

Mathématiques : Khôlles de MPSI

Thomas CHEN

11 octobre 2026

Avant-propos de la première édition

Ce document est l'aventure en khôlles de Mathématiques avec Thomas Chen et les MPSI1 de la promotion 2022-2023 du lycée Louis Pasteur à Neuilly-sur-Seine. Chaque chapitre correspond à un programme de khôlle, prédéfini par Nicolas Laillet, professeur de mathématiques en MPSI1 au lycée Louis Pasteur. Un chapitre contient deux sections : une liste d'exercices de difficultés variées, normalement tous exempt d'erreurs, complétée par une section comportant des éléments de corrections pour presque tous les exercices. La locution « éléments de corrections » est cruciale. Je ne garantis pas avoir la rédaction suffisante digne des concours pour tous les exercices : ces derniers se voient donc attribuer le nom « **Indication** »¹. Lorsque je considère la rédaction suffisante, l'intitulé devient « **Correction** ».

Rappelons que ces exercices ont été donnés en khôlle : la présence d'un examinateur est très souvent nécessaire pour cadrer vos recherches, et vous guider via quelques indications. Il est donc normal que certains exercices vous paraissent très difficile. C'est en cela que sert une correction. Toutefois, pour juger la difficulté d'un exercice, il faut s'y pencher un minimum. Selon le temps que vous avez, je préconise au moins 10 minutes afin d'exploiter vos pistes.

Ces 352 exercices sont tirés de différentes sources : livres, extraits d'oraux, planche de TD, mais surtout ma mémoire. Je vous prie donc, comme indiqué sur chaque page, de ne pas diffuser ce document sans mon accord. Beaucoup de travail se cache derrière, et je ne souhaite pas fournir ce travail à une plus grande échelle pour l'instant.

L'ouvrage a été entièrement écrit par ma main, et directement sur le compilateur : ils ne sont donc pas forcément exempt de coquilles. Si vous en voyez une, aussi petite soit elle, je vous serai gré de me le signaler par mail :

thomaschen(dot)maths[at]gmail(dot)com

Sur ce, je vous souhaite un bon voyage, aussi intéressant que passionnant dans ces planches de khôlles !

¹. Bien que parfois, je rédige suffisamment. A vous de voir !

Avant-propos de la deuxième édition

Ce document est une actualisation de la première édition avec plus de 300 exercices. Les chapitres sont dorénavant rangés par thème. Quelques coquilles ont été corrigés mais il en reste malheureusement trop. N'hésitez surtout pas à me les signaler, je vous en serai très reconnaissant. Aussi, certains exercices ne sont pas corrigés. Je rééditerai ce document à la fin des vacances scolaires pour traiter ces deux points. Contactez-moi à ce moment-là si vous voulez la version avec quelques coquilles corrigées.

Les remarques de l'avant-propos de la première édition sont toujours d'actualité !

Table des matières

I	Semestre 1	1
1	Logique et raisonnement	3
2	Calculs algébriques	7
3	Nombres complexes	19
4	Fonction réelle de la variable réelle	31
5	Applications, relations	41
6	Calcul intégral	51
7	Équations différentielles ordinaires	59
8	Suites numériques	77
9	Arithmétique de $\mathbb{Z}$	91
10	Continuité	99
11	Groupes, anneaux, corps	107
12	Dérivabilité	117
13	Convexité	119
II	Semestre 2	127
14	Matrices	129
15	Développements limités	135
16	Polynômes	143
17	Fractions rationnelles	149
18	Espaces vectoriels	159
19	Autour des projecteurs	167
20	Dimension finie	171
21	Dénombrement	175

22	Probabilités	179
23	Matrices d'une application linéaire	189
24	Séries numériques	199
25	Déterminants	207
26	Intégration	215
27	Espaces préhilbertiens réels	221

Première partie

Semestre 1

Chapitre 1

Logique et raisonnement

1.1 Exercices

Exercice 1.1 (Un truc utile plus tard).

Soit x un réel. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \implies x = 0$.

Exercice 1.2 (Parties d'un ensemble).

Soit E, F deux ensembles. Comparer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(F)$ si $E \subset F$.

Exercice 1.3 (Une minoration très grossière).

Soit x un réel positif, et n un entier naturel. Montrer que $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 1.4 (Fonction indicatrice).

Soit E un ensemble. Pour $A \subset E$, on définit la fonction indicatrice de A , notée $\mathbb{1}_A$, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Soit A, B , deux ensembles.

1. Montrer que $A \subset B \iff \forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$. Exprimer $\mathbb{1}_{E \setminus A}$ et $\mathbb{1}_{A \cap B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$. Qu'en est-il de l'union ?
2. Montrer que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$. En déduire une démonstration de l'associativité et la distributivité ensembliste.

Exercice 1.5 (Un détour ensembliste).

Soit (A, B, C) , trois ensembles.

1. Montrer que

$$(A \cup B = B \cap C) \iff (A \subset B \subset C).$$

2. Montrer que :

$$B \neq C \implies (A \cap B \neq A \cap C \vee A \cup B \neq A \cup C).$$

Exercice 1.6 (Parties d'un ensemble : le retour).

Soit E, F , deux ensembles.

1. Montrer que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$. Qu'en est-il de l'union ?
2. Montrer que $(F \subset E \text{ ou } E \subset F)$ est une CNS pour qu'il y ait égalité.

Exercice 1.7 (Une majoration notable).

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall n \in \llbracket 1, k \rrbracket, \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n \leq 1 + \frac{n}{k} + \frac{n^2}{k^2}$.

Exercice 1.8 (Différence symétrique).

On rappelle la définition de la fonction indicatrice. Soit E , un ensemble. Pour $A \subset E$, on définit la fonction indicatrice de A , notée $\mathbb{1}_A$, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Soit A, B , deux ensembles. On note $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Montrer que $A \Delta B$ n'est vide que si A et B l'est. Déterminer $\mathbb{1}_{A \Delta B}$ puis montrer que $A \Delta B = B \iff A = \emptyset$.

Exercice 1.9 (Semblant de récurrence).

Dans la suite, on suppose que toute partie de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

1. Soit A , une partie de $\mathbb{N}$. On suppose que $0 \in A$ et que si $n \in \mathbb{N}$ est un élément de A , alors $n + 1$ aussi. Soit $B = \mathbb{N} \setminus A$. Montrer que $B = \emptyset$. (On supposera par l'absurde le contraire).
2. Soit A , une partie de $\mathbb{N}^*$. On suppose que :
 - $1 \in A$,
 - si $n \in \mathbb{N}$ est un élément de A , alors $2n$ aussi,
 - si $n \in \mathbb{N}^*$ est un élément de A , alors $n - 1$ aussi.

Montrer que $A = \mathbb{N}^*$.

1.2 Éléments de corrections

Indication pour l'exercice 1.1 :

Raisonnement par contraposée. Soit $x \neq 0$. Alors $\varepsilon = \frac{x}{2}$ convient.

Indication pour l'exercice 1.2 :

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors $A \subset E \subset F$. Ainsi, $A \subset F$ donc $A \in \mathcal{P}(F)$. Ainsi, $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$. La réciproque est vraie. Soit $x \in E$. Alors $\{x\} \in \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ donc $\{x\} \subset F$ et donc $x \in F$.

Indication pour l'exercice 1.3 :

Faire le binôme, et pas la récurrence... Les deux premiers termes du binôme permet de conclure car $x \geq 0$!

Indication pour l'exercice 1.4 :

Rappelons que deux fonctions sont égales signifient qu'elles ont les mêmes ensembles de départ et d'arrivée, et qu'elles envoient, par un même élément, le même élément. Plus formellement, si $f : E_f \rightarrow F_f$ et $g : E_g \rightarrow F_g$, alors $f = g \iff (E_f = E_g) \wedge (F_f = F_g) \wedge (\forall x \in E_f, f(x) = g(x))$. Donc $\mathbb{1}_{E \setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ et pour l'union, on peut voir $A \cup B$ par $E \setminus ((E \setminus A) \cap (E \setminus B))$ et faire intervenir les exemples précédents. Sinon, on peut remarquer que $\mathbb{1}_{A \cup B} = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$. Sinon, on peut remarquer que $A \cup B = A \llcorner + \llcorner B \llcorner - \llcorner A \cap B$, ou en fait $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$.

Indication pour l'exercice 1.7 :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Comme pour l'exercice 1.3, essayons avec le binôme. Pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1}{k^i} \\ &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{k} + \binom{n}{2} \frac{1}{k^2} + \sum_{i=3}^n \binom{n}{i} \frac{1}{k^i} \\ &= 1 + \frac{n}{k} + \frac{n(n-1)}{2k^2} + \sum_{i=3}^n \binom{n}{i} \frac{1}{k^i}. \end{aligned}$$

On sent que ça bloque. Alors abandonnons et réalisons une récurrence. Soit $H_n : \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n \leq 1 + \frac{n}{k} + \frac{n^2}{k^2}$.

Pour $n = 1$, j'ai bien $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^1 = 1 + \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$.

Soit $n \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$. Supposons que H_n soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{n}{k} + \frac{n^2}{k^2}\right) \\ &= 1 + \frac{n}{k} + \frac{n^2}{k^2} + \frac{1}{k} + \frac{n}{k^2} + \frac{n^2}{k^3} \\ &= 1 + \frac{n+1}{k} + \frac{n^2 + n + \frac{n^2}{k}}{k^2} \\ &= 1 + \frac{n+1}{k} + \frac{n^2 + n + n + 1}{k^2} (*) \\ &= 1 + \frac{n+1}{k} + \frac{(n+1)^2}{k^2}. \end{aligned}$$

En effet, $(*)$ est vraie car $kn + k \geq kn \geq n \times n = n^2$. Donc $\frac{n^2}{k} \leq n + 1$. D'où H_{n+1} vraie. Par principe de récurrence, le résultat tombe.

Indication pour l'exercice 1.8 :

La première remarque permet de ne pas avoir du vide trop de fois. Si on prend deux ensembles non vide (des cas donc assez généraux), la différence symétrique n'est pas triviale.

Ou bien on utilise l'exercice 1.4, ou bien on essaye de calculer $(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$.

Indication pour l'exercice 1.9 :

Pour la 1, on a donc que B est non vide donc admet un plus petit élément. Notons-le n_0 . Alors n_0 n'est pas 0 puisque $0 \in A$. De fait, $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ et $n_0 - 1 \notin B$ par définition du plus petit élément. De fait, $n_0 - 1 \in A$. Mais par définition de A , $n_0 - 1 + 1 \in A$ donc $n_0 \in A$. Absurde.

Pour la 2, c'est le même principe. On suppose $B = \mathbb{N} \setminus A$ non vide. B admet un plus petit élément. Notons-le n_0 . Alors $n_0 \neq 1$ donc j'ai toujours $n_0 - 1$ dans A par le même argument que précédent. Mais par définition de A , $2(n_0 - 1) \in A$. Donc de fait, $2n_0 - 2 \in A$. Si $2n_0 - 2 = n_0$, alors on aboutit à une contradiction. Sinon, on a par récurrence immédiate que pour $k \in \llbracket 0, n_0 - 2 \rrbracket$, on a $2n_0 - 2 - k$ dans A en utilisant la propriété $(n+1) \in A \implies n \in A$. De fait, pour $k = n_0 - 2$, on a $2n_0 - 2 - (n_0 - 2) \in A$ donc $2n_0 - 2 - n_0 + 2 = n_0 \in A$.

Chapitre 2

Calculs algébriques

2.1 Exercices

Exercice 2.1 (Somme double).

Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \min(i, j)$

b) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j}$

c) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |j - i|$

Exercice 2.2 (Astuce de Binet).

Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 2.3 (Sommes de premiers entiers à la puissance quatrième).

Soit n , un entier naturel non nul. Calculer $S := \sum_{k=1}^n ((k+1)^5 - k^5)$ de deux manières différentes. Conclure.

Exercice 2.4 (Astuce de Binet : le retour).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}.$$

Exercice 2.5 (Somme d'une suite arithmético-géométrique).

Soit a, b , deux réels. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = au_n + b$.

1. Montrer que, si $a \neq 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n(u_0 - r) + r$, avec $r := \frac{b}{1-a}$. Que se passe-t-il pour $a = 1$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^n u_k.$$

Remarque : il est possible de trouver l'expression de u_n en fonction de n , sans sortir la formule du chapeau : c.f. un chapitre qui arrivera.

Exercice 2.6 (Encore des coefficients binomiaux...).

Soit n , un entier naturel. Les deux questions sont indépendantes.

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.
2. Soit $p \leq n$. Calculer $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$.

Exercice 2.7 (Une suite bizarre).

Soit $a > 0$. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = au_n^2$.

Exercice 2.8 (Formule d'inversion de Pascal).

Soit $((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y_k.$$

On souhaite alors montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x_k.$$

Après avoir factorisé $\binom{n}{k} \binom{k}{j}$ par $\binom{n}{j}$, calculer, pour tout entier n , $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x_k$. Conclure.

Exercice 2.9 (Inégalité arithmético-géométrique).

On suppose les résultats de l'exercice 1.9. En particulier, on va appliquer la question 2. Soit n , un entier strictement positif et $(x_1, \dots, x_n)$, un n -uplet de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \geq \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n}.$$

Exercice 2.10 (Cauchy-Schwarz).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne deux n -uplets de $\mathbb{R}^n$ notés $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$. Soit f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \sum_{i=1}^n (x_i + ty_i)^2. \end{aligned}$$

1. Quel est le signe de f ?
2. Montrer que f est une fonction polynômiale de degré 2, puis en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}$ pour les sommes :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Exercice 2.11 (Astuce de Binet : la contre-attaque).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i+j}.$$

Exercice 2.12. [Systèmes]

Résoudre les systèmes suivants dans $(\mathbb{R}^+)^3$.

$$\text{a) } \begin{cases} xy^3z = 1 \\ x^2y^2z^3 = 2 \\ xy^2z = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 4y + z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 9 \\ 3x + 4z + 2z = 9 \\ 3x + 2y + 3z = 9 \end{cases}$$

Exercice 2.13. [Inéquation trigonométrique]

Résoudre l'inéquation $\sin(x) \geq \sqrt{3} \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.14 (Somme de cosinus).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{2n} 2^k \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

Exercice 2.15.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$.

Exercice 2.16. [Moyennes]

Soit $x_1, \dots, x_n$, des réels strictement positifs. On définit alors

$$h(\bar{x}) = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} ; g(\bar{x}) = \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n}, m(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k ; q(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Ce sont respectivement la moyenne harmonique, géométrique, arithmétique, quadratique. On peut montrer que $\min(x_i) \leq h(\bar{x}) \leq g(\bar{x}) \leq m(\bar{x}) \leq q(\bar{x}) \leq \max(x_i)$. Le faire pour $n = 2$. (En fait, c'est très long donc on se contente de 2).

Exercice 2.17.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ en fonction de $\sin(4x)$.

Exercice 2.18.

Soit $\theta \in [0, \pi/2]$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$S_n(\theta) = \prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

Indication : Que vaut $\sin(2\theta)$?

Exercice 2.19.

Soit a, b , deux réels. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (a + b)^{(2^n)} \leq 2^{n-1}(a^{(2^n)} + b^{(2^n)})$

Exercice 2.20 (Somme de parties entières).

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor$.

Exercice 2.21 (Inégalité FKG faible).

Soit $n \in \mathbb{N}^*, ((x_i)_{1 \leq i \leq n}, (y_i)_{1 \leq i \leq n}) \in (\mathbb{R}^n)^2$. On suppose que les $(x_i)_i$ et les $(y_i)_i$ sont rangés dans l'ordre croissant. Montrer alors que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \right).$$

Indication : on pourra étudier le signe de $(x_i - x_j)(y_i - y_j)$.

2.2 Éléments de corrections

Indication pour l'exercice 2.1 :

Pour manipuler une somme double du type $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j}$, la plupart du temps, il sera plus facile de sommer sur les indices i , que sur les indices j . Il peut donc être intéressant d'intervertir les deux sommes.

Rappel :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n u_{i,j} = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} u_{i,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j u_{i,j}.$$

Pour réaliser l'interversion, il est toujours préférable de l'écrire comme ainsi : on sait, par la première expression, que $j \geq i$ puisque j va de i à n , donc a fortiori, plus grand que i . Pour passer de la 2ème expression à la 3ème, on souhaite fixer la variable j en premier, donc i "n'existe" pas. De fait, j varie de 0 à n . Pour fixer la deuxième variable, puisque j est fixé, i est compris entre 0 et j : ce sera nos nouvelles bornes.

Maintenant, pour la a et la c , il faut voir la valeur de la suite $u_{i,j}$ en fonction de $i \geq j$ ou inversement.

Pour la b , il faut voir qu'il est plus facile à sommer sur i que sur j .

Indication pour l'exercice 2.2 :

On remarque que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. De fait, on obtient une somme télescopique.

Indication pour l'exercice 2.3 :

Développons : $(k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$. De fait, $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$.
Donc

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^5 - k^5 = 5 \sum_{k=0}^n k^4 + 10 \sum_{k=0}^n k^3 + 10 \sum_{k=0}^n k^2 + 5 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1.$$

On connaît tous ces termes, sauf le $5 \sum_{k=0}^n k^4$.

Mais, par télescopage,

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^5 - k^5 = (n+1)^5 - 0^5 = (n+1)^5.$$

Il s'agit donc de résoudre une équation de degré 1.

Indication pour l'exercice 2.4 :

En mettant tout au même dénominateur, on a

$$1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{k^2(k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1}{(k(k+1))^2} = \left(\frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} \right)^2.$$

Il s'agit maintenant de remarquer que

$$\frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} = \frac{k(k+1) + 1}{k(k+1)} = \frac{k(k+1)}{k(k+1)} + \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \frac{k+1-k}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} \right)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = n+1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n(n+2)}{n+1}.$$

Indication pour l'exercice 2.5 :

La suite $(u_n - r)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique : en effet,

$$\frac{u_{n+1} - r}{u_n - r} = \frac{au_n + b - r}{u_n - r} = \frac{au_n + b \left(1 - \frac{1}{1-a}\right)}{u_n - r} = \frac{au_n - ar}{u_n - r} = a.$$

Donc pour tout n , $u_n - r = a^n(u_0 - r)$. Si maintenant $a = 1$, $(u_n)_n$ est simplement géométrique.

Pour la somme, et bien, on connaît la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

Indication pour l'exercice 2.6 :

Pour la 1, on reconnaît un binôme. On trouve 2^n .

Pour la 2, il faut utiliser la relation de Pascal. On a

$$\binom{k+1}{p+1} = \binom{k}{p+1} + \binom{k}{p}.$$

De fait,

$$\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}.$$

De fait,

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) \stackrel{\text{Téles.}}{=} \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Indication pour l'exercice 2.7 :

Il faut tester pour des petites valeurs de n et deviner la formule de récurrence : ici, $u_1 = au_0^2$, $u_2 = au_1^2 = a(au_0^2)^2 = a^3u_0^3$, $u_3 = au_2^2 = a(a^3u_0^3)^2 = a^7u_0^8$, ..., $u_n = a^{2^n-1}u_0^{2^n}$. Démontrons alors par récurrence cette formule pour $n \geq 1$. Pour $n = 1$, c'est clairement vrai. Pour n fixé, si on suppose $u_n = a^{2^n-1}u_0^{2^n}$, alors $u_{n+1} = a(a^{2^n-1}u_0^{2^n})^2 = a(a^{2(2^n-1)}u_0^{2 \cdot 2^n}) = a^{2^{n+1}-1}u_0^{2^{n+1}}$.

Sinon, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}) = 2\ln(u_n) + \ln(a)$. On fait alors comme en 2.5 ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) = 2^n(\ln(u_0) + \ln(a)) - \ln(a) = \ln((u_0a)^{2^n} a^{-1}).$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_0)^{2^n} a^{2^n-1}.$$

Indication pour l'exercice 2.8 :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{k}{j} &= \frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)! j!(k-j)!} \stackrel{\cancel{k!}}{=} \frac{n!}{(n-k)! j!(k-j)!} = \frac{n!}{j! (n-k)!(k-j)!} \\ &= \frac{n!}{j!(n-j)! (n-j-(k-j))!(k-j)!} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} \stackrel{=:\star}{=} \binom{n}{k} \binom{k}{j}. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'écrire : (en utilisant le symbole de Kronecker $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, 0 sinon)

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} y_j \\
 &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} y_j \\
 &\quad \star = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} \\
 &= \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} (-1)^{n-k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} y_j \\
 &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} y_j \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y_j \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n-j}{k-j} \\
 &\stackrel{l=k-j}{=} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y_j \underbrace{\sum_{l=0}^{n-j} (-1)^{(n-j)-l} \binom{n-j}{l}}_{=(1+(-1))^{n-j} = \delta_{n,j}} \\
 &= \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} y_j \delta_{n,j}}_{=0 \text{ car } j < n \text{ donc } j \neq n} + \underbrace{\binom{n}{n} y_n \delta_{n,n}}_{=y_n} \\
 &= y_n.
 \end{aligned}$$

On a bien ce qu'on voulait.

Indication pour l'exercice 2.9 :

On utilise la "pseudo-réurrence" obtenue dans l'exercice 1.9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $H_n : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \geq \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n}$. On note $A := \{n \in \mathbb{N}^* : H_n \text{ est vraie}\}$. Montrons que $A = \mathbb{N}^*$ par la question 2.

- Clairement, $1 \in A$.
- Soit $n \in A$. On veut montrer que $2n \in A$. Autrement dit, on suppose que, en nous donnant $x_1, \dots, x_{2n}$, $2n$ réels strictement positifs,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \geq \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n},$$

et on veut montrer que

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^{2n} x_k \right)^{1/2n}.$$

Notons $x'_1 := \frac{x_1 + x_{n+1}}{2}$, $x'_2 := \frac{x_2 + x_{n+2}}{2}$, $\dots$, $x'_k := \frac{x_k + x_{n+k}}{2}$, $\dots$. Les réels $x'_1, \dots, x'_n$ sont strictement positifs et

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x'_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{x_k + x_{n+k}}{2} = \frac{1}{2n} \left(\sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n x_{n+k} \right) = \frac{1}{2n} \left(\sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=n+1}^{2n} x_k \right) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} x_k.$$

J'applique l'hypothèse de récurrence sur les réels primés : j'ai donc :

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x'_k \geq \left(\prod_{k=1}^n x'_k \right)^{1/n}.$$

J'utilise l'inégalité de rang 2, ce qui signifie que pour deux réels strictement positifs, $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. De fait, j'ai donc

$$\begin{aligned}
 \left(\prod_{k=1}^n x'_k \right)^{1/n} &= \left(\prod_{k=1}^n \underbrace{\frac{x_k + x_{n+k}}{2}}_{\geq \sqrt{x_k x_{n+k}}} \right)^{1/n} \\
 &\geq \left(\prod_{k=1}^n \sqrt{x_k x_{n+k}} \right)^{1/n} \\
 &= \left(\prod_{k=1}^n x_k^{1/2} \right)^{1/n} \left(\prod_{k=1}^n x_{n+k}^{1/2} \right)^{1/n} \\
 &= \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/2n} \left(\prod_{k=n+1}^{2n} x_k \right)^{1/2n} \\
 &= \left(\prod_{k=1}^n x_k \prod_{k=n+1}^{2n} x_k \right)^{1/2n} \\
 &= \left(\prod_{k=1}^{2n} x_k \right)^{1/2n}
 \end{aligned}$$

Cette succession d'égalité nous permet donc d'affirmer

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x'_k \geq \left(\prod_{k=1}^n x'_k \right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^{2n} x_k \right)^{1/2n}.$$

Donc $2n \in A$.

- Reste à montrer que si $n \in A$, alors $n-1$ aussi. Pour cela, je me donne $x_1, \dots, x_{n-1}$, $n-1$ réels

strictement positifs et $x_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_k$. Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{n} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} x_k}_{=(n-1)x_n} + x_n \right) = \frac{nx_n}{n} = x_n$. De fait,

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_k = x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \geq \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n}.$$

En passant à la puissance n , j'ai donc

$$\left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)^n \geq \prod_{k=1}^n x_k.$$

En utilisant le fait que $\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_k = x_n$, en divisant par $x_n > 0$ donne alors

$$\left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)^{n-1} \geq \prod_{k=1}^{n-1} x_k,$$

donc en mettant la puissance $\frac{1}{n-1}$, j'ai

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n-1} x_k \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Donc $n-1 \in A$.

Bilan : $A = \mathbb{N}^*$. Marrant non ? En vrai, on aurait pu faire autrement (il y a beaucoup d'autres démonstrations).

Indication pour l'exercice 2.10 :

f est positive car somme de positifs, mais est un polynôme de degré 2 : en effet,

$$\sum_{i=1}^n (x_i + ty_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + 2tx_iy_i + t^2y_i^2) = t^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2t \sum_{i=1}^n x_iy_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 = at^2 + 2bt + c,$$

$$\text{avec } a := \sum_{i=1}^n y_i^2, b = \sum_{i=1}^n x_iy_i, c = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Puisqu'une fonction polynomiale de degré 2 est positive, j'ai $\Delta \leq 0$ (sinon, Δ aurait 2 racines distinctes, donc change de signe). Ici,

$$\Delta = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) \leq 0.$$

Donc $b^2 \leq ac$. Autrement dit

$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

On appelle l'inégalité au-dessus Cauchy-Schwarz.

Indication pour l'exercice 2.11 :

On montre que $\frac{i}{i+j} = \frac{i+j-j}{i+j} = 1 - \frac{j}{i+j}$. Ainsi,

$$S := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i+j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{j}{i+j} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 - \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{j}{i+j}}_{=: S'}.$$

Or, $S = S'$ (il suffit d'intervertir les indices i et j). De fait, j'ai

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 - S,$$

$$\text{donc } 2S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 = n^2. \text{ Bilan : } S = \frac{n^2}{2}.$$

Indication pour l'exercice 2.12 :

On passera au ln dans le système a .

