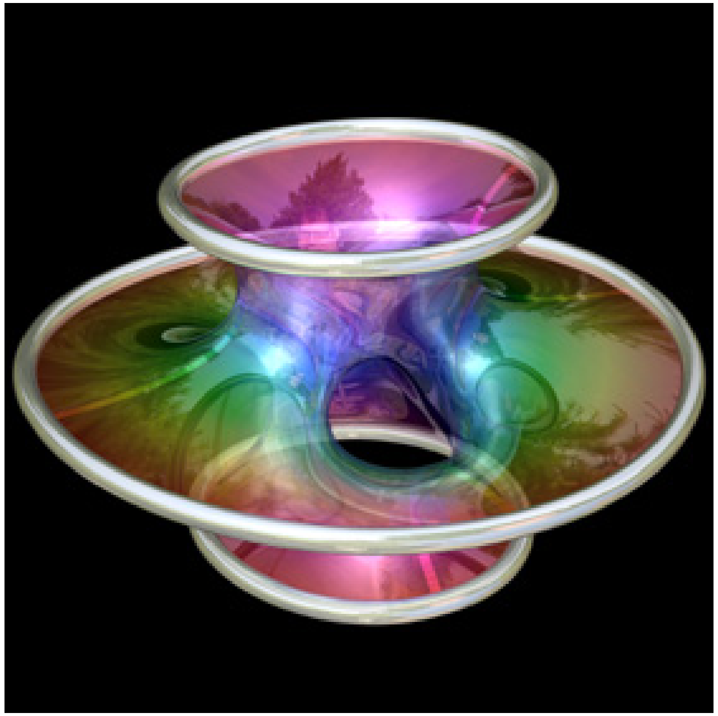
Pour la modélisation la plus réaliste (à mon avis) des films,
Jean Taylor (1976): les ensembles minimaux n'ont pas d'autre singularités (dans $\mathbb{R}^3$) que celles visibles dans les dessins suivant:

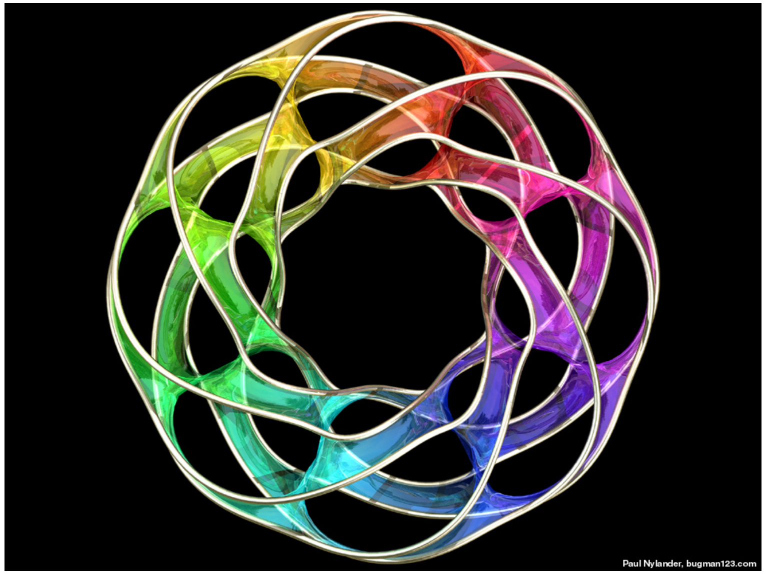



Beaucoup questions ouvertes:
Descriptions en dimension 4 ou plus?
Comment les films s'attachent-ils au bord?
Comment se transforme le dessin de droite quand le diamètre du tube tend vers 0?

Surfaces minimales

Toute une branche des maths. Juste deux dessins de surfaces minimales.
Ce ne sont pas des films de savon (seulement localement).
Mais dans ce cadre aussi, le calcul des variations est très utile (existence de surfaces avec des asymptotiques données, etc.)





Mesure harmonique

Quelle partie du bord d'un domaine irrégulier est atteinte en premier par des mouvements Browniens issus du centre?

Ou: on se place dans une pièce remplie d'objets divers. On pulvérise en l'air une peinture très fine qui sera portée par l'agitation thermique (ni vent ni de gravité). On veut savoir où la peinture va se déposer.

Pareil avec de la neige sur la montagne (mais sans vent!).

Résultats récents, où la rectifiabilité du bord joue un rôle majeur! Et il reste beaucoup de réponses à donner.

MERCI pour votre attention!

Merci à l'Académie des Sciences et à EDF
de soutenir la recherche, qui le mérite
et pour leur encouragement!

Questions à : Guy.david@universite-paris-sud.fr

Mesure harmonique

Quelle partie du bord d'un domaine irrégulier est atteinte en premier par des mouvements Browniens issus du centre?

Ou: on se place dans une pièce remplie d'objets divers. On pulvérise en l'air une peinture très fine qui sera portée par l'agitation thermique (ni vent ni de gravité). On veut savoir où la peinture va se déposer.

Pareil avec de la neige sur la montagne (mais sans vent!).

Résultats récents, où la rectifiabilité du bord joue un rôle majeur! Et il reste beaucoup de réponses à donner.

MERCI pour votre attention!

Merci à l'Académie des Sciences et à EDF
de soutenir la recherche, qui le mérite
et pour leur encouragement!

Questions à : Guy.david@universite-paris-sud.fr

Mesure harmonique

Quelle partie du bord d'un domaine irrégulier est atteinte en premier par des mouvements Browniens issus du centre?

Ou: on se place dans une pièce remplie d'objets divers. On pulvérise en l'air une peinture très fine qui sera portée par l'agitation thermique (ni vent ni de gravité). On veut savoir où la peinture va se déposer.

Pareil avec de la neige sur la montagne (mais sans vent!).

Résultats récents, où la rectifiabilité du bord joue un rôle majeur! Et il reste beaucoup de réponses à donner.

MERCI pour votre attention!

Merci à l'Académie des Sciences et à EDF
de soutenir la recherche, qui le mérite
et pour leur encouragement!

Questions à : Guy.david@universite-paris-sud.fr

Mesure harmonique

Quelle partie du bord d'un domaine irrégulier est atteinte en premier par des mouvements Browniens issus du centre?

Ou: on se place dans une pièce remplie d'objets divers. On pulvérise en l'air une peinture très fine qui sera portée par l'agitation thermique (ni vent ni de gravité). On veut savoir où la peinture va se déposer.

Pareil avec de la neige sur la montagne (mais sans vent!).

Résultats récents, où la rectifiabilité du bord joue un rôle majeur! Et il reste beaucoup de réponses à donner.

MERCI pour votre attention!

Merci à l'Académie des Sciences et à EDF
de soutenir la recherche, qui le mérite
et pour leur encouragement!

Questions à : Guy.david@universite-paris-sud.fr