Indication pour l'exercice 2.13 :

On a envie de diviser par $\cos(x)$, faire apparaître $\tan(x) \geq \sqrt{3}$ et d'étudier cette inégalité sur $] -\pi/2, \pi/2[$, et conclure par périodicité. Mais vu que le signe de $\cos$ change, il faut étudier l'inégalité sur, par exemple $] -\pi/2, 3\pi/2]$, puis conclure par " 2π -périodicité de l'inéquation".

Indication pour l'exercice 2.14 :

Si k est impair, le cosinus vaudra 0. Donc

$$\sum_{k=0}^{2n} 2^k \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} 2^k \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^n 2^{2k} \cos(k\pi) = \sum_{k=0}^n 4^k (-1)^k = \frac{1 - (-4)^{n+1}}{5}.$$

Indication pour l'exercice 2.15 :

En fait,

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1^2 = (\cos^2(x) + \sin^2(x))^2 = \cos^4(x) + 2\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x).$$

De fait, x est solution de l'équation voulue équivaut à $2\cos^2(x)\sin^2(x) = 0$. Donc les solutions sont les réels qui annulent $\cos$ ou $\sin$.

Indication pour l'exercice 2.16 :

On fixe $0 \leq x \leq y$. On veut alors montrer

$$x \leq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq y.$$

Pour la première, on utilise $\frac{x}{y} \leq 1$ donc $\frac{x}{x} + \frac{x}{y} \leq 2$ ou alors $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$. Facile après.

Pour la deuxième, on utilise la troisième en écrivant $\sqrt{\frac{1}{x}\frac{1}{y}} \leq \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2}$. Facile après.

Pour la troisième, on utilise $0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy}$. Facile après.

Pour la quatrième, on mets au carré et en mettant tout d'un côté, on obtiens $(x - y)^2 \geq 0$ qui est vrai.

Pour la cinquième, on remarque que $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{y^2+y^2}{2}} = y$.

Indication pour l'exercice 2.17 :

On remarque que $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$, $\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$. De fait,

$$\begin{aligned} \sin(x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) &= \sin(x) \cos(x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sin(2x) \frac{1}{2} \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4} \sin(2x) \cos(2x) \\ &= \frac{1}{8} \sin(4x). \end{aligned}$$

Indication pour l'exercice 2.18 :

Si $\theta = 0$, le résultat est clair : ça fait 1. Sinon, soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On définit $H_k : S_n(\theta) \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{2^k} S_{n-k} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-k}}\right)$.

Pour $k = 0$, c'est trivial.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Alors

$$\frac{1}{2^k} S_{n-k} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-k}}\right) = \frac{1}{2^k} S_{n-k-1} \underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-k}}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-k}}\right)}_{\cos(a) \sin(a) = \frac{1}{2} \sin(2a)} = \frac{1}{2^k} \frac{1}{2} S_{n-k-1} \sin\left(\frac{2\theta}{2^{n-k}}\right) = \frac{1}{2^{k+1}} S_{n-(k+1)} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-(k+1)}}\right)$$

Donc H_n est en particulier vraie. J'ai donc

$$S_n(\theta) \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} S_0(\theta) \sin(\theta).$$

Puisque $S_0(\theta) = \cos(\theta)$, j'ai

$$S_n(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta = 0 \\ \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Indication pour l'exercice 2.19 :

C'est une récurrence. Il faut utiliser le lemme suivant : $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.

Indication pour l'exercice 2.20 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lfloor x \rfloor \leq x \leq x + \frac{k}{n} \leq x + 1 \leq \lfloor x \rfloor + 2.$$

Donc

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor \in \{\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1\}.$$

On remarque que

$$[\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1[= \sqcup_{i=0}^{n-1} \left[\lfloor x \rfloor + \frac{i}{n}, \lfloor x \rfloor + \frac{i+1}{n} \right[.$$

Puisque $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$, il existe un unique i tel que

$$\lfloor x \rfloor + \frac{i}{n} \leq x < \lfloor x \rfloor + \frac{i+1}{n}.$$

Donc

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lfloor x \rfloor + \frac{i+k}{n} \leq x + \frac{k}{n} < \lfloor x \rfloor + \frac{i+k+1}{n}.$$

Donc

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } 0 \leq \frac{i+k}{n} < \frac{i+k+1}{n} \leq 1 \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } 1 \leq \frac{i+k}{n} < \frac{i+k+1}{n} \leq 2 \end{cases}.$$

On en déduit

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } 0 \leq k \leq n-i-1 \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } n-i \leq k \leq n-1 \end{cases}.$$

Il suffit de couper maintenant la somme en 2 pour obtenir

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = n\lfloor x \rfloor + i.$$

En constatant que $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor + i$, on conclut.

Indication pour l'exercice 2.21 :

L'indication nous informera que le signe demandé est positif. Notons $X = \sum_{k=1}^n x_k, Y = \sum_{k=1}^n y_k, Z = \sum_{k=1}^n z_k$.

On veut montrer que $XY \leq nZ$. J'ai pour tout j

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_j)(y_i - y_j) \geq 0.$$

Développons :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_j)(y_i - y_j) = \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_j y_j - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_j + \sum_{i=1}^n x_j y_i \right) \geq 0.$$

Autrement dit,

$$C + nx_j y_j - y_j A - x_j B \geq 0.$$

En sommant sur j , on a

$$nC + nC - BA - AB \geq 0 \iff 2nC \geq 2AB \iff nC \geq AB.$$

Chapitre 3

Nombres complexes

3.1 Exercices

Exercice 3.1. [Somme de sinus]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir pour quels réels la quantité suivante est définie puis calculer :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(kx)}{\sin^k(x)}.$$

Exercice 3.2.

Résoudre l'inéquation dans $\mathbb{C}$:

$$\Re\left(\frac{1}{1-z}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Exercice 3.3.

Soit deux complexes de modules 1, de produit différent de -1 . On les note z_1, z_2 . On pose $\zeta = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$. Montrer que $\zeta \in \mathbb{R}$ puis exprimer ζ en fonction de $\arg(z_1) =: \theta_1, \arg(z_2) =: \theta_2$.

Exercice 3.4. [Somme modulo 3]

Soit $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Déterminer trois complexes α, β, γ tel que :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta j + \gamma j^2 = 1 \\ \alpha + \beta j^2 + \gamma j = 0 \end{cases}$$

Montrer que

$$\alpha + \beta j^n + \gamma j^{2n} = \mathbf{1}_{3\mathbb{Z}+1}(n) \text{ i.e. } = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1[3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En déduire une formule pour

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1[3]}}^n \binom{n}{k}.$$

Exercice 3.5.

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Soit r tel que $r^2 = zz'$. Montrer que

$$|z| + |z'| = \left| \frac{z + z'}{2} - r \right| + \left| \frac{z + z'}{2} + r \right|.$$

Exercice 3.6 (Inégalité de Ptolémée).

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$. On suppose qu'ils sont tous non nuls. Montrer que

$$\frac{1}{|xyz|}|x||y-z| \leq \frac{1}{|xyz|}|y||z-x| + |z||x-y|.$$

Que se passe-t-il si l'un des complexes est nul ?

Indication : on pourra montrer que $\frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2}$ et $\frac{x-y}{xy}$ ont même module.

2. En déduire que

$$\forall (x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4, |x-y||z-w| \leq |x-z||y-w| + |x-w||y-z|.$$

Exercice 3.7.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la forme exponentielle de $(1+i)^n$ puis déterminer

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \text{ et } \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1}.$$

Exercice 3.8 (Une formule magique).

On suppose que la fonction argument est à valeurs dans $] -\pi, \pi]$. Montrer que

$$\arg(z) = \begin{cases} 2 \arctan \left(\frac{\Im(z)}{\Re(z) + |z|} \right) & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \\ -\pi & \text{si } z \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Exercice 3.9.

Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$\Re((1+i)z^3) = \Im(\sqrt{2}z^3).$$

Exercice 3.10.

Soit u , un complexe différent de 1, et z , un complexe non réel. Montrer que

$$\Im \left(\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \right) = 0 \iff u \in \mathbb{U}.$$

Exercice 3.11 (Ligne brisée).

Soit A_0 , le point d'affixe 6 et S , la similitude de centre O , de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'angle $\frac{\pi}{6}$. On pose $A_{n+1} = S(A_n)$.

1. Déterminer l'affixe de A_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Etudier la nature de OA_nA_{n+1} .
3. Calculer la longueur de la ligne brisée $A_0A_1 \cdots A_n$.

Exercice 3.12 (Somme de racines).

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^m.$$

Exercice 3.13 (Somme de racines 2).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|.$$

Exercice 3.14 (Somme de racines 3).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n.$$

Exercice 3.15 (CNS d'"équilateralité").

Soit A, B, C , trois points du plan d'affixe a, b, c respectivement. Montrer que ABC est équilatéral (dans le sens direct) si, et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

Exercice 3.16.

On utilisera les résultats de l'exercice 3.13. Dans la suite, tout est pris dans le sens direct. Soit ABC , un triangle quelconque. Soit D, E, F , tel que BDC, CEA, AFB sont équilatéraux. Soit G, H, I , les centres de gravités respectifs de ces triangles. On notera avec des notations évidentes leurs affixes (A est d'affixe a , B b , etc.).

1. Faire une belle figure.
2. Montrer que $a + b + c = g + h + i$.
3. En déduire que GHI est équilatéral. (dit Théorème de Napoléon mais bon, 90% des théorèmes ne sont pas démontrés par le dit-nom...)

Exercice 3.17 (Un lieu géométrique).

Déterminer l'ensemble des complexes z tel que les points d'affixes z, z^2 et $1/z$ soient alignés.

Exercice 3.18 (Racine $2n$ -ième).

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1 + z)^{2n} = (1 - z)^{2n}$.

Exercice 3.19 (L'anneau $\mathbb{Z}[i]$).

Dans cet exercice, dans le cadre des nombres complexes, j'omets volontairement le côté "algébrique" (i.e. je traduis "simplement" des hypothèses, pour l'instant, assez abstraite). On note

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

On appelle *stathme euclidien* sur A , une application $v : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que si a, b sont dans A avec $b \neq 0$, alors il existe q, r dans A avec $a = bq + r$ et r vérifiant : $r = 0$ ou $v(r) < v(b)$.

Le but de l'exercice est de poser les premiers jalons pour calculer $S := \{a^2 + b^2, (a, b) \in \mathbb{N}\}$. Considérons $N := |\cdot|^2$.

1. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ c'est-à-dire les éléments de $(z, z') \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $zz' = 1$. *Indication : on pourra montrer que $N(zz') = N(z)N(z')$.*
2. Montrer que S est stable par multiplication interne (i.e. $(a, b) \in S^2 \implies ab \in S$).
3. Montrer que N est un stathme euclidien sur $\mathbb{C}$. On pourra considérer $z = qt + r$, avec $q = \Re\left(\frac{z}{t}\right)\Big|_{\mathbb{Z}} + i \Im\left(\frac{z}{t}\right)\Big|_{\mathbb{Z}}$ avec la notation $x|_{\mathbb{Z}}$ = le plus petit entier approchant x (donc $\lfloor x \rfloor$ ou $\lceil x \rceil$).

On vient de montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est *euclidien*. Ce sera très utile pour montrer qu'en fait, $p \in S \iff \exists a, b \in \mathbb{Z}[i] \setminus \mathbb{Z}[i]^\times, ab = p \iff \exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + 1 \equiv 0[p] \iff p = 2 \vee p \equiv 1[4]$.

Prendre un nombre premier permet de conclure via la stabilité par multiplication interne puisqu'on a la décomposition en facteur premiers.

Exercice 3.20 (D'après Centrale PC Maths 2 2024). Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$\left(1 + \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(1 - \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

3.2 Éléments de corrections

Indication pour l'exercice 3.1 :

Tout marche tant que le dénominateur ne s'annule pas : en l'occurrence, la somme est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ (autrement dit, x n'est pas un multiple de π).

Enfin, la partie imaginaire est linéaire. Autrement dit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(kx)}{\sin^k(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Im(e^{ikx})}{\sin^k(x)} = \Im \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{ikx}}{\sin^k(x)} \right) = \Im \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{e^{ix}}{\sin(x)} \right)^k \right).$$

On a une somme géométrique, de raison $\frac{e^{ix}}{\sin(x)}$. Elle vaut 1 lorsque $\cos(x) + i \sin(x) = \sin(x)$, c'est-à-dire jamais car x est réel.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{e^{ix}}{\sin(x)} \right)^k = \frac{1 - \left(\frac{e^{ix}}{\sin(x)} \right)^n}{1 - \frac{e^{ix}}{\sin(x)}} = \frac{\frac{\sin^n(x) - e^{inx}}{\sin^n(x)}}{\frac{\sin(x) - (\cos(x) + i \sin(x))}{\sin(x)}} = \frac{1}{\sin^{n-1}(x)} \frac{(\sin(x) - \cos(x) + i \sin(x))(\sin^n(x) - e^{inx})}{(\sin(x) - \cos(x))^2 + \sin^2(x)}$$

Au lieu de développer, agissons intelligemment puisqu'on ne veut que la partie imaginaire. Le dénominateur étant réel, il sort de la partie imaginaire et donc j'ai :

$$\frac{\Im(\sin(x) - \cos(x) + i \sin(x))(\sin^n(x) - e^{inx})}{\sin^{n-1}(x)(1 - 2 \sin(x) \cos(x) + \sin^2(x))} = \frac{-\sin(nx)(\sin(x) - \cos(x)) + \sin(x)(\sin^n(x) - \cos(nx))}{\sin^{n-1}(x)(1 - 2 \sin(x) \cos(x) + \sin^2(x))}$$

Indication pour l'exercice 3.2 :

Soit $z = a + ib$. On exclu 1. Alors

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a-ib} = \frac{1-a+ib}{(1-a)^2+b^2} = \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} + i \frac{b}{(1-a)^2+b^2}.$$

Donc

$$\Re \left(\frac{1}{1-z} \right) \leq \frac{1}{2} \iff \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} \leq \frac{1}{2} \iff 2-2a \leq 1-2a+a^2+b^2 \iff 1 \leq a^2+b^2 \iff |z| \geq 1$$

Donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres complexes qui ne sont pas dans l'intérieur du disque de centre 0 et de rayon 1 en excluant aussi 1.

Indication pour l'exercice 3.3 :

On écrit en fait

$$\zeta = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \frac{(z_1 + z_2)(\overline{1 + z_1 z_2})}{|1 + z_1 z_2|^2} = \frac{(z_1 + z_2)(1 + \overline{z_1} \overline{z_2})}{|1 + z_1 z_2|^2} = \frac{z_1 + z_2 + \overbrace{z_1 \overline{z_1}}^{|z_1|^2=1} \overline{z_2} + \overbrace{z_2 \overline{z_2}}^{|z_2|^2=1} z_1}{|1 + z_1 z_2|^2} = \frac{2(\Re(z_1) + \Re(z_2))}{|1 + z_1 z_2|^2} \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, on écrit

$$\zeta = \frac{e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}}{1 + e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}} = \frac{e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} 2 \cos \left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2} \right)}{1 + e^{i(\theta_1+\theta_2)}} = \frac{\cancel{e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}} 2 \cos \left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2} \right)}{\cancel{e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}} 2 \cos \left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} \right)} = \frac{\cos \left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} \right)}$$

Indication pour l'exercice 3.4 :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + j\beta + \bar{j}\gamma = 1 \\ \alpha + \bar{j}\beta + j\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha & +\beta & +\gamma & = 0 \\ 0 & +(j-1)\beta & +(\bar{j}-1)\gamma & = 1 \\ 0 & +(\bar{j}-1)\beta & +(j-1)\gamma & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

On trouve à la fin :

$$\beta = \frac{j-1}{-3\sqrt{3}i} = \frac{-1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i, \gamma = \frac{\bar{j}-1}{-3\sqrt{3}i} = \frac{-1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i, \alpha = \frac{1}{3}$$

Maintenant, soit k , un entier. Vérifions la deuxième assertion demandée même si c'est immédiat. Supposons que k soit un entier de la forme $3p$. Alors j'ai :

$$\alpha + (j^3)^p\beta + (\bar{j}^3)^p\gamma = \alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ (=Première ligne du système).}$$

Supposons que k soit un entier de la forme $3p+1$. Alors j'ai :

$$\alpha + j(j^3)^p\beta + \bar{j}(\bar{j}^3)^p\gamma = \alpha + j\beta + \bar{j}\gamma = 1 \text{ (= Deuxième ligne du système).}$$

Supposons que k soit un entier de la forme $3p+2$. Alors j'ai :

$$\alpha + \bar{j}(\bar{j}^3)^p\beta + j(j^3)^p\gamma = \alpha + \bar{j}\beta + j\gamma = 0 \text{ (= Troisième ligne du système).}$$

Avec tout ça, je peux donc écrire : soit n , un entier :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1[3]}}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha + \beta j^k + \gamma \bar{j}^k) = \alpha \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \beta \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^k + \gamma \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \bar{j}^k.$$

Et donc :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1[3]}}^n \binom{n}{k} = \alpha 2^n + \beta (1+j)^n + \gamma (1+\bar{j})^n.$$

On peut démontrer que le résultat fait

$$\frac{1}{3} \left(2^n - 2 \cos \left(\frac{(n-1)\pi}{3} \right) \right).$$

Le plus efficace est de développer par binôme $(1+1)^n, (1+j)^n, (1+j^2)^n$, puis de calculer $(1+1)^n + j(1+j)^n + j^2(1+j^2)^n$. Les termes qui ne sont pas congrus à 1 modulo 3 (le reste de n par 3 ne vaut donc pas 1) vont partir avec la relation $1+j+j^2=0$.

Indication pour l'exercice 3.5 :

Soit ζ une racine carrée de z et ζ' une racine carrée de z' . Alors r vaut $\pm\zeta\zeta'$. Dans les deux cas, on a

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{z+z'}{2} - r \right| + \left| \frac{z+z'}{2} + r \right| &= \left| \frac{\zeta^2 + \zeta'^2}{2} - \zeta\zeta' \right| + \left| \frac{\zeta^2 + \zeta'^2}{2} + \zeta\zeta' \right| \\
 &= \left| \frac{\zeta^2 - 2\zeta\zeta' + \zeta'^2}{2} \right| + \left| \frac{\zeta^2 + 2\zeta\zeta' + \zeta'^2}{2} \right| \\
 &= \left| \frac{(\zeta - \zeta')^2}{2} \right| + \left| \frac{(\zeta + \zeta')^2}{2} \right| \\
 &= \frac{1}{2}(\zeta - \zeta')(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}') + \frac{1}{2}(\zeta + \zeta')(\bar{\zeta} + \bar{\zeta}') \\
 &= \frac{1}{2}(\cancel{\zeta\bar{\zeta}} - \cancel{\zeta'\bar{\zeta}} - \cancel{\zeta\bar{\zeta}'} + \cancel{\zeta'\bar{\zeta}'} + \zeta'\bar{\zeta}') + \frac{1}{2}(\cancel{\zeta\bar{\zeta}} + \cancel{\zeta'\bar{\zeta}} + \cancel{\zeta\bar{\zeta}'} + \cancel{\zeta'\bar{\zeta}'} + \zeta'\bar{\zeta}') \\
 &= \zeta\bar{\zeta} + \zeta'\bar{\zeta}' \\
 &= |z| + |z'|.
 \end{aligned}$$

Indication pour l'exercice 3.6 :

Montrons d'abord l'indication.

$$\left| \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right| = \left| \frac{1}{\bar{x}} - \frac{1}{\bar{y}} \right| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{x-y}{xy} \right|$$

L'inégalité voulue est équivalente à

$$\frac{|y-z|}{|yz|} \leq \frac{|z-x|}{|xz|} + \frac{|x-y|}{|xy|}.$$

Par l'indication, on a

$$\left| \frac{y}{|y|^2} - \frac{z}{|z|^2} \right| \leq \left| \frac{z}{|z|^2} - \frac{x}{|x|^2} \right| + \left| \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right|.$$

Or, par inégalité triangulaire,

$$\left| \frac{y}{|y|^2} - \frac{z}{|z|^2} \right| = \left| \frac{z}{|z|^2} - \frac{x}{|x|^2} + \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right| \leq \left| \frac{z}{|z|^2} - \frac{x}{|x|^2} \right| + \left| \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right|.$$

En remontant les équivalences, on a ce que l'on veut. En multipliant notre inégalité par $|xyz|$, on obtient

$$|x||y-z| \leq |y||z-x| + |z||x-y|.$$

Et alors, pour $x=0$, l'inégalité est claire (on minore une quantité positive par 0), et pour $y=0$ ou $z=0$, c'est une égalité.

Pour conclure, on pose $X=x-y$, $Y=x-z$, $Z=x-w$.

Indication pour l'exercice 3.7 :

$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $(1+i)^n = 2^{n/2}e^{i\frac{n\pi}{4}}$. Si maintenant $k=2l$, alors $i^k = (-1)^l$. Si $k=2l+1$, alors $i^k = (-1)^l i$. De fait,

$$\begin{aligned}
 (1+i)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} i^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} i^k = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} i (-1)^k \\
 &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k}_{=:S} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} (-1)^k}_{=:S'} = S + iS'.
 \end{aligned}$$

De fait, $S = \Re\left(2^{n/2}e^{i\frac{n\pi}{4}}\right) = 2^{n/2}\cos(n\pi/4)$ et $S' = 2^{n/2}\sin(n\pi/4)$.

Indication pour l'exercice 3.8 :

On peut se demander : "pourquoi arctan?". On pense alors au fait que pour $t = \tan(\theta/2)$, j'ai $\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. J'écris alors, pour $\theta \notin \pi(1+2\mathbb{Z})$

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)+1} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{2} = t = \tan(\theta/2).$$

De fait,

$$\theta = 2 \arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)+1}\right).$$

Soit maintenant z , un complexe qui n'est pas un réel négatif. Il s'écrit $z = re^{i\theta}$, avec $\theta \notin \pi(1+2\mathbb{Z})$.

$$\arg(z) = \theta = 2 \arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)+1}\right) = 2 \arctan\left(\frac{r \sin(\theta)}{r \cos(\theta)+r}\right) = 2 \arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)+|z|}\right)$$

Pour z , un réel négatif, son argument est clairement π .

Indication pour l'exercice 3.9 :

$$\Re((1+i)z^3) = \Re(z^3) - \Im(z^3) = a^3 - 3ab^2 - (3a^2b - b^3) = a^3 - 3ab^2 - 3a^2b + b^3.$$

Et

$$\Im(\sqrt{2}z^3) = \sqrt{2}\Im(z^3).$$

L'égalité devient alors

$$\Re(z^3) = \Im(z^3) + \sqrt{2}\Im(z^3) \iff \frac{\Im(z^3)}{\Re(z^3)} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

Soit $Z = z^3$. Alors Z s'écrit $re^{i\theta}$, et l'équation ci-dessus n'impose rien sur r . Par contre, on a alors

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

De fait, $\theta = \arctan(\sqrt{2}-1)$. Donc l'ensemble des solutions est tous les complexes z tel que à la puissance 3, vérifient $\arg(z^3) = \arctan(\sqrt{2}-1)$. Autrement dit, ce sont les

$$\left\{ re^{i\frac{\arctan(\sqrt{2}-1)}{3}} J : r \in \mathbb{R}^+, J \in \{1, j, j^2\} \right\}$$

Indication pour l'exercice 3.10 :

Ecrivons déjà

$$\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} = \frac{(z - u\bar{z})(1 - \bar{u})}{|1 - u|^2} = \frac{z - z\bar{u} - u\bar{z} + |u|^2\bar{z}}{|1 - u|^2} = \frac{\overbrace{z - z\bar{u} - \bar{z}u}^{-2\Re(z\bar{u})} + |u|^2\bar{z}}{|1 - u|^2}$$

Alors

$$\Im\left(\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}\right) = 0 \iff \Im(z) + |u|^2\Im(\bar{z}) = 0 \iff \Im(z) - u^2\Im(z) = 0 \iff \Im(z)(1 - |u|^2) = 0.$$

Puisque $\Im(z) \neq 0$ par hypothèse, on conclut.

Indication pour l'exercice 3.11 :

Il s'agit de traduire $A_{n+1} = S(A_n)$ par $|A_{n+1}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|A_n|$ et $\arg(A_{n+1}) = \arg(A_n) + \frac{\pi}{6}$. Ensuite, c'est une suite géométrique et une suite arithmétique donc c'est facile. Ensuite, c'est un triangle rectangle, donc il faut regarder l'angle en A_{n+1} : on écrit :

$$(\overrightarrow{A_{n+1}A_n}, \overrightarrow{A_{n+1}O}) = \arg\left(\frac{0 - z_{n+1}}{z_n - z_{n+1}}\right),$$

avec z_n , l'affixe de A_n . Il est aisé de montrer que ceci vaut $\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On pose $d_n := d(A_n, A_{n+1})$. Le triangle OA_nA_{n+1} étant rectangle en O et puisque l'angle $\widehat{A_nOA_{n+1}}$ vaut $\frac{\pi}{6}$ par définition, on en déduit que

$$\cos(\widehat{OA_nA_{n+1}}) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \frac{OA_nA_{n+1}}{OA_n}$$

donc

$$d_n = A_nA_{n+1} = \frac{OA_n}{2} = \frac{|z_n|}{2}.$$

Or, $|z_n| = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ donc la longueur cherchée est

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_k = 3 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k = \dots$$

Indication pour l'exercice 3.12 :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^m = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^m = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi m}{n}}\right)^k.$$

Si n divise m , on obtient alors une raison égale à 1. Sinon, on a alors

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^m = \frac{1 - e^{\frac{2i\pi mn}{n}}}{1 - e^{\frac{2i\pi m}{n}}} = 0.$$

Indication pour l'exercice 3.13 :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|e^{\frac{ik\pi}{n}}\right| |2i \sin(k\pi/n)| = 2 \sum_{k=0}^{n-1} |\sin(k\pi/n)| = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\pi/n) = 2\Im\left(\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\pi/n)\right),$$

avec $|\sin(k\pi/n)| = \sin(k\pi/n)$ car $\sin(k\pi/n) \geq 0$ pour $k \in [0, n-1]$. On trouve alors $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1| = \frac{2 \cos(\pi/2n)}{\sin(\pi/2n)}.$

Indication pour l'exercice 3.14 :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (\omega^k)^j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj}}_{\star} = \binom{n}{0} n + \binom{n}{n} n = 2n,$$

avec $\star$ désignant le fait que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} = n \mathbb{1}_{\{0,n\}}(j) = n$ ssi $j = 0 \vee n$.

Indication pour l'exercice 3.15 :

Plein de manière de voir ça. On peut par exemple montrer que A est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\pi/3$. Notons donc $f(z) = e^{i\pi/3}(z - b) + b$, c'est la transformation de $\mathbb{C}$ qui réalise une rotation de centre B et d'angle $\pi/3$. Alors ABC est équilatéral direct lorsque $f(c) = a$ (on est dans le sens direct) : cela me dit donc que $a - b = e^{i\pi/3}(c - b)$. Mais $-j^2 = e^{i\pi/3} \dots$ Il s'agit maintenant d'écrire

$$a - b = -j^2(c - b) \iff a - b = (1 + j)(c - b) = c - b + jc - jb \iff c(j + 1) - jb - a = 0 \iff a + jb + j^2c = 0.$$

Indication pour l'exercice 3.16 :

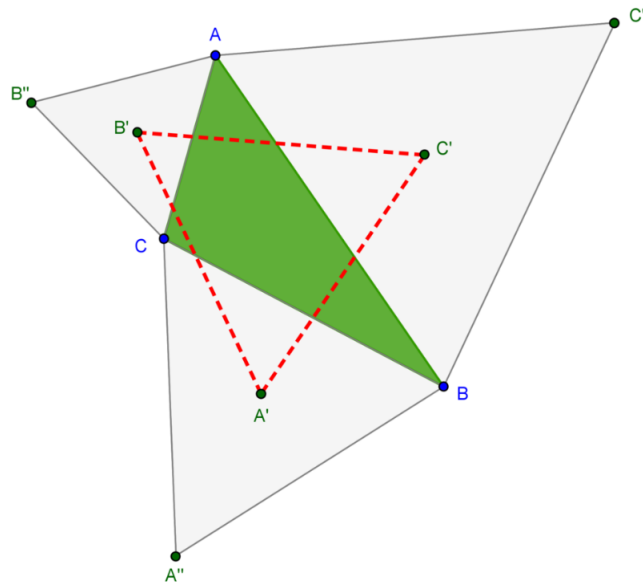


FIGURE 3.1 – Source : Wikipédia - théorème de Napoléon

Un œil aguerri remarquera que $a - i = j(b - i)$, $b - g = j(c - g)$, $c - h = j(a - h)$. En sommant terme à terme, on conclut. J'ai donc

$$g = \frac{b - jc}{1 - j}, h = \frac{c - ja}{1 - j}, i = \frac{a - jb}{1 - j}.$$

Reste à calculer $g + jh + j^2i$ et montrer que ça fait 0.

Indication pour l'exercice 3.17 :

On traite à part le cas où $z = \pm 1$ et le cas où $z = 1/z$ ou $z = z^2$. Dans le cas général, il s'agit de montrer que

$$\frac{\frac{1}{z} - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R}.$$

Comme ça, l'angle formé par les affixes respectives est nul, donc les points sont alignés.

$$\frac{\frac{1}{z} - z}{z^2 - z} = -\frac{1+z}{z^2} \in \mathbb{R} \iff \frac{1+z}{z^2} = \frac{1+\bar{z}}{\bar{z}^2} \iff z\bar{z}(\bar{z}-z) + (\bar{z}^2 - z^2) = 0 \implies (\bar{z}-z)(|z|^2 + z + \bar{z}) = 0.$$

Si $z = \bar{z}$, c'est facile.

Sinon, en notant $z = a + ib$, on a $a^2 + b^2 + 2a = 0$: c'est un cercle de centre $(-1, 0)$, de rayon 1.

Bilan : l'ensemble cherché est le cercle union l'axe des réels privé de O .

Indication pour l'exercice 3.18 :

On pose $Z = \frac{1+z}{1-z}$. Alors c'est équivalent à (puisque 1 n'est pas solution) $Z^{2n} = 1$ de solution $\mathbb{U}_n$. Reste à revenir dans le monde des z . Il suffit alors de remarquer qu'on a

$$Z = e^{\frac{k\pi}{n}} \iff z(e^{\frac{k\pi}{n}} + 1) = e^{\frac{k\pi}{n}} - 1 \iff z = \frac{e^{\frac{k\pi}{n}} - 1}{e^{\frac{k\pi}{n}} + 1},$$

à condition bien sûr que $k = n$ n'est pas envisageable : ce qui est le cas car ce n'est pas solution. De fait, l'ensemble cherché est

$$\frac{e^{\frac{k\pi}{n}} - 1}{e^{\frac{k\pi}{n}} + 1}, k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket \setminus \{n\}.$$

Indication pour l'exercice 3.19 :

1. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On a

$$N(zz') = |zz'|^2 = |z|^2 |z'|^2 = N(z)N(z').$$

Ensuite N est à valeurs dans $\mathbb{N}$. En effet,

$$\forall z \in \mathbb{C}, N(z) = \Re(z)^2 + \Im(z)^2 \in \mathbb{N}.$$

De fait, si $z, z' \in \mathbb{C}$ sont tels que $zz' = 1$, alors $N(zz') = N(1) = 1$ mais $N(zz') = N(z)N(z')$ donc $N(z)$ divise 1 donc vaut 1.

Ainsi, $\Re(z)^2 + \Im(z)^2 = 1$. Si $\Re(z) = 0$, alors $\Im(z) = \pm 1$. Si $\Re(z) = \pm 1$, alors $\Im(z) = 0$. Les autres cas sont impossibles. Ainsi, $z = \pm 1 \pm i$ donc les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont $\{\pm 1, \pm i\}$.

2. Soit $u, v \in S$. Soit a, b, c, d dans $\mathbb{N}$ tel que $u = a^2 + b^2$ et $v = c^2 + d^2$. Alors

$$uv = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \in S.$$

3. Soit $z, t \in \mathbb{C}$, $t \neq 0$. On veut montrer qu'il existe $q, r \in \mathbb{C}$ tel que $z = qt + r$ avec $N(t) > N(r)$ ou $r = 0$.

Soit donc $u = \frac{z}{t} = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{N}$. Soit $a' = a|_{\mathbb{Z}}$ et $b' = b|_{\mathbb{Z}}$. Alors

$$|a' - a| \leq \frac{1}{2}, |b' - b| \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $q = q' + ib'$ et $r = z - qt$. Alors

$$N\left(\frac{r}{t}\right) = N\left(\frac{z}{t} - q\right) = N(u - q) = |a' - a|^2 + |b' - b|^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1.$$

Ainsi, $N(r) < N(t)$.

Indication pour l'exercice 3.20 :

Déjà, supposons que $1 - \frac{iz}{2n+1} = 0$ i.e. $z = -i(2n+1)$. Alors $1 + \frac{iz}{2n+1} = 2$ donc l'égalité n'est pas satisfaite pour $z = -i(2n+1)$. Ainsi,

$$(E) : \left(1 + \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(1 - \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} \iff \begin{cases} Z = \frac{1 + \frac{iz}{2n+1}}{1 - \frac{iz}{2n+1}} \\ Z^{2n+1} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} Z = \frac{1 + \frac{iz}{2n+1}}{1 - \frac{iz}{2n+1}} \\ \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, Z = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \end{cases}.$$

Or, on a pour tout $a \in \mathbb{C}$

$$Z = \frac{1+az}{1-az} \iff Z - azZ = 1 + az \iff Z - 1 = a(1+Z)z \iff z = \frac{Z-1}{a(Z+1)}.$$

Ainsi, avec $a = \frac{i}{2n+1}$,

$$(E) \iff \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \begin{cases} z = \frac{Z-1}{a(Z+1)} \\ \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, Z = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \end{cases} \iff \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, z = \frac{2n+1}{i} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1}{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} + 1}.$$

On conclut en remarquant que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}{\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}} = \frac{1}{i} \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1}$$

ce qui donne l'ensemble des solutions de (E) :

$$\left\{ (2n+1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) : k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \right\}.$$

Chapitre 4

Fonction réelle de la variable réelle

Par "étudier f ", j'entends : "regarder

1. Domaine de définition.
2. Périodicité.
3. Parité.
4. Existence d'axe(s) de symétrie.
5. Tableau de variation.
6. Asymptotes.
7. Tableau de signe.
8. Tracé."

4.1 Exercices

Exercice 4.1 (Tracé 1).

Donner la courbe représentative de $x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Exercice 4.2 (Tracé 2).

Donner la courbe représentative de $x \mapsto \arctan\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)$.

Exercice 4.3 (Tracé 3).

Donner la courbe représentative de $x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2} \arccos(\cos(2x)) + \frac{1}{6} \arccos(\cos(3x))$.

Exercice 4.4 (Tracé 4).

Donner la courbe représentative de $x \mapsto (x \ln(x))^2 - x(1 + \ln(x)) + 1$.

Exercice 4.5 (Un truc utile en physique/SI).

Soit a, b, c , trois réels. Résoudre $a \cos(x) + b \sin(x) = c$, puis $a \cosh(x) + b \sinh(x) = c$.

Exercice 4.6 (arctan remarquable).

Calculer pour x, y , deux réels de produit différent de 1, la quantité

$$\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \arctan(x) - \arctan(y).$$

Exercice 4.7 (Trigonométrie hyperbolique).

Exprimer grâce à des fonctions usuelles $\operatorname{argsinh}(x)$ et $\operatorname{argcosh}(x)$.

Exercice 4.8 (Périodicité de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$).

Soit $Q := \{T \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x+T) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)\}$. Montrer que $0 \in Q$, que Q est stable par somme, et par opposé. Déterminer ensuite l'ensemble des périodes de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

Exercice 4.9 (Fonction de Gudermann).

On définit la fonction de Gudermann comme suit :

$$\begin{aligned} \text{gd} : \mathbb{R} &\rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ t &\mapsto \int_0^t \frac{du}{\cosh(u)} \end{aligned}$$

1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \text{gd}(t) = 2 \arctan(e^t) - \frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer $\sin(\arctan(x))$ et $\cos(\arctan(x))$ en fonction de x réel.
3. En déduire que $\cos(\text{gd}(t)) = \frac{1}{\cosh(t)}$ pour t réel.
4. En déduire que gd est solution d'un problème de Cauchy d'ordre 1 **non linéaire** que l'on déterminera.
5. Soit t réel. En déduire aussi que $\sin(\text{gd}(t)) = \frac{1}{\tanh(t)}$. Que vaut $\tan(\text{gd}(t))$?
6. Montrer que gd est bijective et que sa réciproque est

$$\begin{aligned} \text{gd}^{-1} : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto \ln \left(\tan \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

avec E et F à déterminer.

7. Montrer que

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \text{gd}^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} \right).$$

4.2 Éléments de corrections

Indication pour l'exercice 4.1 :

Déjà, il faut montrer que la fonction, noté f est bien définie sur $\mathbb{R}$ (ce qui est assez immédiat : ce qui est dans l'argument de l'arccos est bien dans $[-1, 1]$). La fonction est clairement paire. Il faut penser à la formule $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ avec $t := \tan(\theta/2)$. De fait, soit donc $x = \tan(\theta/2)$ i.e. $\theta = 2 \arctan(x)$. J'ai donc $\theta \in]-\pi, \pi[$. Par parité, on se restreint sur $[0, +\infty[$ donc en fait, sur $[0, \pi[$ en la variable θ . Il est alors clair que $f(x) = \arccos(\cos(\theta)) = \theta$. De fait, sur $\mathbb{R}^+$, $f = 2 \arctan$, sur $\mathbb{R}^-$, $f = -2 \arctan$.

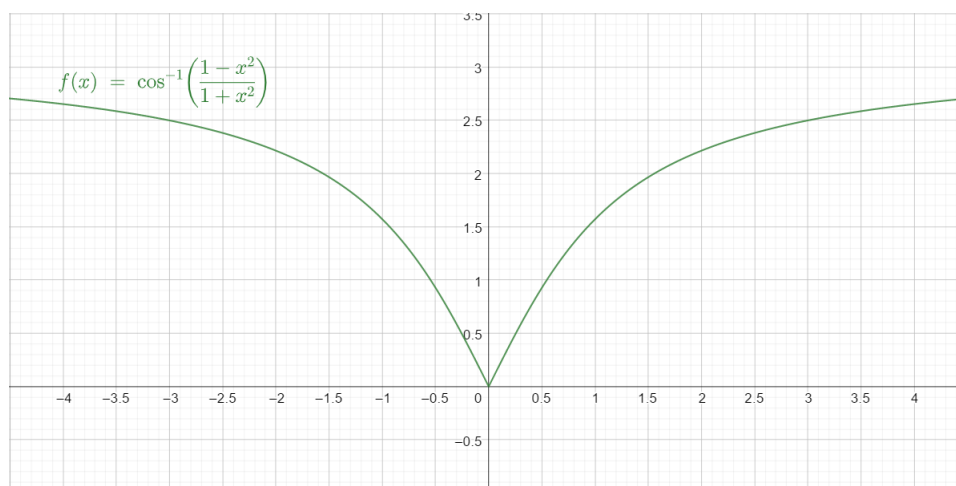
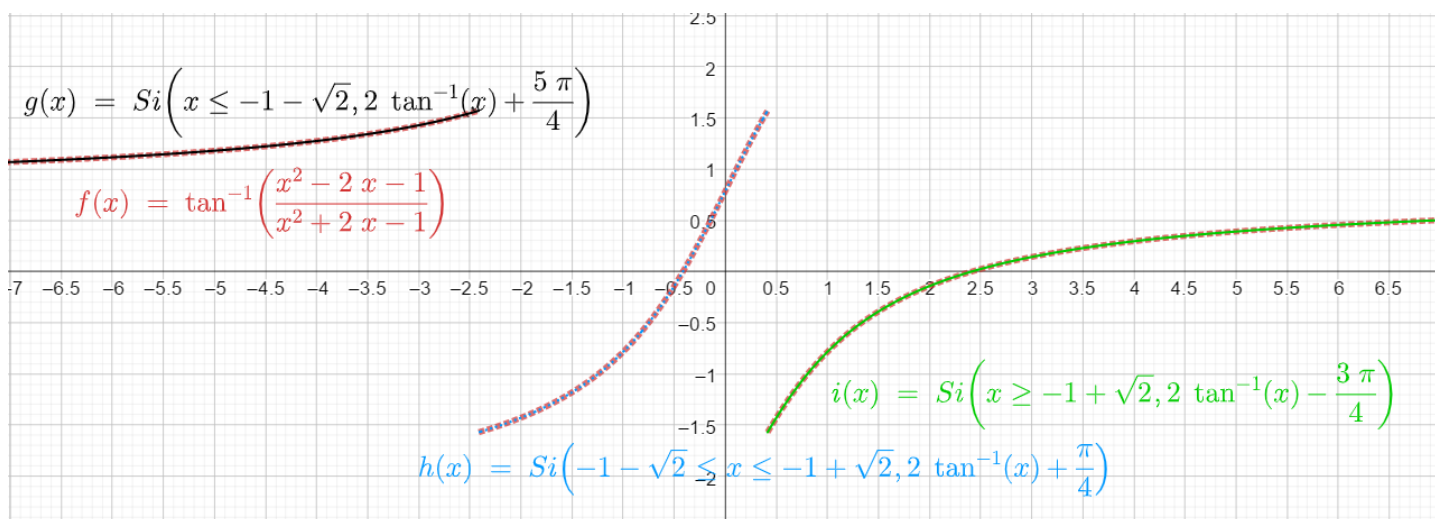


FIGURE 4.1 – Courbe représentative de f

Indication pour l'exercice 4.2 :

La fonction, noté f , est définie sur $D_f :=]-\infty, -1 - \sqrt{2}[\cup]-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}[\cup]-1 + \sqrt{2}, +\infty[$. On rappelle que $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$: ce qui pose problème était la fraction. Un calcul de dérivée montre que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} = 2 \arctan'(x)$. De fait, $x \mapsto f(x) - 2 \arctan(x)$ est une constante : reste à trouver cette constante (qui peut différer sur chaque fragment de D_f a priori).

- Pour le premier fragment : en faisant tendre f vers $-\infty$, on est censé trouvé $\pi/4 = \arctan(1)$, ce qui impose que la constante vaut $\frac{5\pi}{4}$.
- Pour le deuxième fragment : en regardant la valeur en 0, on a $\pi/4$ donc la constante est $\pi/4$.
- Pour le troisième fragment : en faisant tendre f vers $+\infty$, on est censé trouvé $\pi/4$, ce qui impose que la constante vaut $-\frac{3\pi}{4}$.

FIGURE 4.2 – Courbe représentative de f et de ses fragments

Indication pour l'exercice 4.3 :

Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque $\cos$ est à valeurs dans $[-1, 1]$ et $\arccos$ est définie sur $[-1, 1]$. Elle est clairement paire et 2π -périodique. Restreignons l'étude sur donc $[0, \pi]$. Sur cet intervalle, la fonction $\arccos$ prend en argument $x, 2x, 3x$ qui sont donc respectivement dans les intervalles $[0, \pi], [0, 2\pi], [0, 3\pi]$. Il est plus aisé de se ramener à $[0, \pi]$ car oui, si $2x \in [\pi, 2\pi]$ par exemple, $\arccos(\cos(2x)) \neq 2x$!!

Pour $\arccos(\cos(x))$, pas de problème, ça vaut x .

Pour $\arccos(2 \cos(x))$, j'ai deux cas :

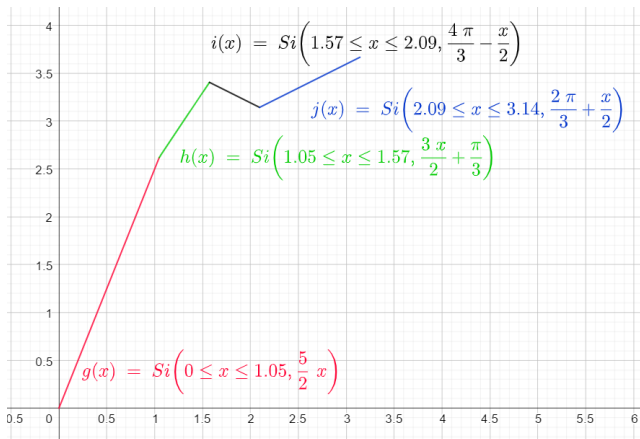
- Soit $x \in [0, \pi/2]$, donc $2x \in [0, \pi]$, donc $\arccos(\cos(2x)) = 2x$.
- Soit $x \in [\pi/2, \pi]$, donc $2x \in [\pi, 2\pi]$ donc $2\pi - 2x \in [0, \pi]$, donc $\arccos(\cos(2x)) = 2\pi - 2x$.

Pour $\arccos(3 \cos(x))$, j'ai trois cas :

- Soit $x \in [0, \pi/3]$, donc $3x \in [0, \pi]$, donc $\arccos(\cos(3x)) = 3x$.
- Soit $x \in [\pi/3, 2\pi/3]$, donc $3x \in [\pi, 2\pi]$ donc $2\pi - 3x \in [0, \pi]$, donc $\arccos(\cos(3x)) = 2\pi - 3x$.
- Soit $x \in [2\pi/3, \pi]$, donc $3x \in [2\pi, 3\pi]$ donc $3x - 2\pi \in [0, \pi]$, donc $\arccos(\cos(3x)) = 3x - 2\pi$.

En notant f , la fonction à tracer,

$$\begin{array}{ll}
 \text{Si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} & \text{alors } f(x) = x + \frac{2x}{2} + \frac{3x}{6} = \frac{5}{2}x \\
 \text{Si } \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} & \text{alors } f(x) = x + \frac{2x}{2} + \frac{6}{2\pi - 3x} = \frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3} \\
 \text{Si } \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi & \text{alors } f(x) = x + \frac{2}{2\pi - 2x} + \frac{6}{2\pi - 3x} = -\frac{1}{2}x + \frac{4\pi}{3} \\
 \text{Si } \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi & \text{alors } f(x) = x + \frac{2\pi - 2x}{2} + \frac{3x - 2\pi}{6} = \frac{1}{2}x + \frac{2\pi}{3}
 \end{array}$$

FIGURE 4.3 – Tracé de f sur $[0, \pi]$

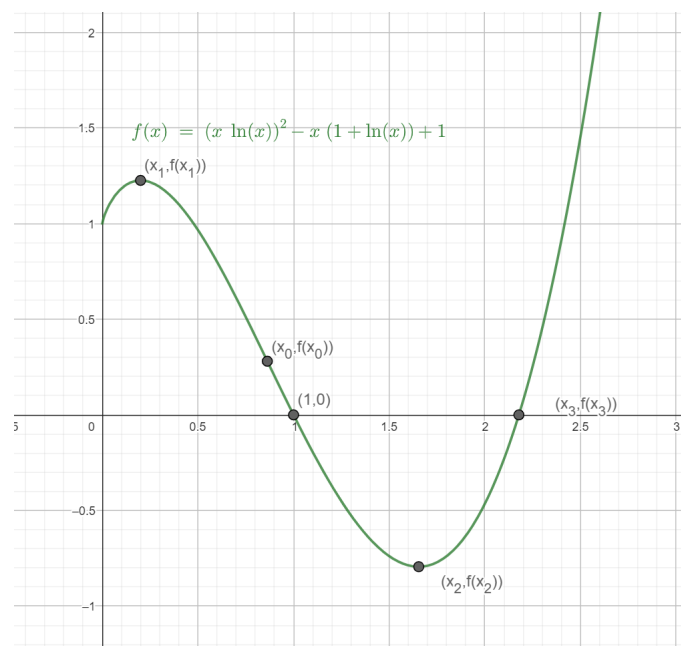
Indication pour l'exercice 4.4 :

La fonction, notée f , est clairement définie sur $\mathbb{R}^+$. Elle y est continue¹. Elle y est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$, de dérivée $\forall x > 0, f'(x) = 2x \ln(x)(1 + \ln(x)) - 1 - \ln(x) - 1 = 2x \ln^2(x) + 2x \ln(x) - \ln(x) - 2$. On ne voit pas le signe. Dérivons une nouvelle fois.

On obtient alors $\forall x > 0, f''(x) = 2 \ln^2(x) + 6 \ln(x) + 2 - \frac{1}{x}$. On ne voit pas le signe. Dérivons encore.

On obtient alors $\forall x > 0, f'''(x) = \frac{1}{x}g(x)$, avec $g(x) := 4 \ln(x) + 6 + \frac{1}{x}$. On montre assez facilement que g est positive, en la dérivant, puis en l'évaluant en $1/4$. f'' est donc strictement croissante, et tend vers $+\infty$ en $+\infty$, en $-\infty$ en 0^+ . De fait, f'' est bijective par le TVI. Soit donc x_0 tel que $f''(x_0) = 0$. De fait, f' est décroissante puis croissante, le réel de basculement étant x_0 . Pour avoir le signe de f' , il serait bien de calculer $f'(x_0)$, mais on ne l'a pas. Remarquons que $f''(1) = 1 > 0 = f''(x_0)$, donc $x_0 < 1$. Par croissance de f' , $f'(x_0) < f'(1) = -2$. Donc $f'(x_0)$ est négatif, et par le TVI, il existe un unique couple (x_1, x_2) tel que $x_1 < x_0 < x_2$ et $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. On conclut en remarquant que $f(1) = 0$.

On a donc : une fonction croissante, atteint un maximum local en x_1 puis décroissante, point d'inflexion en $x_0 < 1$, passant par 1 en 0, atteint un minimum local en x_2 puis croissante. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x_3 > x_2$ où f s'annule.



1. et en remarquant que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, on peut prolonger la fonction et la rendre continue sur $\mathbb{R}^+$: ce chapitre n'étant pas encore fait, cela n'a le statut que de remarque

Indication pour l'exercice 4.5 :

On suppose que $(a, b) \neq (0, 0)$. Sinon, le résultat est immédiat. J'ai alors $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$. De fait,

$$a \cos(x) + b \sin(x) = c \iff \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Or, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$. De fait, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos(\theta)$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin(\theta)$. De fait, j'ai

$$a \cos(x) + b \sin(x) = c \iff \cos(\theta) \cos(x) + \sin(\theta) \sin(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \iff \cos(x - \theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Maintenant, si $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ n'est pas dans $[-1, 1]$, il n'y a pas de solution. Sinon, on peut prendre $\arccos$ et l'on a $x - \theta = \pm \arccos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) [2\pi]$.

Passons aux hyperboliques. C'est plus simple car on a des formules plus sympa.

$$\begin{aligned} a \cosh(x) + b \sinh(x) = c &\iff \frac{ae^x + ae^{-x} + be^x - be^{-x}}{2} = c \\ &\iff (a+b)e^x - 2c + (a-b)e^{-x} = 0 \\ &\iff (a+b)e^{2x} - 2ce^x + (a-b) = 0 \\ &\iff \begin{cases} (a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0 \\ X = e^x \end{cases} \end{aligned}$$

Le polynôme sous-jacent, noté P est de degré 2. Il admet des solutions lorsque $\Delta \geq 0$, c'est-à-dire $4c^2 - 4(a-b)(a+b) = 4(c^2 + b^2 - a^2) \geq 0$. Plus précisément, le produit de ses racines est $a^2 - b^2$ et la somme est $c(a+b)$. Donc si $c^2 + b^2 - a^2 > 0$

- Si $a^2 - b^2$ est strictement négatif, le produit des racines est de signe négatif, donc l'une est positive, l'autre négative. De fait, je n'ai qu'une seule solution à l'équation initiale.
- Si $a^2 - b^2 = 0$, l'une des racines est nulle, donc je n'ai encore qu'une seule solution, à condition qu'elle soit strictement positive aussi, *i.e.* $c(a+b) > 0$.
- Si $a^2 - b^2$ est strictement positive, si $c(a+b) \geq 0$, alors les deux racines sont positives. Sinon, les deux racines sont négatives.

Suite à cette discussion, puisque nos deux candidats sont

$$X_1 := \frac{c - \sqrt{b^2 + c^2 - a^2}}{a+b}, X_2 := \frac{c + \sqrt{b^2 + c^2 - a^2}}{a+b},$$

on peut traduire les disjonctions de cas sur les solutions.

- Cas 1 : j'ai donc $a^2 - b^2 < 0$, donc $\sqrt{b^2 + c^2 - a^2} \geq \sqrt{c^2} = c$. Donc X_1 est négatif. Directement, X_2 est positive et la solution est donnée par $x = \ln(X_2)$.
- Cas 2 : j'ai donc $X_1 = 0$ et $X = \frac{2c}{a+b}$. On a bien la solution quand $c(a+b) > 0$, qui est alors $x = \ln(X)$.
- Cas 3 : les solutions, s'il y en a, sont $\ln(X_1)$ et $\ln(X_2)$.

Indication pour l'exercice 4.6 :

Puisque $xy \neq 1$, $\arctan(x) + \arctan(y) \neq \frac{\pi}{2}$. De fait,

$$\tan(\arctan(x) + \arctan(y)) = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Si $|x| < 1, |y| < 1$, alors la quantité $\arctan(x) + \arctan(y)$ est dans $] -\pi/2, \pi/2[$. $\tan$ de cette quantité est donc celle à laquelle on pense, c'est-à-dire

$$\tan(\arctan(x) + \arctan(y)) = \frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(y))}{1 - \tan(\arctan(x)) \tan(\arctan(y))} = \frac{x + y}{1 - xy}.$$

D'où l'égalité.

Si $x = 0$, ou $y = 0$, il n'y a rien à faire. Supposons donc $x \neq 0$. Traitons d'abord $x > 0$.

- Si $y \leq 0$, alors $0 < \arctan(x) < \pi/2$ et $-\pi/2 < \arctan(y) \leq 0$. De fait, $\arctan(x) + \arctan(y)$ vivent encore dans $] -\pi/2, \pi/2[$.
- Sinon, pour que ça fasse 0, il faudrait que $\arctan(x) + \arctan(y) < \pi/2$ donc $\arctan(y) < \pi/2 - \arctan(x)$, ce qui est équivalent à (puisque ces deux quantités vivent dans $[0, \pi/2[$) $y < \tan(\pi/2 - \arctan(x)) = \frac{1}{x}$.

Par positivité stricte de x , j'ai donc équivalent à $xy < 1$.

Si maintenant $x < 0$, ça fait 0 si et seulement si en $(-x, -y)$ aussi, ça fait 0. On se ramène alors au cas positif pour conclure que cela n'est possible que si $(-x)(-y) < 1$ donc la même condition.

Dans les autres cas, si $xy > 1$, on s'est trop éloigné de $] -\pi/2, \pi/2[$. De fait, si $x > 0, y > 0$, alors $\arctan(x) + \arctan(y) \in]\pi/2, 3\pi/2[$ donc la quantité voulue vaut π . Si $x < 0, y < 0$, la quantité vaut $-\pi$.

Indication pour l'exercice 4.7 :

Il suffit de résoudre l'équation $\operatorname{argsinh}(x) = y$ pour tout x, y , et exprimer la solution x en fonction de y . Idem pour $\operatorname{argcosh}(x) = y$. On trouve respectivement $y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ et $y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$. Attention aux domaines de définition.

Indication pour l'exercice 4.8 :

Il est clair que 0 est une période. Si T, S , sont deux périodes, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T + S) = f((x + T) + S) = f(x + T) = f(x)$. Si T est une période, alors $f(x - T) = f((x - T) + T) = f(x - T + T) = f(x)$.

Soit T , une période. Alors $f(0) = f(0 + T) = f(T)$. $0 \in \mathbb{Q}$ donc $T \in \mathbb{Q}$. Soit maintenant $y \in \mathbb{Q}$. Alors si $x \in \mathbb{Q}, x + y \in \mathbb{Q}$. Donc $f(x) = f(x + y)$. Si j'ai $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = x + y \in \mathbb{Q}$. Alors $z - y \in \mathbb{Q}$ donc $x \in \mathbb{Q}$. On vient de montrer que la somme de deux rationnels est rationnels, la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnel. De fait, $y \in T$. Donc $T = \mathbb{Q}$.

Indication pour l'exercice 4.9 :

1. Déjà, $\frac{1}{\cosh}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc gd est bien définie. Par le théorème fondamental de l'analyse, gd est dérivable de dérivée

$$\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{gd}'(t) = \frac{1}{\cosh(t)}.$$

Par ailleurs, $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto 2 \arctan(e^t) - \frac{\pi}{2}$ l'est aussi de dérivée :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi'(t) = \frac{2e^t}{1 + e^{2t}} = \frac{2}{e^{-t} + e^t} = \frac{1}{\cosh(t)}.$$

Ainsi, $\phi = \operatorname{gd} + C$ avec C , une certaine constante réelle. Or, $\phi(0) = \operatorname{gd}(0) = 0$ donc $C = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

- $\arctan(x) \in [0, \pi/2[$ si, et seulement si, $x \geq 0$.
- $\arctan(x) \in]-\pi/2, 0]$ si, et seulement si, $x \leq 0$.

Ainsi, $\sin(\arctan(x))$ est du signe de x .

Par ailleurs, $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\sin(\arctan(x))$ existe et ne s'annule qu'en 0. De fait,

$$\forall x \neq 0, \frac{1}{\sin^2(\arctan(x))} = \frac{\cos^2(\arctan(x)) + \sin^2(\arctan(x))}{\sin^2(\arctan(x))} = \frac{1}{\tan^2(\arctan(x))} + 1 = \frac{1}{x^2} + 1.$$

De fait,

$$|\sin(\arctan(x))| = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(\arctan(x))| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Puisque $\sin \circ \arctan(x)$ est du signe de x pour x réel, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$\cos \circ \arctan$ ne s'annule jamais. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

donc

$$1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}.$$

Ainsi,

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3. On a

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \cos(\text{gd}(t)) &= \cos\left(2 \arctan(e^t) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \sin(\arctan(e^t)) \cos(\arctan(e^t)) \\ &= 2 \sqrt{\frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}} \sqrt{\frac{1}{1+e^{2t}}} \\ &= \frac{2e^t}{1+e^{2t}} = \frac{1}{\cosh(t)}. \end{aligned}$$

4. A la question 1, on a établi que $\text{gd}' = \frac{1}{\cosh}$ et $\cos \circ \text{gd} = \frac{1}{\cosh}$ par la question précédente. Ainsi, gd est solution de $y' = \cos(y)$ sur $\mathbb{R}$ et comme $\text{gd}(0) = 0$, alors gd est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos(y) & \text{sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

5. On a

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \sin(\text{gd}(t)) &\stackrel{Q1}{=} \sin\left(2 \arctan(e^t) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos(2 \arctan(e^t)) \\ &= -2 \cos^2(\arctan(e^t)) + 1 \\ &\stackrel{Q2}{=} -\frac{2}{1+e^{2t}} + 1 \\ &= \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \\ &= \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \\ &= \tanh(t). \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \tan(\operatorname{gd}(t)) = \frac{\sin(\operatorname{gd}(t))}{\cos(\operatorname{gd}(t))} = \cosh(t) \tanh(t) = \sinh(t).$$

6. Déjà, $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ donc $\arctan \circ \exp : \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi/2[$ donc

$$2 \arctan \circ \exp - \frac{\pi}{2} \in \mathcal{F} \left(\mathbb{R}, \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right).$$

Ensuite, pour $t \in \mathbb{R}, y \in] -\pi/2, \pi/2[$,

$$\begin{aligned} 2 \arctan(e^t) - \frac{\pi}{2} = y &\iff \arctan(e^t) = \frac{y + \frac{\pi}{2}}{2} \\ &\iff e^t = \tan \left(\frac{y + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \\ &\iff t = \ln \left(\tan \left(\frac{y + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, gd est bijective de $F = \mathbb{R}$ dans $E = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et on a $\operatorname{gd}^{-1}(t) = \ln \left(\tan \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \right)$.

7. Soit $x \in] -\pi/2, \pi/2[$. On a

$$\begin{aligned} \tan \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right) &= \frac{\sin \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 \sin \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \cos \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right)}{\cos^2 \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + 1} \\ &= \frac{\cos(x)}{1 - \sin(x)} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \sin^2(x)}{(1 - \sin(x))^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)}}. \end{aligned}$$

Cela conclut.

Chapitre 5

Applications, relations

5.1 Exercices

Exercice 5.1.

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, xy) \in \mathbb{R}^2$. Est-elle injective ? Surjective ? A quelle condition $(X, Y) \in f(\mathbb{R}^2)$? Déterminer l'image réciproque de $\mathbb{R} \times \{1\}$ et de $\{1\} \times \mathbb{R}$.

Exercice 5.2.

Soit $f : z \in \mathbb{C} \mapsto z^2 + z + 1 \in \mathbb{C}$. Déterminer les images directes et réciproques de $\mathbb{C}, \mathbb{C}^*, \mathbb{R}$ par f .

Exercice 5.3.

Soit $f : z \in \mathbb{C}^* \mapsto z + z^{-1} \in \mathbb{C}$. Est-elle injective ? Surjective ? Déterminer l'image directe de $\mathbb{C}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{U}$ par f .

Exercice 5.4 (Les $f^{-1}(f(\cdot))$, etc...).

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E, B \subset F$. Montrer que $f^{-1}(f(A)) = A$ si, et seulement si f est injective et $f(f^{-1}(B)) = B$ si, et seulement si f est surjective.

Exercice 5.5 (Image directe/réciproque de composée).

Soit E, F, G des ensembles, et $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$. On définit $f^{+1} : A \in \mathcal{P}(E) \mapsto f(A) \in \mathcal{P}(F), f^{-1} : B \in \mathcal{P}(F) \mapsto f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(E)$. Déterminer $(g \circ f)^{+1}$ et $(g \circ f)^{-1}$. En déduire que la composée de deux injections est une injection, idem pour les surjections.

Exercice 5.6 (Injectivité/surjectivité de l'application image directe/réciproque).

Soit E, F , deux ensembles, $f : E \rightarrow F$. On définit $f^{+1} : A \in \mathcal{P}(E) \mapsto f(A) \in \mathcal{P}(F), f^{-1} : B \in \mathcal{P}(F) \mapsto f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(E)$. Etablir les deux équivalences suivantes :

1.

$$f \text{ injective} \iff f^{+1} \text{ injective} \iff f^{-1} \text{ surjective}$$

2.

$$f \text{ surjective} \iff f^{+1} \text{ surjective} \iff f^{-1} \text{ injective}$$

Exercice 5.7 (Image directe/réciproque d'unions/intersections).

Soit E, F , deux ensembles et $(A_i)_{i \in I}$, une famille finie de sous-ensembles de E , $(B_j)_{j \in J}$ de F . Soit $f : E \rightarrow F$. Montrer que

$$f^{-1} \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j) ; f^{-1} \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$$

Autrement dit, avec les images réciproques, tout va bien.

Montrer que, certes, on a

$$f \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i),$$

mais que l'on a seulement

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

Montrer alors que si f est injective si, et seulement si, $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E), f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Exercice 5.8 (Curryfication).

Soit E, F, G , trois ensembles. Montrer qu'il existe une bijection de $\mathcal{F}(E \times F, G)$ vers $\mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F, G))$.

Exercice 5.9 (Une CNS de la bijectivité ?? (la suite de l'exercice 5.4 en fait)).

Soit E, F , deux ensembles, et $f : E \rightarrow F$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\forall A \subset E, f(E \setminus A) = F \setminus (f(A)) \iff f \text{ est bijective.}$$

Exercice 5.10 (Surjection de Cantor).

Montrer le théorème de Cantor : il n'y a pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Indication : on pourra considérer, pour $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$, l'ensemble $\{x \in E : x \notin f(x)\}$.

Exercice 5.11 (Disque).

Soit $\sim$, la relation définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = k$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. On note C , l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$, et pour tout $x \in \mathbb{R}, \bar{x}$, la classe de x . (Plus tard en L3, on notera volontiers $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ à la place de C). Soit π , la fonction définie par

$$\begin{array}{ccc} \pi : & \mathbb{R} & \rightarrow C \\ & x & \mapsto \bar{x} \end{array}.$$

Montrer que π est 1-périodique et surjective.

3. Montrer qu'il existe une bijection entre C et $\mathbb{U}$, donc en fait entre C et $C(0, 1)$, $C(0, 1)$ étant le cercle unité.

Exercice 5.12 (Des groupes sans les groupes).

Soit $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Soit $\sim_n$, la relation définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $x \sim_n y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = kn$. On notera volontiers $x \equiv y[n]$ à la place.

1. Montrer que pour tout n , $\sim_n$ est une relation d'équivalence.
2. On fixe dans toute la suite un entier n non nul. On note C_n , l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim_n$, et pour tout $x \in \mathbb{Z}, \bar{x}$, la classe de x . (Plus tard, pour les MP, on notera volontiers $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ à la place de C_n). Soit π , la fonction définie par

$$\begin{array}{ccc} \pi : & \mathbb{R} & \rightarrow C_n \\ & x & \mapsto \bar{x} \end{array}.$$

Montrer que π est surjective.

3. Montrer qu'il existe une bijection entre C_n et $\mathbb{U}_n$.

La suite est pour les plus téméraires...

4. Soit $\mathfrak{R}$, la relation définie sur $C_n \times C_n$ par $\bar{x}\mathfrak{R}\bar{y} \iff \exists \ell \in \mathbb{Z}, x - y = \ell m$, avec x , un entier quelconque tel que $\pi(x) = \bar{x}$, de même pour y . Cette relation est-elle bien définie pour $n = 2$ et $m = 4$? (i.e. si je prends x_1, x_2 tel que $\pi(x_1) = \pi(x_2) = \bar{x}$, est-ce que $\exists \ell_1 \in \mathbb{Z}, x_1 - y = \ell_1 m \iff \exists \ell_2 \in \mathbb{Z}, x_2 - y = \ell_2 m$?).

Dans la suite, on considérera n et m premiers entre eux. Et on admettra que cette relation est bien définie dans ce cas (il faut un peu d'arithmétique).

5. Montrer que $x \sim_{nm} y \iff \begin{cases} x \sim_n y \\ x \sim_m y \end{cases}$. On touche alors au lemme chinois ...

Exercice 5.13 (Un peu de sup).

Soit A, B , deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$. Donner un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 5.14 (sup inf vs inf sup).

1. Cas discret : soit $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$ avec $p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$. Montrer que

$$\max_{1 \leq i \leq p} \left(\min_{1 \leq j \leq q} (a_{i,j}) \right) \leq \min_{1 \leq i \leq p} \left(\max_{1 \leq j \leq q} (a_{i,j}) \right).$$

2. Cas continu : soit $f : (x, y) \in A \times B \mapsto f(x, y)$, avec A, B , deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} f(x, y) \right) \leq \inf_{x \in A} \left(\sup_{y \in B} f(x, y) \right).$$

5.2 Éléments de corrections

Indication pour l'exercice 5.1 :

Elle n'est ni injective ($f(2, 1) = f(1, 2)$), ni surjective ($(1, 1)$ n'a pas d'antécédent). (X, Y) a un antécédent s'il existe x, y , deux réels tels que $X = x + y, Y = xy$, donc si $t^2 - Xt + Y$ est une équation d'inconnue t admettant deux solutions réelles. Cela équivaut à $\Delta = X^2 - 4Y \geq 0$ avec Δ discriminant de l'équation précédente donc l'ensemble des couples au-dessus de la parabole d'équation $Y = \frac{1}{4}X^2$ convient.

$(\mathbb{R} \times \{1\})$ est en fait une droite parallèle à la droite d'équation $X = 1$. $f^{-1}(\mathbb{R} \times \{1\}) = \{(x, y) : x + y = 1\}$. C'est donc une droite.

$(\{1\} \times \mathbb{R})$ est en fait une droite parallèle à la droite d'équation $Y = 1$. $f^{-1}(\{1\} \times \mathbb{R}) = \{(x, y) : xy = 1\}$. C'est donc une hyperbole.

Indication pour l'exercice 5.2 :

D'abord les directes. L'équation $f(z) = Z$ admet au moins une racine complexe donc $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Les solutions sont non nulles donc l'équation $f(z) = Z$ admet des solutions dans $\mathbb{C}^*$. Donc $f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}$. Enfin, on écrit $x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4$ donc tous les réels de $[3/4, +\infty[$ admet un antécédent, donc $f(\mathbb{R}) = [3/4, +\infty[$. Maintenant, les réciproques. Il est assez clair que $f^{-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Par contre, $f^{-1}(\mathbb{C}^*) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \neq 0\}$ donc c'est $\mathbb{C}$ en ôtant les racines du polynôme, qui sont j et j^2 .

Par contre, si $z \in \mathbb{C}, z \in f^{-1}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $f(z) = \overline{f(z)}$, i.e. $(z - \bar{z})(z + \bar{z} + 1) = 0$, i.e. $z = \bar{z}$ ou $z + \bar{z} = 2\Re(z) = -1$. Ainsi, on obtient l'axe des réels et les complexes de partie réelle $x = -\frac{1}{2}$.

Indication pour l'exercice 5.3 :

Elle n'est pas injective car $f(2) = f(1/2)$, mais il est clair que f est surjective, par d'Alembert-Gauss. En particulier, on a en fait $f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}$ puisque les racines obtenues sont non nulles.

On montre assez facilement (étudier les variations) que $f(\mathbb{R}^*) =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. Aussi, $f(\mathbb{U}) = \{2 \cos(t) ; t \in [0, 2\pi]\} = [-2, 2]$.

Indication pour l'exercice 5.4 :

Nous allons montrer que $A = f^{-1}(f(A))$ si, et seulement si f est injective, et $B = f(f^{-1}(B))$ si, et seulement si, f est surjective. D'abord l'injectivité. C'est une CNS, donc démontrons la double implication.

$\Rightarrow$ D'après le cours, $A \subset f^{-1}(f(A))$. Démontrons l'inclusion contraire. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$, donc il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Par injectivité, $x = a$ donc $x \in A$. Remarquons que pour démontrer la première inclusion, il n'y a que des équivalences sauf une implication, qui s'avère être une équivalence lorsque la fonction est supposée injective...

$\Leftarrow$ Soit $x, y \in E$, tel que $f(x) = f(y)$. Alors

$$\{x_1\} = f^{-1}(f(\{x_1\})) = f^{-1}(\{f(x_1)\}) = f^{-1}(\{f(x_2)\}).$$

Mais de même,

$$\{x_2\} = f^{-1}(f(\{x_2\})) = f^{-1}(\{f(x_2)\}) = f^{-1}(\{f(x_1)\}).$$

De fait, $\{x_1\} = \{x_2\}$ donc $x_1 = x_2$. f est bien injective.

Puis la surjectivité.

$\Rightarrow$ D'après le cours, $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Démontrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in B$. Par surjectivité de f , je dispose d'un x tel que $f(x) = y$. De fait, $x \in f^{-1}(B)$, donc $f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Mais $f(x) = y$. Cela conclut.

$\Leftarrow$ Soit $y \in B$. Alors $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$. De fait, $y \in f(f^{-1}(\{y\}))$ donc il existe $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $f(x) = y$. D'où la surjectivité.

Indication pour l'exercice 5.9 :

Autant tout faire en même temps. Montrons d'abord qu'en toute généralité, $f(E) \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$. En effet, soit $y \in f(E) \setminus f(A)$. Soit donc $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Par hypothèse, $f(x) \notin f(A)$ donc $x \notin A$. De fait, $x \in E \setminus A$ donc $y \in f(E \setminus A)$. Montrons maintenant la double implication de la CNS.

$\Leftarrow$ Il suffit de montrer l'inclusion réciproque. Remarquons que par surjectivité de f , on a $f(E) = F$. Il suffit alors de montrer que $f(E \setminus A) \subset F \setminus f(A)$. Soit $y \in f(E \setminus A)$. Soit donc $x \in E \setminus A$ tel que $f(x) = y$. Par injectivité de f , $\forall a \in A$, $f(a) \neq y$ car sinon, $a = x$ donc $x \in A$ ce qui n'est pas. Donc $y \notin f(A)$ et il est clair que $y \in F$. D'où le résultat.

$\Rightarrow$ Démontrons que f est injective. Soit $x, y \in E$ tel que $f(x) = f(y)$. Supposons que $x_1 \neq x_2$. Alors $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$ donc $f(x_2) \in f(E \setminus \{x_1\}) = F \setminus f(\{x_1\})$, donc $f(x_2) = f(x_1) \in F \setminus f(\{x_1\})$. Cela est absurde car $f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\}$. D'où l'injectivité.

Concernant la surjectivité, on prend $A = \emptyset$ et on conclut car $f(\emptyset) = \emptyset$.

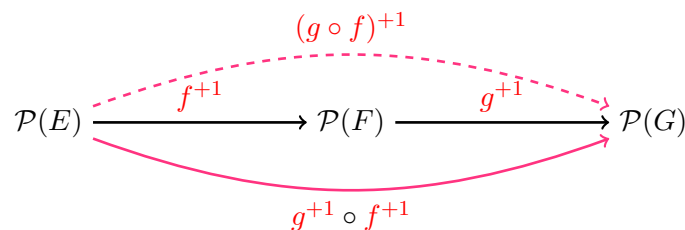
Indication pour l'exercice 5.5 :

On va montrer que $(g \circ f)^{+1} = g^{+1} \circ f^{+1}$ et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Mettons quelques couleurs. Pour une fonction $f : E \rightarrow F$, on définit

$$\begin{array}{ccc} f^{+1} : \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} ; \quad \begin{array}{ccc} f^{-1} : \mathcal{P}(F) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B) \end{array}$$

Au lieu de couleur, on peut changer de nom. Par exemple, $f^{+1} = u$. C'est ce que l'on fera dans la deuxième version. Donc l'écriture $f^{-1}(B)$ correspond à l'image de B par l'application f^{-1} tandis que $f^{-1}(B)$ correspond à l'image réciproque de B par f . Ainsi, $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$.

On veut donc montrer que $(g \circ f)^{+1} = g^{+1} \circ f^{+1}$. Déjà, ces notations ont un sens. Puisque $g \circ f : E \rightarrow G$, on a $(g \circ f)^{+1} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(G)$ et



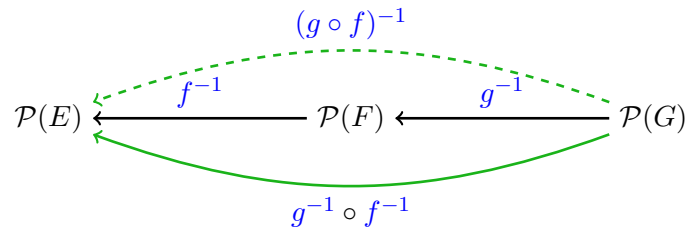
On veut donc montrer que les deux flèches roses envoie un même élément sur une même image pour avoir égalité des applications, les ensembles de départ et d'arrivée étant égaux. Soit donc A , un élément de l'ensemble de départ de $(g \circ f)^{+1}$, c'est-à-dire $\mathcal{P}(E)$. Autrement dit, $A \subset E$.

- Premier calcul : $(g \circ f)^{+1}(A)$. $(g \circ f)^{+1}(A) = (g \circ f)(A) = g(f(A))$. Cette dernière égalité est à justifier. On le fera ci-après.

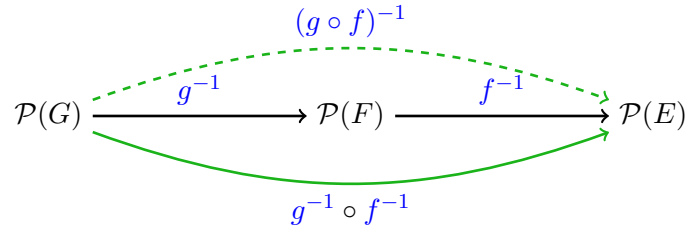
- Deuxième calcul : $g^{+1} \circ f^{+1}(A)$. $g^{+1} \circ f^{+1}(A) = g^{+1}(f^{+1}(A)) = g^{+1}(f(A)) = (g(f(A)))$.

Donc pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $(g \circ f)^{+1}(A) = g^{+1} \circ f^{+1}(A)$ donc $(g \circ f)^{+1} = g^{+1} \circ f^{+1}$.

On veut maintenant montrer que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ donc puisque encore $g \circ f : E \rightarrow G$, on a $(g \circ f)^{-1} : \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ et on a les flèches dans l'autre sens



ce qui revient à dire, dans le bon sens,



On veut donc montrer que les deux flèches **vertes** envoient un même élément sur une même image pour avoir égalité des applications, les ensembles de départ et d'arrivée étant égaux. Soit donc B , un élément de l'ensemble de départ de $(g \circ f)^{-1}$, c'est-à-dire $\mathcal{P}(G)$. Autrement dit, $B \subset G$.

- Premier calcul : $(g \circ f)^{-1}(B) = (g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$. Cette dernière égalité est à justifier. On le fera ci-après.
 - Deuxième calcul : $f^{-1} \circ g^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) = f^{-1}(g^{-1}(B)) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.
- Donc pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1} \circ g^{-1}(A)$ donc $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Justifions maintenant les deux égalités.

1. D'abord, $(g \circ f)(A) = g(f(A))$. On rappelle que $(g \circ f)(A) = \{y \in A_{g \circ f} : \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x) : x \in A\}$ avec $A_{g \circ f}$, l'ensemble d'arrivée de $g \circ f$ qui n'est autre que G . On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 y \in (g \circ f)(A) &\iff \exists x \in A, (g \circ f)(x) = y \\
 &\iff \exists x \in A, g(f(x)) = y \\
 &\iff \exists z = f(x) \in f(A), g(z) = y \\
 &\iff y \in g(f(A)).
 \end{aligned}$$

Donc $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

2. Ensuite, $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$. On rappelle que $(g \circ f)^{-1}(B) = \{x \in D_{g \circ f} : (g \circ f)(x) \in B\}$ avec $D_{g \circ f}$, l'ensemble de départ de $g \circ f$ qui n'est autre que E . On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 x \in (g \circ f)^{-1}(B) &\iff (g \circ f)(x) \in B \\
 &\iff g(f(x)) \in B \\
 &\iff f(x) \in g^{-1}(B) \\
 &\iff x \in f^{-1}(g^{-1}(B)).
 \end{aligned}$$

Donc $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

Indication pour l'exercice 5.6 :

1. On va montrer que $(1) \iff (2)$ et $(1) \iff (3)$.

$(1) \implies (2)$ Soit A_1, A_2 , deux parties de E tel que $f^{+1}(A_1) = f^{+1}(A_2)$, i.e. $f(A_1) = f(A_2)$. De fait $f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(f(A_2))$ et par injectivité de f , $A_1 = A_2$. CQFD.

$(2) \implies (1)$ Soit x, y tel que $f(x) = f(y)$. Alors $\{f(x)\} = \{f(y)\}$ donc $f(\{x\}) = f(\{y\})$, donc $f^{+1}(\{x\}) = f^{+1}(\{y\})$. Par injectivité de f^{+1} , j'ai $\{x_1\} = \{x_2\}$ ce qui conclut.

$(3) \implies (1)$ Soit x_1, x_2 tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Par surjectivité de f^{-1} , il existe $B \subset F$ telle que $E \setminus \{x_1\} = f^{-1}(B)$. Donc $x_1 \notin f^{-1}(B)$ donc $f(x_1) \notin B$. De même, $f(x_2) \notin B$ donc $x_2 \notin f^{-1}(B)$ donc $x_2 \notin E \setminus \{x_1\}$ donc $x_2 \in \{x_1\}$. D'où le résultat.

$(1) \implies (3)$ Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B = f(A)$. Comme f est injective, on sait que $f^{-1}(f(A)) = A$ donc $f^{-1}(B) = A$, donc $f^{-1}(B) = A$. CQFD.

2. Idem, on va montrer que $(1) \iff (2)$ et $(1) \iff (3)$.

$(1) \implies (2)$ Soit $B \subset F$. Posons $A = f^{-1}(B)$. Par surjectivité de f , on a $f(f^{-1}(B)) = B$ donc $f(A) = B$ donc $f^{+1}(A) = B$. Ainsi, f^{+1} est bien surjective.

$(2) \implies (1)$ Soit $y \in F$. Alors $\{y\} \subset F$ donc par surjectivité, j'ai une partie A tel que $f(A) = \{y\}$ donc $y \in f(A)$. J'ai donc un $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

$(3) \implies (1)$ Soit $y \in F$. L'injectivité de f^{-1} permet d'affirmer que $f^{-1}(\emptyset) \neq f^{-1}(\{y\})$. De fait, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ donc f est surjective car y admet un antécédent de fait.

$(1) \implies (3)$ Soit B_1, B_2 , deux parties de E tel que $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2)$. Alors $f(f^{-1}(B_1)) = f(f^{-1}(B_2))$ et par injectivité, $B_1 = B_2$ ce qui conclut.

Indication pour l'exercice 5.7 :

On raisonne par équivalence quand il y a égalité.

1. On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) &\iff f(x) \in \bigcup_{j \in J} B_j \\ &\iff \exists j \in J, f(x) \in B_j \\ &\iff \exists j \in J, x \in f^{-1}(B_j) \\ &\iff x \in \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j). \end{aligned}$$

2. Ensuite,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) &\iff f(x) \in \bigcap_{j \in J} B_j \\ &\iff \forall j \in J, f(x) \in B_j \\ &\iff \forall j \in J, x \in f^{-1}(B_j) \\ &\iff x \in \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j). \end{aligned}$$

3. Passons aux images directes. La première est une égalité.

$$\begin{aligned} y \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &\iff \exists x \in \bigcup_{i \in I} A_i, y = f(x) \\ &\iff \exists i \in I, \exists x \in A_i, y = f(x) \\ &\iff \exists i \in I, y \in f(A_i) \\ &\iff y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i). \end{aligned}$$

4. Il n'y a qu'une implication... $y \in f(\bigcap_{i \in I} A_i)$ donc je peux prendre un $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$; tel que $y=f(x)$. Alors $\forall i \in I, x \in A_i$ et $y = f(x)$, donc $\forall i \in I, y \in f(A_i)$ i.e. $y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$. L'équivalence est perdue car si $\forall i \in I, y \in f(A_i)$, alors pour chaque i , on peut choisir x_i dans A_i tel que $y = f(x_i)$, mais on aurait voulu intervertir l'existence de ces x_i avec le pour tout i (on voulait écrire $\forall i, \exists x \iff \exists x, \forall i$ ce qui est en général très faux).

Le reste est laissé au lecteur.

Indication pour l'exercice 5.8 :

L'application suivante est bijective

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A \times B, C) &\rightarrow \mathcal{F}(A, \mathcal{F}(B, C)) \\ (g : (a, b) \mapsto g(a, b)) &\mapsto (a \mapsto (b \mapsto g(a, b))) \end{aligned}$$

car la réciproque est immédiate.

Indication pour l'exercice 5.10 :

Supposons par l'absurde qu'il existe une bijection qui convient. En particulier, l'ensemble $A := \{x \in E : x \notin f(x)\}$ admet un antécédent par f , disons y . Par disjonction de cas :

- Si $y \in A$, par construction de A , $y \notin f(y) = A$ ce qui n'est pas.
- Si $y \notin A$, alors par définition de A , $y \in f(y) = A$ ce qui n'est pas.

Donc f ne peut être surjective, donc ne peut être bijective.

Indication pour l'exercice 5.11 :

1. Vérifier la définition ...
2. Soit x , un réel. $\pi(x+1) = \overline{x+1} = \bar{x} = \pi(x)$ puisque $x+1-x=1$ donc $x \sim x+1$. Ensuite, puisque $x \in \bar{x}$, pour tout $\bar{y} \in C$, j'ai $\pi(y) = \bar{y}$, donc π est surjective. On l'appelle la surjection canonique.
3. L'idée derrière est de considérer des représentants optima pour la classe. Il doit paraître naturel de considérer l'intervalle $[0, 1[$ puisque la $3,5$ est dans la classe de $0,5$. En fait, on ne conserve que la partie fractionnaire et en réalité, $x \sim y$ si x et y ont la même partie fractionnaire. De fait, lorsque je balaye les réels, je voyage de 0 à 1, et lorsque je dépasse 1, je retombe à 0. On comprends tout de suite si je transforme l'intervalle $[0, 1[$ en un cercle. (Le dessin, c'est prendre le segment $[0, 1[$, et de le tordre pour coller les deux extrémités ensemble : cela fait bien un cercle n'est-ce pas ? Et l'idée sous-jacente est exactement la même que pour le cercle trigonométrique, où l'on voyage non pas sur $[0, 1[$ mais sur $[0, 2\pi[$! D'où l'idée de la bijection.)

Tout ça pour dire que l'application

$$f : \bar{x} \in C \mapsto e^{2i\pi\bar{x}} \in \mathbb{U},$$

est une bijection. (A vérifier bien sûr).

Indication pour l'exercice 5.12 :

1. Oui
2. On fait de même que 5.11.

3. C'est tout simple : il suffit de considérer $f : \bar{x} \in C_n \mapsto e^{\frac{2i\bar{x}\pi}{n}}$ qui est bien une bijection. C'est la même idée que lorsque l'on a construit $\mathbb{U}_n$. On avait d'abord écrit que $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n}, k \in \mathbb{Z}\}$, puis on avait affiné modulo n puisqu'on retrouvait les mêmes valeurs. Dans le même sens que l'on à $\mathbb{Z}$, et on réduit $\mathbb{Z}$ modulo n (i.e. $C_n \dots$).
4. Non : par exemple, je prends $x_1 = 4, x_2 = 6$. J'ai $\pi(x_1) = \bar{x}_1 = 0$ et $\pi(x_2) = \bar{x}_2 = 0$, car je rappelle que, ici, $\bar{x} = 0$ si x est pair, 1 sinon. Toutefois, pour $y = 0$, j'ai bien $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{0}$ qui est en relation $\mathfrak{R}$ avec y puisque $0 - y = 0 = 0 \times 4$, sans pour autant que x_2 soit en relation $\mathfrak{R}$ avec y puisque $x_2 - y = 6$ qui n'est pas un multiple de 4, donc $x_2 \not\mathfrak{R} y$.
5. D'abord l'implication : $x \sim_{nm} y \iff \exists l, x - y = l(nm)$. Je prends $l_1 = ln$ et $l_2 = lm$. J'ai bien montré que $x - y = l_1m$ donc $x \sim_m y$ et que $x - y = l_2n$ donc $x \sim_n y$.
L'implication réciproque : je peux trouver l_1, l_2 tel que $x - y = l_1n$ et $x - y = l_2m$. De fait, $l_1n = l_2m$. Mais n et m sont premiers entre eux. En particulier, n ne divise pas m donc par le lemme de Gauss, n divise l_2 . l_2 s'écrit donc $l_2 = kn$. De fait, $x - y = l_2m = knm$. Donc $x \sim_{nm} y$.

Indication pour l'exercice 5.13 :

Soit $x \in A \cap B$. Alors $x \leq \sup(A)$ car $x \in A$, et $x \leq \sup(B)$ car $x \in B$, donc $x \leq \min(\sup(A), \sup(B))$, et ce, pour tout $x \in A \cap B$. L'inégalité passe donc au sup comme voulue. Pour un exemple d'inégalité stricte, on prend $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ et $B = [0, 1] \cup [4, 5]$. Alors $A \cap B = [0, 1]$ et $\sup(A \cap B) = 1$, tandis que $\min(\sup(A), \sup(B)) = \min(3, 5) = 3$.

Indication pour l'exercice 5.14 :

On rappelle que lorsque l'on a une inégalité $\leq$, on peut TOUJOURS "passer au sup" à droite, et "passer à l'inf" à gauche : on utilise le fait qu'un sup est avant tout un MAJORANT, et un inf est avant tout un MINORANT. Par contre, pour "passer au sup" à gauche, il faut un pour tout (on utilise le fait que ce soit le PLUS PETIT des MAJORANTS), et pour "passer à l'inf" à droite, il faut aussi un pour tout (on utilise le fait que ce soit le PLUS GRAND des MINORANTS).

Exemple : supposons qu'on ait : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. Il est immédiat que pour tout $n, v_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n$ car le sup est un majorant donc on a la suite d'inégalité $u_n \leq v_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n$. Par contre, on ne peut pas directement conclure que $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \leq v_n$ car en fait, on a $u_n \leq v_n$ et $u_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$, donc a priori, on ne peut pas comparer v_n et $\sup(u_n)$ (ça vient du fait que $3 \leq 4$ et $3 \leq 5$ mais on n'a pas $5 \leq 4$). Par contre, on a que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$: l'inégalité passe donc au sup à gauche et $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \leq v_n$.

Bref, reprenons l'exercice. Je laisse de côté le cas discret, pour se concentrer sur le cas continu. On a

$$\forall x \in A, y \in B, f(x, y) \leq f(x, y).$$

Or,

$$\forall x \in A, y \in B, \inf_{y \in B} f(x, y) \leq f(x, y) \leq f(x, y) \leq \sup_{x \in A} f(x, y).$$

Ce sont les passages au sup, inf triviaux. Pour résumer, pour tout $y \in B$ (*),

$$\forall x \in A, \inf_{y \in B} f(x, y) \leq \sup_{x \in A} f(x, y).$$

Cette inégalité passe au sup à gauche car vraie pour tout $x \in A$: j'ai

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x, y) \leq \sup_{x \in A} f(x, y),$$

et ce pour tout $y \in B$ (regardez la position (*)). Donc je peux passer à l'inf à droite pour écrire :

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x, y) \leq \inf_{y \in B} \sup_{x \in A} f(x, y),$$

ce qui conclut.

Chapitre 6

Calcul intégral

6.1 Exercices

Exercice 6.1 (Un mélange de tout).

Soit $\| \cdot \| : f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mapsto \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}$.

1. Calculer $\|f\|$ pour $f = t \mapsto te^t$ et $f = t \mapsto (e^t + 1)^{-1/2}$.
2. Montrer que $\sim$, une relation définie pour $(f, g) \in [\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})]^2$ par $f \sim g \iff \|f\| = \|g\|$, est une relation d'équivalence
3. On note C , l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$. On définit $\preceq$, une relation définie pour $\bar{f}, \bar{g} \in C$ par $\bar{f} \preceq \bar{g} \iff \|f\| \leq \|g\|$. Montrer que c'est une relation d'ordre.
4. Soit $\bar{f}, \bar{g} \in C$. Est-ce que $f \leq g \iff \bar{f} \preceq \bar{g}$? Même question si je me place au début dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^+)$.

Exercice 6.2 (Primitives à vue).

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sans calcul d'intégrale :

- | | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|---|--|
| a) $x \mapsto \frac{1}{x \ln^3(x)}$ | b) $x \mapsto \frac{1}{\tanh(x)}$ | c) $x \mapsto \frac{x^3}{2 + x^4}$ | d) $x \mapsto \frac{1}{(x - 1)^{1/4}}$ |
| e) $x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{x}$ | f) $x \mapsto \exp(e^x + x)$ | g) $x \mapsto \frac{1}{x + x \ln^2(x)}$ | h) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$ |

Exercice 6.3 (En vrac 1).

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|---|-----------------------------------|
| a) $x \mapsto \arctan(x)$ | b) $x \mapsto \frac{x}{\cos^2(x)}$ | c) $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ | d) $x \mapsto x \cosh^2(x)$ |
| e) $x \mapsto x \arctan(x)$ | f) $x \mapsto \exp(\arcsin(x))$ | g) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 + x}}$ | h) $x \mapsto \frac{1}{\cosh(x)}$ |
| i) $x \mapsto \sin(\ln(x))$ | j) $x \mapsto \frac{1}{1 + \tan(x)}$ | k) $x \mapsto \frac{1}{\sin(x) + \sin(2x)}$ | l) $x \mapsto \sqrt{1 - t^2}$ |
| m) $x \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2 + 1}$ | | | |

Exercice 6.4 (Pour s'amuser).

Déterminer la limite quand x tend vers 0 de $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ pour f , une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.5 (Calcul fastidieux).

Soit a, b deux réels, n un entier. Calculer

$$\int_a^b (t - a)^n (t - b)^n dt.$$

Exercice 6.6 (Généralisation de $\int x \ln(x)$).

Soit n, p , un entier, n non nul. On pose

$$f_{n,p} : x \mapsto x^n (\ln(x))^p.$$

Soit $a > 0$. Calculer $I_{n,p} = \int_a^1 f_{n,p}(x) dx$.

Exercice 6.7 (Somme alternée).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que $I_{k+1} + I_k = \frac{1}{k+1}$.
3. En déduire que

$$S_n := \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$

4. Montrer que $I_n \leq \frac{1}{2n}$. En déduire la valeur de la limite de S_n .

Exercice 6.8 (Wallis).

On pose $W_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta) d\theta$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer W_0, W_1, W_2 .
2. Montrer que $(W_n)_n$ est décroissante.
3. Montrer que pour tout n , $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. En déduire les valeurs de W_{2n} et W_{2n+1} .
4. Montrer que $(n+1)W_{n+1}W_n = W_0$.
5. En déduire un encadrement de nW_n^2 , puis sa limite.
6. Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n W_k x^k = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos(\theta)} d\theta.$$

7. Montrer que $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos(\theta)} d\theta = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$.

6.2 Éléments de corrections

Indication pour l'exercice 6.1 :

1. Il faut calculer $\int_0^1 (te^t)^2 dt$. On doit alors faire une 2 IPP successives en dérivant t^2 , puis en dérivant t . J'ai

$$\int_0^1 (te^t)^2 dt = \frac{1}{2} [t^2 e^{2t}]_0^1 - \int_0^1 te^{2t} dt = \frac{1}{2} [t^2 e^{2t}]_0^1 - \frac{1}{2} [te^{2t}]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2t} dt = \frac{1}{2} \left[t^2 e^{2t} - te^{2t} + \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1.$$

On trouve alors $\frac{e^2 - 1}{4}$ donc $\|t \mapsto te^t\| = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{2}$.

Pour le deuxième, il faut calculer $\int_0^1 \frac{1}{e^t + 1} dt$. On fait le changement de variable $x = e^t$, qui est $\mathcal{C}^1$ bijectif. J'ai $dx = e^t dt = x dt$. De fait,

$$\int_0^1 \frac{1}{e^t + 1} dt = \int_1^e \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_1^e \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx = [\ln(x) - \ln(1+x)]_1^e = 1 + \ln(2) - \ln(1+e).$$

Donc $\|t \mapsto (e^t + 1)^{-1/2}\| = \sqrt{1 + \ln(2) - \ln(1+e)}$.

2. Vérifier, c'est facile.
3. Le seul truc intéressant est l'anti-symétrie. Si $\bar{f} \preccurlyeq \bar{g}$ et $\bar{g} \preccurlyeq \bar{f}$, alors on a $\|f\| \leq \|g\|$ et $\|g\| \leq \|f\|$ donc $\|f\| = \|g\|$ par anti-symétrie de $\leq$ dans $\mathbb{R}$. Mais $\|f\| = \|g\|$ signifie $\bar{f} = \bar{g}$. Donc Si $\bar{f} \preccurlyeq \bar{g}$ et $\bar{g} \preccurlyeq \bar{f}$, alors $\bar{f} = \bar{g}$.
4. Considérer les exemples de la question 1.

Indication pour l'exercice 6.2 :

Les reconnaissances de fonctions se font à une constante multiplicative près.

1. On reconnaît $\frac{u'}{u^3}$ avec $u = \ln(x)$.
2. On reconnaît $\frac{u'}{u}$ avec $u = \sinh$.
3. On reconnaît $\frac{u'}{u}$ avec $u = 2 + x^4$.
4. On reconnaît $\frac{u'}{u^{1/4}}$ avec $u = x - 1$.
5. On reconnaît $u' \ln(u)$ avec $u = \ln(x)$. Et la primitive de $u' \ln(u)$ est $u \ln(u) - u$.
6. On reconnaît $u' e^u$ avec $u = e^x$. (on rappelle $\exp(a+b) = \exp(a) \exp(b)$).
7. On reconnaît $\frac{u'}{1+u^2}$ avec $u = \ln(x)$.
8. On reconnaît $\frac{u'}{1+u^2}$ avec $u = \sqrt{x}$.

Indication pour l'exercice 6.3 :

1. On fait une IPP, en écrivant $1 \times \arctan$, en intégrant 1, en dérivant $\arctan$. On reconnaît dans l'intégrale résiduelle la dérivée de $\ln(x^2 + 1)$ à une constante multiplicative près.
2. On fait une IPP, en dérivant x , en intégrant $1/\cos^2$ (penser à dériver $\tan$). Dans l'intégrale résiduelle, on reconnaît la dérivée de $\ln(\cos)$.
3. IPP en intégrant 1. L'intégrale résiduelle : penser à $\arctan$.
4. IPP en dérivant x . L'intégrale de $\cosh^2$ n'est autre que $\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4}$.
5. On fait une IPP en dérivant x , en intégrant $\arctan$.
6. Changement de variable $x = \sin(t)$ puis IPP.
7. Changement de variable $t = \sqrt{1+x}$.
8. Changement de variable $t = e^x$.

9. Changement de variable $t = \ln(x)$.
10. Changement de variable $t = \tan(x)$.
11. Changement de variable $t = \cos(x)$.
12. Changement de variable $t = \cos(x)$.
13. Changement de variable $t = 1/x$.

Indication pour l'exercice 6.4 :

On écrit

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{F(x) - F(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} F'(0) = f(0).$$

Correction de l'exercice 6.5 :

On va d'abord chercher à calculer

$$I_{m,n} := \int_a^b (t-a)^m (t-b)^n dt.$$

On réalise une IPP. Au choix pour la dérivée/primitive. Je vais donc dériver $t \mapsto (t-a)^m$ et intégrer $t \mapsto (t-b)^n$. J'ai donc par IPP

$$I_{m,n} = \left[(t-a)^m \frac{(t-b)^{n+1}}{n+1} \right]_a^b - \frac{m}{n+1} \int_a^b (t-a)^{m-1} (t-b)^{n+1} dt.$$

Le crochet vaut clairement 0. Et je reconnais $I_{m-1,n+1}$ pour l'intégrale.

$$I_{m,n} = \frac{-m}{n+1} I_{m-1,n+1}.$$

J'obtiens donc une relation de récurrence pour tout m et n . De proche en proche (*i.e.* en faisant une récurrence), comme j'ai

$$I_{m,n} = \frac{-m}{n+1} I_{m-1,n+1}, I_{m-1,n+1} = \frac{-(m-1)}{n+2} I_{m-2,n+2},$$

donc

$$I_{m,n} = \frac{-m}{n+1} \frac{-(m-1)}{n+2} I_{m-2,n+2}.$$

Par récurrence, je peux montrer

$$\forall k \leq m, I_{m,n} = \frac{(-1)^k m(m-1)(m-2) \times \cdots \times (m+k-1)}{(n+1)(n+2) \times \cdots \times (n+k)} I_{m-k,n+k}.$$

L'initialisation est déjà acquise. Pour l'hérédité, si je suppose que

$$I_{m,n} = \frac{(-1)^k m(m-1)(m-2) \times \cdots \times (m+k-1)}{(n+1)(n+2) \times \cdots \times (n+k)} I_{m-k,n+k},$$

alors comme

$$I_{m-k,n+k} = \frac{-(m-k)}{n+k+1} I_{m-k-1,n+k+1},$$

je remplace et j'ai

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{(-1)^k m(m-1)(m-2) \times \cdots \times (m+k-1)}{(n+1)(n+2) \times \cdots \times (n+k)} \frac{-(m-k)}{n+k+1} I_{m-k-1,n+k+1} \\ &= \frac{(-1)^{k+1} m(m-1)(m-2) \times \cdots \times (m+(k+1)-1)}{(n+1)(n+2) \times \cdots \times (n+(k+1))} I_{m-(k+1),n+(k+1)}. \end{aligned}$$

Donc le rang $k+1$ est acquis. Donc j'ai bien prouvé par récurrence ce que l'on veut. En particulier pour $k=m$, j'ai

$$I_{m,n} = \frac{(-1)^m m(m-1)(m-2) \cdots (m-m+1)}{(n+1)(n+2) \cdots (n+m)} I_{0,n+m} = \frac{(-1)^m m!}{(n+1) \cdots (n+m)} I_{0,n+m}.$$

Or, on sait calculer $I_{0,n+m}$. J'ai

$$I_{0,n+m} = \int_a^b (t-b)^{n+m} dt = \left[\frac{(t-b)^{n+m+1}}{n+m+1} \right]_a^b = -\frac{(a-b)^{n+m+1}}{n+m+1}.$$

D'où finalement

$$I_{n,m} = \frac{(-1)^m m!}{(n+1) \cdots (n+m)} \times \left(-\frac{(a-b)^{n+m+1}}{n+m+1} \right) = \frac{(-1)^{m+1} m!}{(n+1) \cdots (n+m)(n+m+1)} (a-b)^{m+n+1}.$$

Donc

$$I_{n,n} = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(n+1) \cdots (2n+1)} (a-b)^{2n+1}.$$

Correction de l'exercice 6.6 :

Comme pour $\int t \ln(t)$, on intègre t et on dérive $\ln$. Je pose alors $u = \ln(x)^p$, $v' = x^n$. Alors $u' = \frac{p \ln(x)^{p-1}}{x}$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

On a alors

$$\int_a^1 x^n \ln(x)^p dx = \frac{1}{n+1} \left[x^{n+1} \ln(x)^p \right]_a^1 - \frac{p}{n+1} \int_a^1 x^n \ln(x)^{p-1} dx = \frac{-a^{n+1} \ln(a)^p}{n+1} - \frac{p}{n+1} \int_a^1 x^n \ln(x)^{p-1} dx.$$

L'intégrale est toujours bien définie puisque on a montré que $f_{n,p}$ est prolongeable par continuité en 0 pour tout n, p .

Je fais donc tendre a vers 0. Par croissance comparées, le crochet tend vers 0. J'ai donc

$$I_{n,p} = \frac{-p}{n+1} I_{n,p-1}.$$

J'obtiens donc une relation de récurrence pour tout n et p . De proche en proche (i.e. en faisant une récurrence), comme j'ai

$$I_{n,p} = \frac{-p}{n+1} I_{n,p-1}, I_{n,p-1} = \frac{-(p-1)}{n+1} I_{n,p-2},$$

j'en déduis

$$I_{n,p} = \frac{-p \times (-1)(p-1)}{(n+1)(n+2)} I_{n,p-2}.$$

J'en déduis la forme à démontrer par récurrence

$$\forall k \leq p, I_{n,p} = \frac{(-1)^k p(p-1) \cdots (p-k+1)}{(n+1)^k} I_{n,p-k}.$$

L'initialisation est déjà acquise. Pour l'hérédité, je suppose qu'à un k fixé,

$$I_{n,p} = \frac{(-1)^k p(p-1) \cdots (p-k+1)}{(n+1)^k} I_{n,p-k}.$$

Comme $I_{n,p} = \frac{-p}{n+1} I_{n,p-1}$ est vrai pour tout n, p , j'ai

$$I_{n,p-k} = \frac{-(p-k)}{n+1} I_{n,p-k-1}.$$

J'ai donc en remplaçant

$$I_{n,p} = \frac{(-1)^k p(p-1) \cdots (p-k+1) - (p-k)}{(n+1)^k} \frac{1}{n+1} I_{n,p-k-1} = \frac{(-1)^{k+1} p(p-1) \cdots (p-k+1-1)}{(n+1)^{k+1}} I_{n,p-(k+1)}.$$

D'où l'hérédité. Donc j'ai ce que je voulais par récurrence. En particulier pour $k = p$, j'ai

$$I_{n,p} = \frac{(-1)^p p(p-1) \cdots (p-p+1)}{(n+1)^p} I_{n,p-p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p} I_{n,0}.$$

Or

$$I_{n,0} = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$I_{n,p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p} \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

Correction de l'exercice 6.7 :

1.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

Puis,

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^1}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x+1}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x} dx = [x]_0^1 - I_0 = 1 - \ln(2).$$

2. J'écris

$$\begin{aligned} I_{k+1} + I_k &= \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^k}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{k+1} + x^k}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^k(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^k dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

3. L'arnaque ici est de remplacer

$$\frac{(-1)^k}{k+1} = (-1)^k \frac{1}{k+1} = (-1)^k (I_{k+1} + I_k) = (-1)^k I_{k+1} + (-1)^k I_k = -(-1)^{k+1} I_{k+1} + (-1)^k I_k.$$

Je pose alors $u_k = (-1)^k I_k$. Alors

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k - (-1)^{k+1} I_{k+1} = \sum_{k=0}^n u_k - u_{k+1} \stackrel{\text{Telesc.}}{=} u_0 - u_{n+1} \\ &= (-1)^0 I_0 - (-1)^{n+1} I_{n+1} = I_0 + (-1)^{n+2} I_{n+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}. \end{aligned}$$

4. Soit $x \in [0, 1]$. Alors $\frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{2}$. En effet, cela est équivalent à $2x \leq 1+x$ qui est équivalent à $1-x \geq 0$ qui est donc vraie. Donc $\frac{x^n}{1+x} \leq \frac{x^{n-1}}{2}$. Par croissance de l'intégrale, j'ai

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^n}{n} \right]_0^1 = \frac{1}{2n}.$$

Donc $I_n \leq \frac{1}{2n}$. Ainsi, comme I_n est positive (par positivité de l'intégrale, l'intégrale d'une fonction positive est positive), par théorème d'encadrement, I_n converge vers 0. Donc

$$S_n = I_0 + (-1)^n I_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I_0.$$

Mais $I_0 = \ln(2)$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2).$$

Indication pour l'exercice 6.8 :

1. On trouve $W_0 = \frac{\pi}{2}, W_1 = 1, W_2 = \frac{\pi}{4}$.

2. On a

$$W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta)(1 - \cos(\theta))d\theta.$$

Mais sur $[0, \pi/2]$, $\cos^n(\theta) \geq 0$ et $(1 - \cos(\theta)) \leq 0$. Par positivité de l'intégrale, on a donc $W_n - W_{n+1} \geq 0$. Alternativement, on a $\cos^n(\theta) \geq \cos^{n+1}(\theta)$ car sur $[0, \pi/2]$, $\cos(\theta) \in [0, 1]$, et la suite $(x^n)_n$ est décroissante si $x \in [0, 1]$.

3.

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \cos^{n+1}(\theta)d\theta = \left[\sin(\theta) \cos^{n+1}(\theta) \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1) \sin^2(\theta) \cos^n(\theta)d\theta.$$

Le crochet est nul, et on remarque que $\sin^2 = 1 - \cos^2$. De fait,

$$W_{n+2} = (n+1) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta)d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(\theta)d\theta \right) = (n+1)(W_n - W_{n+2}).$$

On a finalement

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}.$$

On calcule W_{2n} et W_{2n+1} par récurrence. On a intuitivement

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} W_{n-6} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} \dots \frac{n-2k-1}{n-2k} W_{n-2k-2}$$

Si n est pair, disons, $n = 2p$, on écrit la formule ci-dessus pour $k = p-1$. J'ai

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \frac{2p-3}{2p-2} \dots \frac{2p-2(p-1)-1}{2p-2(p-1)} W_{2p-2p} = \frac{2p-1}{2p} \frac{2p-3}{2p-2} \dots \frac{1}{2} W_0$$

On reconnaît un produit des impairs au-dessus, et un produit des pairs en-dessous. MAIS (calcul crucial)

$$\frac{\prod_{k=1}^p (2k-1)}{\prod_{k=1}^p (2k)} = \frac{\prod_{k=1}^p (2k-1) \prod_{k=1}^p (2k)}{\prod_{k=1}^p (2k) \prod_{k=1}^p (2k)} = \frac{\prod_{k=1}^{2p} k}{\left(\prod_{k=1}^p (2k) \right)^2}.$$

Mais $\prod_{k=1}^p (2k) = 2^p \prod_{k=1}^p k = 2^p p!$. D'où

$$\frac{\prod_{k=1}^p (2k-1)}{\prod_{k=1}^p (2k)} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2}.$$

On fait de même pour W_{2p+1} , sauf que les pairs seront en haut, les impairs en bas. Il s'agit donc de montrer ces deux formules par récurrence.

4. C'est une récurrence immédiate.

5. On a $W_n^2 \geq W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$ donc $nW_n^2 \geq \frac{\pi}{2 + \frac{1}{n}}$. Aussi,

$$(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1} \geq nW_n,$$

par décroissance de $(W_n)_n$. Donc en multipliant par W_n positif, on a

$$(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2} \geq nW_nW_n.$$

Sa limite est donc $\frac{\pi}{2}$.

6. On fixe x . J'écris

$$\sum_{k=0}^n W_k x^k = \sum_{k=0}^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta) d(\theta) = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^n (x \cos(\theta))^k d\theta.$$

On reconnaît une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^n (x \cos \theta)^k = \frac{1}{1 - x \cos(\theta)} - \frac{(x \cos(\theta))^{n+1}}{1 - x \cos(\theta)}.$$

J'ai donc

$$\sum_{k=0}^n W_k x^k = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos(\theta)} d\theta - R_n,$$

avec $R_n := \int_0^{\pi/2} \frac{(x \cos(\theta))^{n+1}}{1 - x \cos(\theta)} d\theta$. Il faut montrer que R_n tend vers 0. On a

$$0 \leq |R_n| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{|x|^{n+1}}{|1 - x \cos(\theta)|} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} \frac{|x|^{n+1}}{K} d\theta = \frac{\pi}{2K} |x|^{n+1},$$

en utilisant successivement $|\cos^{n+1} \theta| \leq 1$ et je peux trouver un K tel que $|1 - x \cos(\theta)| \geq K$ pour tout $\theta \in [0, \pi/2[$: par exemple, je peux prendre $|1 - x|$. Par théorème d'encadrement, R_n tend vers 0. D'où la conclusion.

7. On fait le changement de variable $u = \tan(\theta/2)$ et $d\theta = \frac{2}{1+u^2} du$. En utilisant $\cos(\theta) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos(\theta)} d\theta = \int_0^1 \frac{1}{1 - x \frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{2du}{1+u^2 - x(1-u^2)} = 2 \int_0^1 \frac{du}{\frac{1+x}{1-x} u^2 + 1} \frac{1}{1-x}.$$

On réalise le changement de variable $\zeta = u \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. On a :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - x \cos(\theta)} = \frac{2}{1-x} \int_0^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\zeta^2 + 1} d\zeta = \frac{2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \int_0^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right).$$

Chapitre 7

Équations différentielles ordinaires

7.1 Exercices

Exercice 7.1 (En vrac).

Résoudre :

a) $y' + y = |x|$.

b) $(x - 1)y' + y = x$.

c) $\sinh(x)y' - \frac{y}{\cosh(x)} = \frac{\sinh^2(x)}{\cosh(x)}$.

d) $xy' + 2y = \arctan(x)$.

e) $xy' - 2y = x^3$.

Exercice 7.2 (Equation fonctionnelle historique).

Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x)f(y).$$

Exercice 7.3 (Grönwall).

Enonçons le lemme de Grönwall :

Proposition 7.1 (Lemme de Grönwall).

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Soient $a \in \mathcal{C}^0([t_0, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ et $y \in \mathcal{C}^0([t_0, +\infty[, \mathbb{R})$. Soit K , un réel (positif). Alors

$$\left[\forall t \geq t_0, y(t) \leq K + \int_{t_0}^t a(s)y(s)ds \right] \implies \left[\forall t \geq t_0, y(t) \leq K \exp \left(\int_{t_0}^t a(s)ds \right) \right]$$

En considérant $f := \frac{K + \int_{t_0}^t a(s)y(s)ds}{\exp \left(\int_{t_0}^t a(s)ds \right)}$, montrer le lemme de Grönwall.

Exercice 7.4 (Formule de Duhamel).

1. Soit f , une fonction de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$. Montrer que $f' + f$ bornée implique f bornée.
2. On suppose de plus que $f' + f$ admet une limite qui vaut 0 en $+\infty$. Montrer que f aussi.

Exercice 7.5 (Unicité des solutions d'un problème de Cauchy).

Le théorème suivant est à la fois important, à la fois culturel.

Théorème 7.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire).

Soit n , un entier naturel non nul, et $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, n fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soit $b \in$

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, n nombres complexes. Alors le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t) \\ \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, y^{(k)}(0) = z_k \end{cases}$$

admet une unique solution.

On montre facilement que cette équation est linéaire, d'où le nom "Cauchy-Lipschitz linéaire". Le non-linéaire existe, mais est pour le coup hors-programme (c'est bien de le connaître pour X-ENS).

L'objectif de cet exercice est de montrer l'unicité pour l'ordre 2. Pour l'existence, un cours de mathématiques spéciales est préférable.

Pour simplifier l'énoncé, toutes les fonctions considérées ont pour ensemble de départ $\mathbb{R}^+$.

1. Expliquer pourquoi il suffit de montrer l'unicité en considérant $z_1 = z_0 = 0$ et b , la fonction nulle.
2. Montrer que

$$\forall t \geq 0, |y''(t)| + |y'(t)| \leq (|a_1(t)| + 1)|y'(t)| + (|a_0(t)| + 1)|y(t)|.$$

3. On pose pour $t \geq 0$, $u(t) := \int_0^t |y''(s)| + |y'(s)| ds$.

(a) Montrer que u est positive et dérivable.

(b) Montrer que si f, g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$, la fonction $m := \max(f, g)$ l'est aussi sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Montrer que

$$\forall t \geq 0, 0 \leq u'(t) \leq m(t)u(t).$$

(d) Montrer que $u(t) = 0$ grâce au lemme de Grönwall (exercice 7.5).

4. Conclure.

Remarque : on peut démontrer le cas n quelconque en s'inspirant de cette méthode. Remarque 2 : avec les outils de mathématiques spéciales, ces questions fastidieuses sont balayées !

Exercice 7.6 (Un oral de X-ENS).

Résoudre $y'' + |y| = 0, y(0) = -1$.

Exercice 7.7 (Solutions périodiques).

Soient a, b deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodiques de période 1. A quelle(s) condition(s), l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ admet-elle des solutions 1-périodiques. les calculer le cas échéant.

Exercice 7.8 (En vrac 2).

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + 3y' + 2y = \cosh(x)$

b) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

c) $y'' - 4y' + 13y = 10 \cos(3t)$.

d) $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + \sin(3x)$

e) $y'' + y' - 12y = \cos(4x) + \sin(3x)$

f) $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' - 2 = 0$

Exercice 7.9 (Florilège d'équations fonctionnelles).

Résoudre les équations fonctionnelles suivantes :

1. $f'(x) = f(1/x)$ pour $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

2. $f'(x) = f(\lambda - x)$ pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, λ étant un réel.

3. $f''(x) + f(-x) = x$ pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4. $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ pour $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) - \{0\}$.

Exercice 7.10 (Un calcul pénible (X)).

Trouver les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$f'(x) + 5 \int_0^x \cos(2(x-t))f(t)dt = 10.$$

Autour de Grönwall

Il existe d'autres formes du lemme de Grönwall. On a les théorèmes suivants :

Théorème 7.3 (Grönwall Intégrale).

Soit f, g , deux fonctions continues vérifiant, pour un certain t_0 et K ,

$$\forall t \geq t_0, f(t) \leq K + \int_{t_0}^t f(x)g(x)dx \text{ et } g \geq 0.$$

Alors

$$\forall t \geq t_0, f(t) \leq K \exp \left(\int_{t_0}^t g(x)dx \right).$$

Théorème 7.4 (Grönwall Différentielle).

Soit f, g , deux fonctions continues vérifiant

$$f'(t) \leq f(t)g(t).$$

Alors

$$\forall t \geq t_0, f(t) \leq f(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t g(x)dx \right).$$

Théorème 7.5 (Grönwall Générale).

Soit f, g, h , trois fonctions continues sur un segment à valeurs positives et vérifiant

$$\forall t \geq t_0, f(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t f(x)h(x)dx.$$

Alors

$$\forall t \geq t_0, f(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t g(x)h(x) \exp \left(\int_x^t h(u)du \right) dx.$$

Le premier théorème est déjà démontré. Montrer les deux autres. *Indication* : on pourra poser $y : t \mapsto \exp \left(\int_{t_0}^t g(x)dx \right)$ pour le deuxième théorème, et les deux fonctions $y : t \mapsto \int_{t_0}^t f(x)h(x)dx$ et $z : t \mapsto y(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t h(u)du \right)$ pour le dernier théorème.

7.2 Éléments de corrections

Indication pour l'exercice 7.1 :

1. Les solutions de l'équation homogène (E_h) sont les

$$\left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto Ce^{-t} \in \mathbb{R} : C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour trouver une solution particulière, on procède par variation de la constante. Soit $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et notons $y_{part} : t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda(t)e^{-t}$. Alors y_{part} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'_{part}(t) = \lambda'(t)e^{-t} + \lambda(t)e^{-t}.$$

Ainsi, y_{part} est solution de (E) si, et seulement si, $\forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t)e^{-t} = |t|$ i.e. $\forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t) = |t|e^t$. Supposons que y_{part} soit solution. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda(t) = \int_0^t |x|e^x dx + C.$$

Si $t \geq 0$, alors

$$\int_0^t |x|e^x dx = \int_0^t xe^x dx = te^t - e^t + 1 = (t-1)e^t + 1.$$

Si $t \leq 0$, alors

$$\int_0^t |x|e^x dx = -((t-1)e^t + 1).$$

Soit donc

$$g(t) = \begin{cases} (t-1)e^t + 1 & \text{si } t \geq 0 \\ (1-t)e^t - 1 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

g est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} g(t) = 0$$

assurant la continuité de g en 0. Par ailleurs,

$$\frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \frac{(t-1)e^t + 1 - 0}{t - 0} = \frac{(t-1)e^t + 1}{t}$$

pour tout $t < 0$. En posant $h : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto (t-1)e^t$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on reconnaît ci-dessus un taux d'accroissement pour h . Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = h'(0) = 0.$$

De même pour les négatifs, on aura

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = 0.$$

g est donc dérivable en 0 et puisque $g'(t) = |t|e^t$ pour tout t réel, on a le caractère $\mathcal{C}^1$ de g . Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto Ce^{-t} + \begin{cases} (t-1) + e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ (1-t) - e^{-t} & \text{si } t \leq 0 \end{cases} : C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. On note $(E_+) : y' + \frac{1}{t-1}y = \frac{t}{t-1}$ pour $t > 1$ et $(E_-) : y' + \frac{1}{t-1}y = \frac{t}{t-1}$ pour $t < 1$.

- Soit $(E_{H,+}) : y' + \frac{1}{t-1}y = 0$. Les solutions de $(E_{H,+})$ sont les

$$\left\{ t \in]1, +\infty[\mapsto C \exp(-\ln(t-1)) = \frac{C}{t-1} : C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour trouver une solution particulière, on procède par variation de la constante. Soit $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et notons $y_{part} : t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda(t)\frac{1}{t-1}$. Alors y_{part} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'_{part}(t) = \lambda'(t)\frac{1}{t-1} - \lambda(t)\frac{1}{(t-1)^2}.$$

Ainsi, y_{part} est solution de (E) si, et seulement si, $\forall t \in]1, +\infty[, \lambda'(t) \frac{1}{t-1} = \frac{t}{t-1}$ i.e. $\forall t \in]1, +\infty[, \lambda'(t) = t$. Supposons que y_{part} soit solution. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda(t) = \frac{t^2}{2} + C.$$

Une solution particulière est alors

$$y_{part} : t \in]1, +\infty[\mapsto \frac{t^2}{2(t-1)}.$$

Les solutions de (E_+) sont les

$$t \in]1, +\infty[\mapsto \frac{C_+}{t-1} + \frac{t^2}{2(t-1)} = \frac{C_+ + \frac{t^2}{2}}{t-1} : C_+ \in \mathbb{R}$$

De même, on trouve que les solutions sur (E_-) sont les

$$t \in]-\infty, 1[\mapsto \frac{C_-}{1-t} + \frac{t^2}{2(t-1)} = \frac{-C_- + \frac{t^2}{2}}{t-1} : C_- \in \mathbb{R}$$

Soit maintenant y une solution générale de (E) . Etant solution sur (E_+) et (E_-) , on en déduit qu'il existe deux constantes réelles C_+ et C_- tels que

$$\forall t > 1, y(t) = \frac{C_+ + \frac{t^2}{2}}{t-1} ; \forall t < 1, y(t) = \frac{-C_- + \frac{t^2}{2}}{t-1}.$$

Nécessairement pour que y soit dérivable en 0, on a $C_+ = \frac{-1}{2}$ et $C_- = \frac{1}{2}$. Ainsi, $y = \frac{1}{2}(\text{Id} + 1)$.

3. Notons (E) l'équation $\sinh(x)y' - \frac{y}{\cosh(x)} = \frac{\sinh^2(x)}{\cosh(x)}$. On note (E_+) l'équation dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors $(E_+) \iff y' - \frac{y}{\cosh(x)\sinh(x)} = \tanh(x)$. Notons $(E_{H,+})$ l'équation homogène associée. En remarquant que $\frac{1}{\cosh \sinh} = \frac{1}{\cosh^2} \frac{\sinh}{\cosh} = \frac{u'}{u}$ pour $u = \tanh$, les solutions de $(E_{H,+})$ sont les

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto C \exp(\ln \circ \tanh(x)) = C \tanh(x) \end{array} : C \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour avoir une solution particulière, réalisons une variation de la constante. Soit $\lambda \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$. Notons $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda(x) \tanh(x)$. g est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et g est solution si, et seulement si, $\forall x > 0, \lambda'(x) \tanh(x) = \tanh(x)$ (en pratique, refaites le calcul comme précédemment). Ainsi, $\forall x > 0, \lambda'(x) = 1$ et $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x \tanh(x)$ est solution particulière. Les solutions de (E_+) sont donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto (C+x) \tanh(x) \end{array} : C \in \mathbb{R} \right\}$$

On a les mêmes solutions pour (E_-) . On souhaite les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

Analyse : soit f une telle fonction. Alors $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ vérifie (E_+) et $f|_{\mathbb{R}_-^*}$ vérifie (E_-) . Il existe alors deux constantes $C_+, C_- \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x > 0, f(x) = (C_+ + x) \tanh(x) ; \forall x < 0, f(x) = (C_- + x) \tanh(x).$$

Puisque f vérifie (E) , f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc admet un développement limité à l'ordre 1. On a

$$f(x) = (C_+ + x)(x + o_{x \rightarrow 0^+}(x)) = C_+x + o_{x \rightarrow 0^+}(x) = (C_- + x)(x + o_{x \rightarrow 0^-}(x)) = C_-x + o_{x \rightarrow 0^-}(x).$$

Par unicité du développement limité, $C_+ = C_-$. Ainsi, f est de la forme $x \in \mathbb{R} \mapsto (C + x) \tanh(x)$ avec C un réel.

Synthèse : Il est clair que pour tout $C \in \mathbb{R}$, $x \mapsto (C + x) \tanh(x)$ est solution de (E) .

4. Notons (E) l'équation $xy' + 2y = \arctan(x)$. On note (E_+) l'équation dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors $(E_+) \iff y' + \frac{2}{x}y = \frac{\arctan(x)}{x}$. Notons $(E_{H,+})$ l'équation homogène associée. Les solutions de $(E_{H,+})$ sont les

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto C e^{-2 \ln(x)} = \frac{C}{x^2} : C \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Pour avoir une solution particulière, réalisons une variation de la constante. Soit $\lambda \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$. Notons $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\lambda(x)}{x^2}$. g est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$\forall x > 0, g'(x) = \frac{\lambda'(x)}{x^2} - \frac{2\lambda(x)}{x^3}.$$

g est alors solution de $(E_{H,+})$ si, et seulement si, $\forall x > 0, \frac{\lambda'(x)}{x^2} = \frac{\arctan(x)}{x}$ i.e. $\forall x > 0, \lambda'(x) = x \arctan(x)$. $t \mapsto t$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\arctan$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^x t \arctan(t) dt &= \left[\frac{t^2}{2} \arctan(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \frac{t^2}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left([t^2 \arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left([t^2 \arctan(t)]_0^x - \int_0^x 1 + \int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left([t^2 \arctan(t)]_0^x - [t]_0^x + [\arctan(t)]_0^x \right) \\ &= \left[\frac{1}{2} ((t^2 + 1) \arctan(t) - t) \right]_0^x. \end{aligned}$$

Une primitive de $x \mapsto x \arctan(x)$ est alors $x \mapsto \frac{1}{2}((x^2 + 1) \arctan(x) - x)$. Une solution particulière est alors $x \mapsto \frac{1}{2x^2}((x^2 + 1) \arctan(x) - x)$. Les solutions de (E_+) sont donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{C}{x^2} + \frac{1}{2x^2}((x^2 + 1) \arctan(x) - x) : C \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

On trouve exactement les mêmes solutions pour (E_-) l'équation (E) sur $\mathbb{R}_-^*$. On souhaite les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

Analyse : soit f une telle fonction. Alors $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ vérifie (E_+) et $f|_{\mathbb{R}_-^*}$ vérifie (E_-) . Il existe alors deux constantes $C_+, C_- \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{C_+}{x^2} + \frac{1}{2x^2}((x^2 + 1) \arctan(x) - x) ; \forall x < 0, f(x) = \frac{C_-}{x^2} + \frac{1}{2x^2}((x^2 + 1) \arctan(x) - x).$$

Étudions déjà la continuité en 0. On se demande la limite quand x tend vers 0^+ de la quantité $\frac{C_+}{x^2} + \frac{1}{2x^2}((x^2 + 1) \arctan(x) - x)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x^2}((x^2 + 1) \arctan(x) - x) &= \frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{1}{2} \frac{\arctan(x) - x}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{1}{2} \frac{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{1}{2} \frac{-x}{3} + o(x). \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{1}{2x^2}((x^2 + 1) \arctan(x) - x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Ainsi, (E_+) n'admet qu'une seule solution continue : c'est celle pour $C_+ = 0$. De même pour (E_-) , on obtient $C_- = 0$. La seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est alors

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2x^2}((x^2 + 1) \arctan(x) - x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Synthèse : il est clair que la fonction précédente convient car elle vérifie (E) et est bien de classe $\mathcal{C}^1$ (elle est de même de classe $\mathcal{C}^\infty$). En effet, $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ et $f|_{\mathbb{R}_-^*}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition, f est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall n \geq 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f^{(n)}(x).$$

En vertu du théorème de prolongement $\mathcal{C}^\infty$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5. Notons (E_+) l'équation $y' - \frac{2}{x}y = x^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et (E_-) l'équation $y' - \frac{2}{x}y = x^2$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.

Les solutions de l'équation homogène $E_{H,\pm} : y' - \frac{2}{x}y = 0$ sont les $x \in \mathbb{R}^{\pm*} \mapsto Cx^2$ pour C réel. $x \mapsto x^3$ est solution particulière (cela se voit) et ce sur $\mathbb{R}^{\pm*}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}^{\pm*}$ sont donc les $x \in \mathbb{R}^{\pm*} \mapsto C_\pm x^2 + x^3$ avec $C_\pm$ un réel. Le raccord étant de classe $\mathcal{C}^1$, on peut choisir n'importe quelles constantes pour obtenir une solution globale.

Correction de l'exercice 7.2 :

Il existe plusieurs manières de résoudre le problème.

Dans un premier temps, $f(0+0) = f(0) = f(0)f(0)$ donc $f(0)$ est 0 ou 1. Si $f(0) = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+0) = f(x) = f(x)f(0) = 0$ donc f est nulle. Supposons donc $f(0) \neq 0$.

A partir de là, il y a deux voies possibles. Ici, on a de la dérivabilité donc on va l'exploiter. Dans un second temps, on présente deux méthodes ne nécessitant que la continuité.

- Première méthode. Soit f une telle fonction. Fixons $y \in \mathbb{R}$. Soit $g_y : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x+y)$. Alors g_y est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\forall x \in \mathbb{R}, g'_y(x) = f'(x+y)$. Or $\forall x \in \mathbb{R}, g_y(x) = f(x)f(y)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, g'_y(x) = f'(x)f(y)$. En évaluant l'égalité en $x = 0$, on a alors $f'(y) = f'(0)f(y)$ et ceci est vrai pour tout $y \in \mathbb{R}$. Ainsi, f vérifie le problème de Cauchy $y' = f'(0)y, f(0) = 1$. Ce problème de Cauchy a pour solution $x \mapsto \exp(f'(0)x)$ donc si f est solution, $f(x) = \exp(f'(0)x)$. La réciproque est claire.
- Deuxième méthode. Soit f une telle fonction (on ne suppose que la continuité en un seul point $x_0 \in \mathbb{R}$). On va montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ puis dérivable sur $\mathbb{R}$ et on se ramène à précédemment.
 - Continuité ? Soit x un réel. Soit $h \in \mathbb{R}$. Alors $f(x+h) = f(x-x_0+x_0+h) = f(x-x_0)f(x_0+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x-x_0)f(x_0)$ par continuité de f en x_0 . Mais $f(x-x_0)f(x_0) = f(x-x_0+x_0) = f(x)$ donc $f(x+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$ ce qui assure la continuité voulue.

- Dérivabilité ? Pour cela, fixons $y \in \mathbb{R}$. L'application

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ en vertu du théorème fondamental de l'analyse. Par intégration, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t+y)dt = \int_0^x f(t)f(y)dt = f(y) \int_0^x f(t) = f(y)F(x).$$

Un changement de variable affine dans la première intégrale donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t+y)dt = \int_y^{x+y} f(t)dt = F(x+y) - F(y).$$

F n'est pas nulle (sinon, $F' = f$ est nulle ce qui n'est pas) donc il existe x_0 tel que $F(x_0) \neq 0$. On a donc obtenu

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = \frac{F(x_0+y) - F(y)}{F(x_0)}$$

donc f est de classe $\mathcal{C}^1$.

- Troisième méthode. Soit f une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant seulement $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$. On veut passer au $\ln$ cette égalité. Assurons-nous que f ne s'annule jamais. Soit x_0 tel que $f(x_0) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x - x_0 + x_0) = f(x) = f(x - x_0)f(x_0) = 0$ donc f est nulle. Si f est non nulle, f ne s'annule jamais. On peut donc passer au logarithme. Si f est solution, alors en notant $g = \ln \circ f$, $\forall x, y \in \mathbb{R}, g(x+y) = g(x) + g(y)$. Si g est continue, en vertu de l'exercice précédent, c'est fini. Par exemple, si f est continue, alors $\forall x \in \mathbb{R}, \ln \circ f(x) = \ln(f(1))x$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(\ln(f(1))x)$.

Correction de l'exercice 7.3 :

Soit

$$y(t) = \frac{K + \int_{t_0}^t f(x)g(x)dx}{\exp\left(\int_{t_0}^t g(x)dx\right)}.$$

Alors

$$y'(t) = g(t) \frac{f(t) - K - \int_{t_0}^t f(x)g(x)dx}{\exp\left(\int_{t_0}^t g(x)dx\right)} \leq 0.$$

Donc $\forall t \geq t_0, f(t) \leq f(t_0) = K$ donc

$$\forall t \geq t_0, f(t) \leq K + \int_{t_0}^t f(x)g(x)dx \leq K \exp\left(\int_{t_0}^t g(x)dx\right).$$

Indication pour l'exercice 7.4 :

1. Soit g , la fonction définie par $g = f' + f$. Alors f satisfait l'équation différentielle $y' + y = g$ de solution homogène $x \mapsto \lambda e^{-x}$ et solution particulière $x \mapsto e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt$. De fait, f est de la forme $\lambda e^{-x} + e^{-x} \int_0^x (f + f')(t)e^t dt$. Le premier morceau est bornée car on est dans $\mathbb{R}^+$. En notant M tel que $f + f'$ soit bornée par M , par croissance de l'intégrale, le deuxième morceau est borné par $M(1 - e^{-t})$ qui est bornée. CQFD.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \geq \eta, |g(t)| \leq \varepsilon$. Soit $M := \int_0^A |g(t)e^t| dt$. Soit $K \geq M$ tel que $\forall x \geq B, e^{-x}M \leq \varepsilon$. Alors

$$\forall x \geq K, \left| e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt \right| \leq e^{-x} \int_0^M |g(t)e^t| dt + e^{-t} \int_A^x |g(t)e^t| dt \leq e^{-x}M + e^{-x} \int_A^x \varepsilon e^t dt \leq 2\varepsilon$$

La conclusion devient alors très facile à faire.

Indication pour l'exercice 7.5 :

1. Supposons que l'on a le théorème suivant.

Théorème : Soit $a_0, a_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors

$$(P_0) : \begin{cases} y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution qui est 0.

Soit y_1, y_2 deux solutions de (P) . Alors $y_1 - y_2$ est solution de P_0 tout comme la fonction nulle donc $y_1 = y_2$.

2. Soit y une solution de (P_0) . Alors $\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0$. Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$\forall t \in \mathbb{R}, |y''(t)| + |y'(t)| \leq |a_1(t)||y'(t)| + |a_0(t)||y(t)| + |y'(t)|.$$

En particulier, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, |y''(t)| + |y'(t)| \leq (1 + a_1(t))|y'(t)| + (1 + a_0(t))|y(t)|.$$

3. Soit $t \geq 0$. Alors u est positive par positivité de l'intégrale et dérivable en tant que primitive d'une fonction continue.
4. On utilise le fait que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} ; \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Ainsi, on a l'égalité de fonctions

$$m = \frac{f + g + |f - g|}{2}.$$

5. Posons $m = \max(1 + a_0, 1 + a_1)$. On a

$$\forall t \geq 0, u'(t) = |y''(t)| + |y'(t)| \leq m(t)(|y'(t)| + |y(t)|).$$

Il s'agit donc de montrer que $|y'| + |y| \leq u$. On a

$$\forall t \geq 0, |y'(t)| = \left| \int_0^t y''(s) ds \right| \leq \int_0^t |y''(s)| ds$$

et

$$\forall t \geq 0, |y(t)| = \left| \int_0^t y'(s) ds \right| \leq \int_0^t |y'(s)| ds.$$

En sommant, on a donc

$$\forall t \geq 0, |y'(t)| + |y(t)| \leq \int_0^t |y''(s)| ds + \int_0^t |y'(s)| ds = u(t).$$

6. On intègre :

$$\forall t \geq 0, 0 \leq u(t) - \underbrace{u(0)}_{=0} \leq \int_0^t u(s)m(s)ds.$$

Par le lemme de Grönwall,

$$\forall t \geq 0, u(t) \leq 0 \times \exp\left(\int_0^t m(s)ds\right) = 0.$$

Ainsi, u est négative donc u est nulle puisqu'elle est positive.

7. On a déjà montré que

$$\forall t \geq 0, |y(t)| \leq \int_0^t |y'(s)|ds.$$

Ainsi,

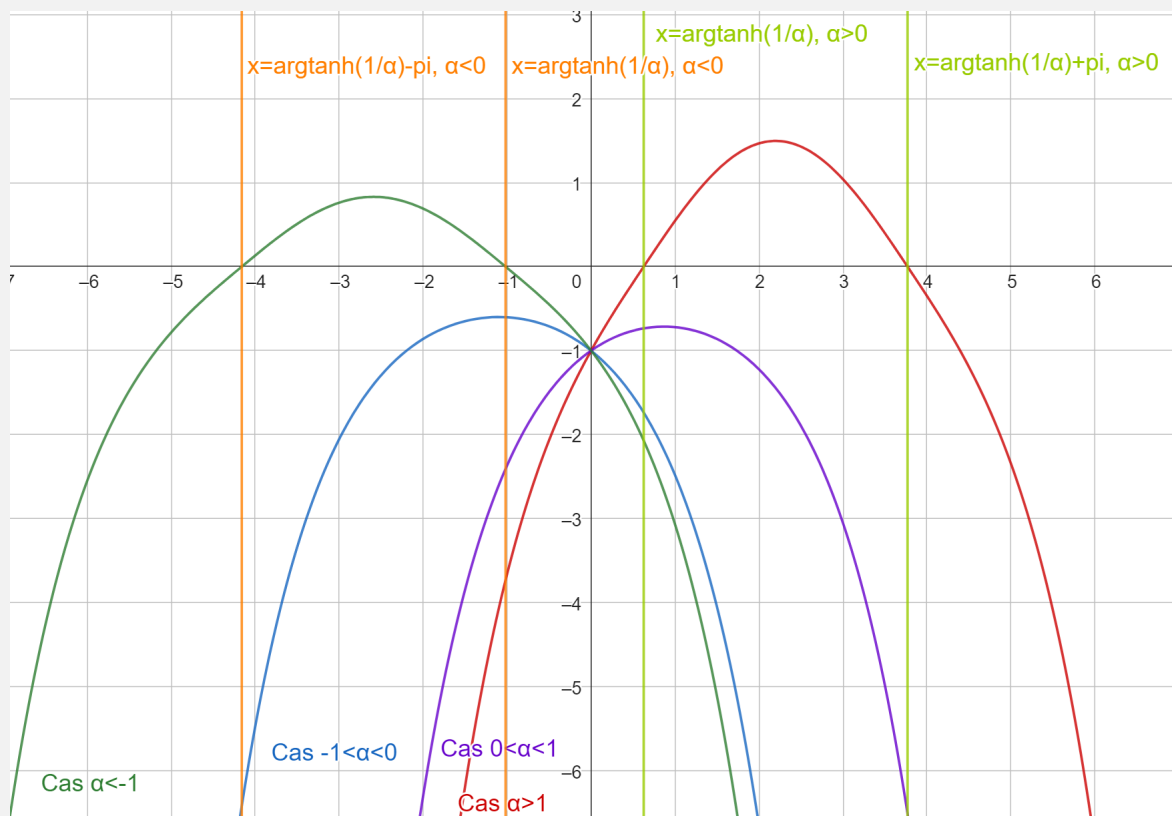
$$\forall t \geq 0, |y(t)| \leq \int_0^t \underbrace{|y''(s)|}_{\geq 0} + |y'(s)|ds = u(t) = 0.$$

Ainsi, y est nulle sur $\mathbb{R}^+$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 7.6 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et on rajoute la condition $y'(0) = \alpha$.

L'idée est la suivante et est illustrée sur le graphe suivant :



Prenons la courbe dans le cas $0 \leq \alpha \leq 1$. Alors au temps $t = 0$, la valeur de α fait « monter » la solution vers le haut en temps positif. Tant que y ne change pas de signe, le comportement de la solution est régi par l'équation différentielle $y'' - y = 0$.

- Si α n'est pas suffisamment grand, la courbe y n'intersecte pas l'axe des abscisses, entraînant le même comportement en temps positif.
- Si maintenant α est suffisamment grand, la courbe y intersecte l'axe des abscisses (si possible avec une dérivée non nulle). Ainsi, y change de comportement : à partir de ce temps de basculement, le comportement de la solution est régie par l'équation différentielle $y'' + y = 0$. Tant que y ne change pas de signe, ce sera le cas.

Il s'agit donc de répéter ces étapes jusqu'à obtenir un signe constant de la solution (ce qui va arriver assez vite).

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, étant donné que $(x, y) \mapsto |y|$ est continue et lipschitzienne par rapport à la variable y , j'en déduis l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy. Soit y , une telle solution. Au voisinage de 0, y est négative. Soit I , le plus grand intervalle contenant 0 et tel que $y < 0$. Je résous l'équation différentielle sur cet intervalle :

$$y(t) = -\cosh(t) + \alpha \sinh(t).$$

Si $I \neq \mathbb{R}$, on doit avoir $y(t) = 0$ sur une borne de I . J'ai donc plusieurs cas :

- Si $|\alpha| \leq 1$,

$$-\cosh(t) + \alpha \sinh(t) \leq -\cosh(t) + |\sinh(t)| < 0.$$

Ainsi, $I = \mathbb{R}$, et $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = -\cosh(t) + \alpha \sinh(t)$.

- Si $|\alpha| > 1$, $-\cosh(t) + \alpha \sinh(t)$ s'annule en $t_\alpha = \operatorname{Argth}(1/\alpha)$. J'ai donc deux cas :
 - Si $\alpha > 1, t_\alpha > 0$ et $I =]-\infty, t_\alpha[$. A droite de t_α , y est positive donc, sachant que $y(t_\alpha) = 0$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $y(t) = a \sin(t - t_0)$.

J'ai donc :

$$a = y'(t_\alpha) = \cosh(t_\alpha) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(t_\alpha)}} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) = \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

A droite de t_α , on a $y(t) = \sqrt{\alpha^2 - 1} \sin(t - t_\alpha)$, vraie tant que y est positive, ie sur $[t_\alpha, t_\alpha + \pi]$. En la borne de droite, cette expression s'annule et change de signe, donc il existe $b \in \mathbb{R}$, tel que à droite de $t_\alpha + \pi, y(t) = b \sinh(t - t_\alpha - \pi)$. De plus,

$$b = y'(t_\alpha + \pi) = \sqrt{a^2 - 1} \cos(\pi) = -\sqrt{a^2 - 1}.$$

La fonction $t \mapsto b \sinh(t - t_\alpha - \pi)$ ne s'annule pas sur $[t_\alpha + \pi, +\infty[$ donc finalement, j'ai :

$$y_\alpha(t) = \begin{cases} -\cosh(t) + \alpha \sinh(t) & \text{si } t \leq t_\alpha \\ \sqrt{a^2 - 1} \sin(t - \operatorname{Argth} \frac{1}{\alpha}) & \text{si } t \in [t_\alpha, t_\alpha + \pi] \\ -\sqrt{a^2 - 1} \sinh(t - \operatorname{Argth} \frac{1}{\alpha} - \pi) & \text{si } t \geq t_\alpha + \pi \end{cases}$$

- Pour le cas $\alpha < -1$, on remarque que si y est solution, il en est de même pour $z : t \mapsto y(-t)$. De plus, $z(0) = y(0), z'(0) = -y'(0)$. On en déduit donc qu'en prenant la fonction précédente, en remplaçant t par $-t$ et α par $-\alpha$ et en remarquant que $t_{-\alpha} = -t_\alpha$, ma solution est donc :

$$y_\alpha(t) = \begin{cases} -\cosh(t) + \alpha \sinh(t) & \text{si } t \geq t_\alpha \\ \sqrt{a^2 - 1} \sin(-t + \operatorname{Argth} \frac{1}{\alpha}) & \text{si } t \in [t_\alpha - \pi, t_\alpha] \\ -\sqrt{a^2 - 1} \sinh(-t + \operatorname{Argth} \frac{1}{\alpha} - \pi) & \text{si } t \leq t_\alpha - \pi \end{cases}$$

Indication pour l'exercice 7.7 :

Via le cours, les solutions sont

$$y : x \mapsto (\lambda + \int_0^x b(t) e^{-A(t)} dt) e^{A(x)},$$

avec $A(x) := \int_0^x a(t)dt$. Notons $\mu := \int_0^1 a(t)dt$. Alors

$$A(x+1) = A(x) + \mu.$$

J'ai donc

$$y(x+1) = \left(\lambda + \int_0^1 b(t)e^{-A(t)}dt + \int_1^{x+1} b(t)e^{-A(t)}dt \right) e^{A(x+1)}.$$

On fait un changement de variable $u = t + 1$ dans la deuxième intégrale, et grâce à $A(x+1) = A(x) + \mu$ (utilisé deux fois), et la 1-périodicité de b , on a

$$y(x+1) = \left(\lambda + \int_0^1 b(t)e^{-A(t)}dt + \int_0^x b(t)e^{-A(x)-\mu}dt \right) e^{A(x)+\mu} = y(x) + (\lambda(e^\mu - 1) + \gamma e^\mu) e^{A(x)},$$

avec $\gamma := \int_0^1 b(t)e^{-A(t)}dt$. Puisqu'une exponentielle ne s'annule jamais, les solutions sont 1-périodique si, et seulement si $\lambda(e^\mu - 1) + \gamma e^\mu = 0$.

- $\mu \neq 0$. Alors $\lambda := \frac{\gamma e^\mu}{1 - e^\mu}$ donne l'unique solution.
- Sinon, si $\mu = 0$, toute solution est 1-périodique. Sinon, aucune ne le sont.

Indication pour l'exercice 7.8 :

1. On souhaite résoudre $y'' + 3y' + 2y = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (E). Notons alors (E_H) l'équation homogène associée. Le polynôme caractéristique est $X^2 + 3X + 2 = (X+1)(X+2)$ donc les solutions de (E_H) sont les

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

On souhaite obtenir une solution particulière de (E) . Pour cela, utilisons le principe de superposition. Notons (E_{+1}) l'équation $y'' + 3y' + 2y = e^x$ et (E_{-1}) l'équation $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$.

- Pour (E_{+1}) , le second membre est une exponentielle différente de e^{-x} et e^{-2x} (celles des solutions homogènes) donc on cherche une solution de la forme $f : x \mapsto \lambda e^x$. Alors

$$f'' + 3f' + 2f = \lambda e^x + 3\lambda e^x + 2\lambda e^x = 6\lambda e^x.$$

Ainsi, pour $\lambda = \frac{1}{6}$, f est solution particulière de (E_{+1}) .

- Pour (E_{-1}) , le second membre est une exponentielle qui apparait dans les solutions homogènes : c'est un phénomène de résonance. Cette exponentielle dans l'équation homogène est multipliée par une fonction polynômiale de degré 0 donc on cherche une solution de la forme $g : x \mapsto \mu x e^{-x}$ (on a monté d'un degré). Alors

$$g'' + 3g' + 2g = \mu(xe^{-x} - 2e^{-x} + 3e^{-x} - 3xe^{-x} + 2xe^{-x}) = \mu e^{-x}.$$

Ainsi, pour $\mu = 1$, g est solution particulière de (E_{-1}) .

Par principe de superposition,

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2} \left(\frac{e^x}{6} + x e^{-x} \right)$$

est solution particulière de (E) . Les solutions de (E) sont donc

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} + \frac{1}{12} e^x + \frac{1}{2} x e^{-x} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. On souhaite résoudre $(E) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$. Notons alors (E_H) l'équation homogène associée. Le polynôme caractéristique est $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$ donc les solutions de (E_H) sont les

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

On souhaite obtenir une solution particulière de (E) . Le second membre est une exponentielle qui apparaît dans les solutions homogènes. On cherche donc une solution de la forme $f : x \mapsto \lambda x^2 e^{-x}$. Alors

$$f'' + 2f' + f = \lambda(x^2 e^{-x} - 4x e^{-x} + 2e^{-x} - 2x^2 e^{-x} + 4x e^{-x} + x^2 e^{-x}) = 2\lambda e^{-x}.$$

Ainsi, pour $\lambda = 1$, f est solution particulière de E . Les solutions de (E) sont donc

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x} + x^2 e^{-x} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. On souhaite résoudre $(E) : y'' - 4y' + 13y = \cos(3x)$. Notons alors (E_H) l'équation homogène associée. Le polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 13 = (X - 2)^2 + 9 = (X - (2 + 3i))(X - (2 - 3i))$. Les solutions de l'équation homogène – complexe ! – sont les

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{(2+3i)x} + \mu e^{(2-3i)x} : \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}.$$

On souhaite les solutions réelles. Le cours assure alors que les solutions réelles sont les

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2x}(\alpha \cos(3x) + \beta \sin(3x)) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x)$. On a

$$f'' - 4f' + 13f = -3^2(\lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x)) - 4 \times 3(-\lambda \sin(3x) + \mu \cos(3x)) + 13(\lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x)).$$

Alors

$$f'' - 4f' + 13f = (-9\lambda - 12\mu + 13\lambda) \cos(3x) + (-9\mu + 12\lambda + 13\mu) \sin(3x).$$

Ainsi, f est solution de (E) dès que $\begin{cases} 4\lambda - 12\mu = 10 \\ 12\lambda + 4\mu = 0 \end{cases}$. En résolvant le système, on trouve $\mu = \frac{-3}{4}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$. Les solutions de (E) sont donc

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2x}(\alpha \cos(3x) + \beta \sin(3x)) + \frac{1}{4} \cos(3x) - \frac{3}{4} \sin(3x) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

4. On souhaite résoudre $(E) : y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + \sin(3x)$. Notons (E_H) l'équation homogène associée. Le polynôme caractéristique est $X^2 + 3X + 2 = (X + 1)(X + 2)$. Les solutions de l'équation homogène sont les

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu e^{-x} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

On souhaite obtenir une solution particulière de (E) . Pour cela, utilisons le principe de superposition. Notons

$$(E_1) : y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$$

et

$$(E_2) : y'' + 3y' + 2y = \sin(3x).$$

- Pour (E_1) , le second membre est une exponentielle qui est solution de l'équation homogène : c'est le phénomène de résonance. Cette exponentielle apparaît avec une multiplicité 1 : cherchons donc une solution particulière de la forme $y_{part} : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda x e^{-2x}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, y_{part}''(x) + 3y_{part}'(x) + 2y_{part}(x) = 4\lambda x e^{-2x} - 4\lambda e^{-2x} + 3\lambda e^{-2x} - 6\lambda x e^{-2x} + 2\lambda x e^{-2x} = -\lambda e^{-2x}.$$

Ainsi, y_{part} est solution de (E_1) si, et seulement si, $\lambda = -1$.

- Pour (E_2) , le second membre n'est pas une solution particulière de l'équation homogène. Cherchons donc une solution particulière de la forme $y_{part} : x \in \mathbb{R} \mapsto \nu \cos(3x) + \mu \sin(3x)$. Alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y_{part}''(x) + 3y_{part}'(x) + 2y_{part}(x) &= -9\mu \sin(3x) - 9\nu \cos(3x) + 3(3\mu \cos(3x) - 3\nu \sin(3x)) \\ &\quad + 2(\mu \sin(3x) + \nu \cos(3x)) \\ &= (-7\mu - 9\nu) \sin(3x) + (9\mu - 7\nu) \cos(3x). \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, y_{part} est solution de (E_2) si, et seulement si,

$$\begin{cases} -7\mu - 9\nu = 1 \\ 9\mu - 7\nu = 0 \end{cases}$$

En résolvant le système, on trouve $\nu = \frac{-9}{130}, \mu = \frac{-7}{130}$. Ainsi, $y_{part} : x \in \mathbb{R} \mapsto \mu \sin(3x) + \nu \cos(3x)$ est solution particulière.

Par principe de superposition,

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto -xe^{-2x} - \frac{7}{130} \sin(3x) - \frac{9}{130} \cos(3x) \right\}$$

est solution particulière de (E) . Les solutions de (E) sont donc

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu e^{-x} - xe^{-2x} - \frac{7}{130} \sin(3x) - \frac{9}{130} \cos(3x) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. On souhaite résoudre $(E) : y'' + y' - 12y = \cos(4x) + \sin(3x)$. Notons (E_H) l'équation homogène associée. Le polynôme caractéristique est $X^2 + X - 12 = (X - 3)(X + 4)$. Les solutions de l'équation homogène sont les

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{3x} + \mu e^{-4x} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

On souhaite obtenir une solution particulière de (E) . Pour cela, utilisons le principe de superposition. Notons

$$(E_1) : y'' + y' - 12y = \cos(4x)$$

et

$$(E_2) : y'' + y' - 12y = \sin(3x).$$

- Pour (E_1) , le second membre n'est pas une solution particulière de l'équation homogène. Cherchons donc une solution particulière de la forme $y_{part} : x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha \cos(4x) + \beta \sin(4x)$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_{part}''(x) + y_{part}'(x) - 12y_{part}(x) &= -16\alpha \cos(4x) - 16\beta \sin(4x) - 4\alpha \sin(4x) \\ &\quad + 4\beta \cos(4x) - 12\alpha \cos(4x) - 12\beta \sin(4x) \\ &= (-28\alpha + 4\beta) \cos(4x) + (-4\alpha - 28\beta) \sin(4x). \end{aligned}$$

Ainsi y_{part} est solution de (E_1) si, et seulement si,

$$\begin{cases} -28\alpha + 4\beta = 1 \\ -4\alpha - 28\beta = 0 \end{cases}$$

En résolvant le système, on trouve $\alpha = \frac{-7}{200}$ et $\beta = \frac{1}{200}$ et donc, pour ces valeurs de α et β , y_{part} est solution particulière de (E_1) .

- Pour (E_2) , le second membre n'est pas une solution particulière de l'équation homogène. Cherchons donc une solution particulière de la forme $y_{part} : x \in \mathbb{R} \mapsto \gamma \cos(3x) + \delta \sin(3x)$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_{part}''(x) + y_{part}'(x) - 12y_{part}(x) &= -9\gamma \cos(3x) - 9\delta \sin(3x) - 3\gamma \sin(3x) \\ &\quad + 3\delta \cos(3x) - 12\gamma \cos(3x) - 12\delta \sin(3x) \\ &= (-21\gamma + 3\delta) \cos(3x) + (-3\gamma - 21\delta) \sin(3x). \end{aligned}$$

Ainsi, y_{part} est solution de (E_2) si, et seulement si,

$$\begin{cases} -21\gamma + 3\delta = 0 \\ -3\gamma - 21\delta = 1 \end{cases}$$

En résolvant le système, on trouve $\gamma = \frac{-1}{150}$ et $\delta = \frac{-7}{150}$ et donc, pour ces valeurs de γ et δ , y_{part} est solution particulière de (E_2) .

Par principe de superposition,

$$y_p : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{-7}{200} \cos(4x) + \frac{1}{200} \cos(4x) - \frac{1}{150} \cos(3x) - \frac{7}{150} \sin(3x)$$

est solution particulière de (E) . Les solutions de (E) sont donc

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{3x} + \mu e^{-4x} + y_p(x) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

6. Posons (E) l'équation $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' = 2$. Soit y solution. Posons $z = y'$. Alors z vérifie l'équation différentielle $(E') : (1+x)^2 y' + (1+x)y = 2$. Résolvons (E') .

On note (E'_+) l'équation sur $] -1, +\infty[$ et (E'_-) l'équation sur $] -\infty, -1[$.

- Notons $(E'_{H,+})$ l'équation homogène associée à (E'_+) . Alors l'ensemble de ces solutions est

$$\left\{ x \in] -1, +\infty[\mapsto \frac{\lambda}{1+x} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On souhaite obtenir une solution particulière de (E'_+) . Soit $C :] -1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Notons $y_{part} : x \in] -1, +\infty[\mapsto \frac{C(x)}{1+x}$. y_{part} est dérivable de dérivée

$$\forall x > -1, y_{part}'(x) = \frac{\lambda'(x)(1+x) - \lambda(x)}{(1+x)^2}.$$

Ainsi, y_{part} est solution si, et seulement si, $\forall x > -1, \lambda'(x) = \frac{2}{1+x}$.

Une primitive sur $] -1, +\infty[$ de λ' est alors $2 \ln(1+x)$. $y_{part} : x \in] -1, +\infty[\mapsto \frac{2 \ln(1+x)}{1+x}$ est alors une solution particulière.

Les solutions de (E'_+) sont donc

$$\left\{ x \in] -1, +\infty[\mapsto \frac{C}{1+x} + \frac{2 \ln(1+x)}{1+x} : C \in \mathbb{R} \right\}.$$

- On obtient exactement la même chose avec $] -\infty, -1[$ sauf que pour trouver une primitive de C , on considère $\ln(-1-x)$. Les solutions de (E'_-) sont donc

$$\left\{ x \in] -\infty, -1[\mapsto \frac{C}{1+x} + \frac{2 \ln(-1-x)}{1+x} : C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour toute valeur de C , l'ensemble des solutions ne donne pas de fonction de classe $\mathcal{C}^0$ au moins. Ainsi, il n'y a pas de solutions globales. Notons (E_+) : $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' = 2$ sur $] -1, +\infty[$ et (E_-) sur $] -\infty, -1[$. Alors l'ensemble des solutions est donc

$$\{x \in] -1, +\infty[: C \ln(1+x) + \ln^2(1+x) + D : C, D \in \mathbb{R}\}$$

sur $] -1, +\infty[$ et sur $] -\infty, -1[$, on a

$$\{x \in] -1, +\infty[: C \ln(-1-x) - \ln^2(-1-x) + D : C, D \in \mathbb{R}\}$$

Indication pour l'exercice 7.9 :

1. Un peu trop dur en fait. N'hésitez pas à me contacter.
2. Remarquons que f est deux fois dérivable. Raisonnons par analyse-synthèse. Si f est deux fois dérivable et vérifie l'équation en question, on a $f''(x) + f(x) = 0$. Il existe a, φ tel que $f = a \cos(x + \varphi)$. Mais de fait, j'ai $\forall x \in \mathbb{R}, -\sin(x + \varphi) = \cos(\lambda - x + \varphi)$. On a donc $2x = \lambda - \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $2\varphi = -\lambda - \frac{-\pi}{2}[2\pi]$. En prenant x tel que $2x \not\equiv \lambda - \frac{\pi}{2}[2\pi]$, on a $\varphi \equiv -\frac{2\lambda + \pi}{4}[\pi]$.

De fait, j'ai un entier k tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$. Que k soit pair ou impair, j'ai

$$\exists C \in \mathbb{R}, f(x) = C \cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

La réciproque est claire.

3. Un peu astucieux. Soit f , une fonction. Alors on pose $g := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, la partie paire de f , et $h := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, la partie impaire de f . On remarque que $f = g + h$, et que cette décomposition est unique (exercice).
On peut alors remarquer que f est solution si, et seulement si $g'' + g + h'' - h = x$. Mais $g'' + g$ est paire, $h'' - h$ est impaire en tant que somme de fonctions de même parité. De fait, par unicité, on a $g'' + g = 0$ et $h'' - h = x$. On résout ces deux équations différentielles tout en se souvenant que l'on veut tantôt des solutions paires, tantôt des solutions impaires. Finalement, les solutions sont les $x \mapsto -x + \alpha \cos(x) + \delta \sinh(x)$ pour α, δ , des réels.
4. Cherchons déjà f à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit f , une fonction satisfaisant les hypothèses voulues. Alors $f(0) = f(0)^2$. Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle car $2f(x) = 2f(0)f(x) = 0$ pour tout x . Exclu. Donc $f(0) = 1$. J'ai donc $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) + f(-y) = 2f(y)$. La fonction est donc paire. Je fixe maintenant y et dérive 2 fois par rapport à x . J'ai

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y).$$

Je garde cette équation au chaud. Mais de même, x et y jouant des rôles quasi-symétrique, j'ai en fait $f''(x+y) + (-1)^2 f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$.

Ainsi j'ai avec ces deux équations $\forall x, y \in \mathbb{R}, f''(x)f(y) = f''(y)f(x)$. En particulier pour $y = 0, \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f''(0)f(x)$. Je note λ tel que $\lambda^2 = f''(0)$. Comme f est paire, f' est impaire, donc $f'(0) = 0$. De fait, f est solution du problème de Cauchy $y'' - \lambda^2 y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$. f existe et est unique.

Elle vaut $\frac{1}{2}(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$.

Pour trouver les solutions réelles, il faut s'inspirer du cours (voir le comportement pseudo-périodique)

Indication pour l'exercice 7.10 :

Rappelons que $\cos(2x - 2t) = \cos(2x)\cos(2t) + \sin(2x)\sin(2t)$. De fait, l'équation s'écrit

$$f'(x) + 5\cos(2x) \int_0^x \cos(2t)f(t)dt + 5\sin(2x) \int_0^x \sin(2t)f(t)dt = 10.$$

f' est alors dérivable et en dérivant, on a

$$f''(x) + 5f(x) - 10\sin(2x) \int_0^x \cos(2t)f(t)dt + 10\cos(2x) \int_0^x \sin(2t)f(t)dt = 0.$$

Alors f'' est aussi dérivable et on a :

$$f'''(x) + 5f'(x) - 20\cos(2x) \int_0^x \cos(2t)f(t)dt - 20\sin(2x) \int_0^x \sin(2t)f(t)dt = 0.$$

c'est-à-dire

$$f'''(x) + 5f'(x) - 4 \times 5 \left(\int_0^x \cos(2x)\cos(2t)f(t) + \sin(2x)\sin(2t)f(t)dt \right) = f'''(x) + 5f'(x) - 4(-f'(x) + 10) = 0.$$

On s'est donc ramené à résoudre $f'''(x) + 9f'(x) = 40$, qu'on sait faire en posant $z = f'$. On peut conclure en remarquant que $f(0) = -\frac{f''(0)}{5}$, et $f'(0) = 10$.

Autour de Grönwall

Pour Grönwall différentielle, posons $y : t \mapsto \exp\left(\int_{t_0}^t g(x)dx\right)$. Remarquons que $y' = gy$, $y(t_0) = 1$ et $y > 0$. Alors

$$\left(\frac{f}{y}\right)' = \frac{f'y - y'f}{y^2} = \frac{f'y - ygf}{y^2} \leq 0.$$

Donc $\frac{f}{y}$ est décroissante, en particulier, $f(t) \leq f(t_0)y(t)$.

Pour Grönwall générale, soit $y : t \mapsto \int_{t_0}^t f(x)h(x)dx$. Alors comme $h \geq 0$, j'ai

$$\forall t \geq t_0, f(t)h(t) \leq g(t)h(t) + h(t)y(t)$$

i.e.

$$\forall t \geq t_0, y'(t) - h(t)y(t) \leq g(t)h(t).$$

Je pose alors $z : t \mapsto y(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t h(u)du\right)$. L'inégalité précédente se traduit alors en

$$z'(t) \leq g(t)h(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t h(u)du\right)$$

Comme $y(t_0) = z(t_0) = 0$, en intégrant, j'ai donc

$$z(t) \leq \int_{t_0}^t g(x)h(x) \exp\left(-\int_{t_0}^x h(u)du\right) dx.$$

Mais par hypothèse,

$$\forall t \geq t_0, f(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t f(x)h(x)dx = g(t) + y(t) = g(t) + z(t) \exp\left(\int_{t_0}^t h(u)du\right).$$

Donc

$$\forall t \geq t_0, f(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t g(x)h(x) \exp\left(-\int_{t_0}^x h(u)du\right) dx \exp\left(\int_{t_0}^t h(u)du\right) = g(t) + \int_{t_0}^t g(x)h(x) \exp\left(\int_x^t h(u)du\right) dx.$$

Chapitre 8

Suites numériques

8.1 Exercices

Exercice 8.1 (Cesàro, applications).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle, et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

1. (a) On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, disons vers $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et tend vers l . *Indication : on traitera d'abord le cas $l = 0$. Pour cela, on pourra considérer, pour un $n_0 \in \mathbb{N}^*$*

bien choisi, la quantité $\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^n u_k$.

- (b) Que dire du cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$?

2. Montrer que la convergence de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'entraîne pas la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer alors qu'une hypothèse de monotonie sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ assure la convergence voulue.
4. Une application.

- (a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite telle que $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, disons vers $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

- (b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$, telle que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, disons vers $l \in \mathbb{R}$. Montrer que si $l > 1$, alors $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

- (c) En déduire la limite de $\left(\binom{2n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 8.2 ("Cours"-circuit).

Soit $x \in \mathbb{R}$. Etudier la suite $\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Commenter.

Les suites de Cauchy sont hors-programme, même en classe de mathématiques spéciales. Il en reste pas moins une notion assez classique (plutôt développé en mathématiques spéciales). On introduit dans l'exercice qui suit la définition dans le cas réel, quelques notions de bases.

Exercice 8.3 (Suites de Cauchy).

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite "de Cauchy" si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer qu'une suite réelle convergente est de Cauchy.
2. Montrer qu'une suite réelle de Cauchy est bornée.

3. Soit φ , une extractrice telle que $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge, disons vers l . Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.
4. En déduire qu'une suite réelle de Cauchy est convergente.

Exercice 8.4 (Irrationalité de e).

On admet ici que $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := u_n + \frac{1}{nn!}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que e est irrationnel. On pourra considérer les strictes monotonies au lieu des monotonie dans la question précédente.

Exercice 8.5 (Perturbation).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^n + 5x^2 - 2 \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser sans démonstration le théorème de valeurs intermédiaires de Terminale.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = 0$. *Vu que x dépend de n , on le note x_n .*
2. Calculer x_1 et x_2 . Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \leq \sqrt{2/5}$.
3. Soit $x \in]0, 1[$. Etudier les variations de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ puis de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. En déduire la convergence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Quelle est sa limite ?

Exercice 8.6 (Faisable en Terminale).

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 8.7 (Somme presque géométrique).

Soit $q > 1$. Etudier la convergence de $\left(\frac{1}{q^n} \sum_{k=1}^n \lfloor q^k \rfloor \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 8.8 (Localisation).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$, avec $l \in]1, +\infty[$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît à partir d'un certain rang. Et si $l = 1$?

Exercice 8.9 (Un résultat de densité).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deux suites divergeant vers $+\infty$. On suppose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par exemple, $u_n = \sqrt{n}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.
2. Montrer que $\forall x \geq u_{n_0}, \exists p \in \mathbb{N}, |u_p - x| \leq \varepsilon$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, |(u_p - v_q) - x| \leq \varepsilon$.
4. Montrer que $\{u_p - v_q : (p, q) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8.10 (Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^d$).

On souhaite généraliser le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^d$. Pour cela, quelques notations. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$, une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^d$. On pourra la noter

$$U_n =: \begin{pmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \\ u_{n,3} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n,d-1} \\ u_{n,d} \end{pmatrix}$$

On dit alors que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée lorsque $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \exists M_i \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_{n,i}| \leq M_i$. On dit aussi que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, (u_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On souhaite alors montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

1. Montrer que pour $d = 1$ et $d = 2$, le résultat est clair.
2. On souhaite montrer le cas général.
 - (a) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, la suite $(u_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une extractrice ψ_i telle que $(u_{\psi_i(n),i})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 - (b) Expliquer pourquoi cela ne suffit pas pour répondre à la question.
 - (c) On souhaite alors construire une extractrice qui convient. En s'inspirant de la démonstration de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, construire une famille d'extractrice $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$ telle que $\forall 1 \leq j \leq i, u_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_j(n),j}$ converge.
 - (d) Conclure.

Exercice 8.11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle vérifiant $\forall p, q \in \mathbb{N}, u_{p+q} \leq u_p + u_q$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $\inf \left\{ \frac{u_n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ avec la convention $\inf(A) = -\infty$ si A n'est pas une partie minorée de $\mathbb{R}$.

Exercice 8.12 (Un lemme utile).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite bornée qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 8.13.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite bornée telle que $(e^{iu_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(e^{i\sqrt{2}u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 8.14 (Valeur d'adhérence).

1. Soit $u : n \in \mathbb{N} \mapsto u_n \in X$ avec X une partie discrète finie de $\mathbb{R}$, une suite. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.
2. En déduire les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n := \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + (-1)^n$.
3. Déterminer les valeurs d'adhérence de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n := \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$.
4. On considère $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite convergent vers 0. Déterminer les valeurs d'adhérence de $(v_n + w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 8.15 (Valeur d'adhérence 2).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite de terme général $u_n := \cos\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$. On admet ici que $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$.

Soit $\theta \in [0, 2\pi[, \varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}$.

1. Etudier la limite de $(H_{n+1} - H_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer qu'il existe $N_0 > N$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$|H_{N_0} - \theta - 2m\pi| \leq \varepsilon.$$

3. Soit $x \in [-1, 1], \varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $N_1 > N$ tel que $|u_{N_1} - x| \leq \varepsilon$. On pourra admettre provisoirement que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$.
4. Déterminer les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 8.16 (Cesàro généralisée).

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k = +\infty$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, disons vers $l \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k u_k}{\sum_{k=1}^n a_k} = l.$$

Exercice 8.17 (lim sup et lim inf).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit la limite supérieure de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n} u_k \right).$$

1. Montrer que l'on pouvait aussi définir la limite supérieure de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ via

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{k \geq n} u_k \right).$$

2. Montrer que la limite supérieure d'une suite réelle est toujours définie dans $\overline{\mathbb{R}}$.
 3. Est-ce que la limite supérieure est finie si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée? Etudier la réciproque.
 4. Dans cette question, on suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
 (a) On pose $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par $v_n := \sup_{k \geq n} u_k$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, décroissante, minorée. Quelle est sa limite?
 (b) Montrer alors que cette limite est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 5. On peut faire toutes les questions précédentes avec la limite inférieure définie par

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geq n} u_k \right).$$

Enoncer alors les résultats pour la lim inf.

6. Montrer que $\liminf_{n \in \mathbb{N}} u_n \leq \limsup_{n \in \mathbb{N}} u_n$.
 7. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, disons vers l , alors $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = l = \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 8. Montrer que si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 9. En déduire une démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 8.18.

A toute suite croissante $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telle que $a_0 = 1$, on associe la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$b_n := \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) \frac{1}{a_k}.$$

Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, 1]$, puis montrer que pour tout $c \in [0, 1]$, il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les mêmes hypothèses, telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = c$.

Exercice 8.19.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle bornée telle que $\left(u_n + \frac{u_{2n}}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 8.20.

Soit $(a_n), (b_n)$, deux suites réelles telle que $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $e^{a_n} + e^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$. Montrer que les deux suites convergent.

Exercice 8.21. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$.

On rappelle que $AX = \lambda X$ signifie que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, [AX]_i = \lambda[X]_i$ avec

$$[AX]_i = \sum_{k=1}^n [A]_{ik} [X]_k.$$

En appelant λ_M (resp. λ_m) le plus grand (resp. petit) λ solution, étudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\lambda_M}{\lambda_m}.$$

On pourra écrire

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

et étudier la limite de cette quantité quand x tend vers 0.

8.2 Éléments de corrections

Indication pour l'exercice 8.1 :

1. Traitons déjà le cas $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, |u_n| \leq \varepsilon$. Alors pour $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$

$$\begin{aligned} |v_n| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n u_k \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} |u_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n \underbrace{|u_k|}_{\leq \varepsilon} \\ &\leq \frac{n_0 M}{n} + \underbrace{\frac{(n - n_0)\varepsilon}{n}}_{\leq \varepsilon} \end{aligned}$$

avec $M = \max_{1 \leq k \leq n_0} |u_k| < +\infty$. Soit n_1 tel que $n_1 \geq n_0$ et $\frac{n_0 M}{n} \leq \varepsilon$ (possible par définition de la limite). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq n_1}$, on a

$$|v_n| \leq 2\varepsilon.$$

On a bien la convergence de $(v_n)_n$ vers 0.

Cas général : soit $w_n = u_n - \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(w_n)_n$ tend vers 0 donc par le cas précédent,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right) - \ell.$$

Ainsi, $(v_n)_n$ converge et ce, vers ℓ .

Le résultat tient pour $\ell = +\infty$. En effet, soit $A > 0$ et $x_n = \min(u_n, A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(x_n)_n$ est stationnaire à A puisqu'à partir d'un certain rang, $u_n > A$. Ainsi, $(x_n)_n$ converge

vers A . En notant v la moyenne de Cesàro de u et y la moyenne de Cesàro de x , on a que $v \geq y$ (car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \min(u_n, A) = x_n$). De plus, y converge vers A : il existe donc un rang N tel que $\forall n \geq N, y_n \geq A/2$ (car $A > 0$). On en déduit donc que

$$\forall n \geq N, v_n \geq y_n \geq A/2$$

donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

2. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ convient car $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k$ converge vers 0 par produit d'une suite tendant vers 0 et d'une suite bornée mais pourtant, $(u_n)_n$ ne converge pas.
3. Si $(u_n)_n$ est monotone, elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}$, disons vers ℓ . Par le lemme de Cesàro, elle converge vers sa moyenne, disons ℓ' : qui est un réel par hypothèse. Par unicité de la limite, $\ell = \ell'$ et donc $(u_n)_n$ converge.
4. (a) Soit $x_n = u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors par le lemme de Cesàro,

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell.$$

Par télescopage, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n-1} x_k = u_n - u_0.$$

Ainsi, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n-1} = \ell$ et donc

$$\frac{u_n}{n} = \frac{u_n}{n-1} \frac{n-1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \times 1 = \ell.$$

- (b) Puisque $(u_n)_n$ est strictement positive, on peut poser $w_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$w_{n+1} - w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(\ell)$$

par continuité de $\ln$ donc par le lemme de l'escalier, $\frac{w_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(\ell)$. En composant par exponentielle, on a le résultat souhaité.

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{\cancel{2n}!(2n+1)(2n+2)}{\cancel{n}!^2(n+1)^2} \frac{\cancel{n}!^2}{\cancel{(2n)}!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 4.$$

Ainsi, la limite cherchée, par la question précédente, vaut 4.

Indication pour l'exercice 8.2 :

Pour tout n , pour tout x , on a $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$. En divisant par n , on a la convergence vers x voulue. Cela montre la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Indication pour l'exercice 8.3 :

1. Soit $(u_n)_n$ convergente, disons vers l . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|u_n - l| \leq \varepsilon/2$. De fait,

$$\forall p, q \geq n_0, |u_p - u_q| = |u_p - l + l - u_q| \leq |u_p - l| + |u_q - l| \leq 2\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

CQFD.

2. Par hypothèse, je peux trouver un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, j'ai $|u_n - u_{n_0}| \leq 1$. De fait, $|u_n| \leq |u_{n_0}| + 1$. Donc $(u_n)_n$ est bornée à partir d'un certain rang, donc est bornée.
3. Bien sûr, on suppose que $(u_n)_n$ est de Cauchy ! Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un rang n_0 tel que $\forall p, q \geq n_0$, on a $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$. A p fixé, l'égalité passe à la limite quand q tend vers $+\infty$ en $|u_p - l| \leq \varepsilon$. Donc $(u_p)_p$ converge.
4. On applique Bolzano-Weierstrass.

Indication pour l'exercice 8.4 :

1. Rien de dur.
2. On utilise la stricte croissance et décroissance des suites pour établir

$$u_n < u_{n+1} \leq \lim u_n = \lim v_n \leq v_{n+1} < v_n,$$

puisque la limite est entre les deux suites pour tout n . De fait, pour tout n , $u_n < l < v_n$. Supposons que l soit rationnel. Il existe alors p, q dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ telle que $l = p/q$. Alors $u_q < l < v_q$ donc $q!u_q < (q-1)!p < q!v_q$. Mais $q!u_q$ est entier et $q!v_q = q!u_q + 1/q < q!u_q + 1$. De fait, $(q-1)!p$ est coincé entre deux entiers consécutifs strictement, ce qui est absurde car c'est un entier.

Indication pour l'exercice 8.5 :

1. On utilise le TVI en étudiant le signe de la dérivée de f_n .
2. OK pour x_1 et x_2 . Pour l'inégalité, on calcule $f_n(\sqrt{2/5}) = (2/5)^{n/2} \geq 0 = f_n(x_n)$. Par croissance de f_n , le résultat tombe.
3. Puisque $x \in]0, 1[$, $(f_n(x))_n$ est clairement décroissante. On calcule $f_n(x_{n+1})$ (Toujours !). On a $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + 5x_{n+1}^2 - 2 \geq x_{n+1}^{n+1} + 5x_{n+1}^2 - 2 = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n)$. Par croissance de f_n , on a la croissance de $(x_n)_n$.
4. Croissante majorée donc convergente. Soit l la limite. Puisque $0 = x_n^n + 5x_n^2 - 2$, et que x_n vit dans $[0, \sqrt{2/5}]$, alors x_n^n tend vers 0. Donc par passage à la limite, on a $0 = 5l^2 - 2$. Donc $l = \sqrt{2/5}$.

Indication pour l'exercice 8.6 :

Soit $p = \lfloor x \rfloor$. Alors

$$\frac{x^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \frac{x}{k} = \prod_{k=1}^p \frac{x}{k} \prod_{k=p+1}^n \frac{x}{k}.$$

Mais pour $k \geq p+1 = \lfloor x \rfloor + 1 > x$, on a $\frac{x}{k} < 1$. Donc le produit de droite converge tandis que le produit de gauche est bornée.

Indication pour l'exercice 8.7 :

J'ai $q^k - 1 < \lfloor q^k \rfloor \leq q^k$. En sommant, puis en divisant par q^n on contrôle le terme du milieu. Par théorème d'encadrement, on aura la limite.

Indication pour l'exercice 8.8 :

Ecrire la définition.

Indication pour l'exercice 8.9 :

1. Définition de la limite.
2. Soit $p := \min\{k \in \mathbb{N} : k > n_0 \wedge u_k > x\}$. L'ensemble considéré est une partie non vide de $\mathbb{N}$ car la suite diverge. On a alors $u_p > x$ et comme $p - 1 \geq n_0$, on a $|u_p - u_{p-1}| \leq \varepsilon$.
Si $p = n_0 + 1$, alors $p - 1 = n_0$ donc $u_{p-1} \leq x$.
Si $p > n_0 + 1$, alors $p - 1 > n_0$. Or par minimalité de p , on a nécessairement $u_{p-1} \leq x$.
3. Soit x , un réel. La divergence de $(v_n)_n$ diverge vers $+\infty$, j'ai un q tel que $x + v_q \leq u_{n_0}$. On utilise question 2 pour conclure.
4. C'est exactement la question précédente.

Indication pour l'exercice 8.10 :

1. Pour $d = 1$, c'est le théorème de Bolzano-Weierstrass tel que l'on connaît. Pour $d = 2$, on fait la même preuve que dans le cas complexe en considérant que la donnée d'une suite complexe est équivalente en la donnée de deux suites réelles.
2. Soit $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Alors $(u_{n,i})_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$ donc admet une sous-suite convergente.
3. Cela ne marche pas car rien ne dit qu'extraire pour avoir la convergence de la i -ème suite entraîne la convergence via cette même extractrice, ou une extractrice de celle-ci d'une j -ème suite. Par exemple, pour $d = 2$, je prends φ qui extrait les pairs, et ψ qui extrait les impairs.
4. On fait ça par récurrence. Soit φ_1 , une extractrice telle que $(u_{\varphi_1(n),1})_n$ converge. Voyons comment se propage la récurrence. Soit φ_2 , une extractrice de la suite $(u_{\varphi_1(n),2})_n$ de sorte que $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n),2})_n$ converge, possible par Bolzano-Weierstrass réel.
Supposons maintenant que pour un k fixé, j'ai construit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ telle que $\forall 1 \leq j \leq k, (u_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_j(n),j})_n$ converge. Je construis alors φ_{k+1} de sorte que $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_{k+1}(n),k+1})_n$ converge.
J'ai ainsi $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ ainsi construit.
5. $\varphi := \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_d$ convient.

Remarque : que se serait-il passé si j'ai demandé d'extraire un nombre dénombrable de fois ? La question 3 tient la route, mais pas la 4. Pour compenser, on pose $\varphi : n \mapsto \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n(n)$. Et cela fonctionne encore. On appelle cela le procédé diagonal, ou l'extraction diagonal de Cantor.

Correction de l'exercice 8.12 :

Il s'agit du lemme de Fekete. On montre d'abord par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_{kn} \leq ku_n$. Traitons deux cas. Supposons que l'inf existe. (c'est un réel en fait, que l'on note l). Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de l'infimum, je peux trouver un entier N tel que

$$l \leq \frac{u_N}{N} \leq l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n \geq N$. Alors il existe un unique k, r tel que $n = kN + r$, avec $0 \leq r \leq N - 1$. Par sous-additivité, j'ai

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{ku_N + u_r}{kN + r} \leq \frac{k}{kN + r}u_N + \frac{u_r}{n} \leq \frac{u_N}{N} + \frac{u_r}{n}.$$

En notant $M := \max\{u_i : 0 \leq i \leq N - 1\}$, on a

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_m}{m} + \frac{C}{n}.$$

Soit N_1 , un rang à partir duquel $C/n \leq \varepsilon/2$. Alors

$$\forall n \geq \max(N, N_1), \frac{u_n}{n} \leq l + \varepsilon.$$

En écrivant la définition de la limite, le résultat en découle.

Traisons le cas $-\infty$. Soit $A < 0$. Il existe alors un entier N tel que $\frac{u_N}{N} < A - 1$ puisque la suite n'est pas minorée. Alors de même, je peux trouver

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_N}{N} + \frac{u_r}{n} \leq A - 1 + \frac{M}{n}.$$

En prenant C/m avec m suffisamment grand pour que ce réel soit inférieur à 1, le résultat va aussi en découler.

Correction de l'exercice 8.12 :

Soit l , la valeur d'adhérence en question. Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers l . Alors

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - l| \geq \varepsilon.$$

Fixons donc un tel $\varepsilon > 0$. Alors $A := \{n \in \mathbb{N} : |u_n - l| \geq \varepsilon\}$ est non majorée, donc infinie. Soit donc φ , une extractrice à valeurs dans A . J'ai donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)} - l| \geq \varepsilon.$$

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass ??, il existe ψ , une extractrice, de sorte que $(u_{\varphi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ converge, disons vers l' .

Par hypothèse, $l' = l$. Alors on a, par passage à la limite dans l'inégalité $|u_{\varphi(\psi(n))} - l| \geq \varepsilon$, on obtient $|l' - l| \geq \varepsilon$, ce qui n'est pas.

Correction de l'exercice 8.13 :

En effet, soit $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{iu_n}$, $z' = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{i\sqrt{2}u_n}$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass ??, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, disons l . Notons alors φ , l'extractrice sous-jacente (i.e. $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$). Alors

$$e^{iu_{\varphi(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{il} = z, e^{i\sqrt{2}u_{\varphi(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{i\sqrt{2}l} = z'.$$

Si l et l' sont deux valeurs d'adhérence, on a donc, par unicité de la limite,

$$e^{il} = e^{il'}, e^{i\sqrt{2}l} = e^{i\sqrt{2}l'}.$$

On obtient respectivement

$$\frac{l' - l}{2\pi} \in \mathbb{Z}, \frac{\sqrt{2}l - \sqrt{2}l'}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

Si $l \neq l'$, alors $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui n'est pas. Donc $l = l'$. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet donc une unique valeur d'adhérence, donc converge vers l par l'exercice précédent.

Les exercices 8.14 et 8.15 sont à part. C'est plutôt rare de calculer explicitement des valeurs d'adhérence. N'hésitez pas à me contacter.

Indication pour l'exercice 8.16 :

Faire comme la preuve de Cesàro que vous connaissez. Considérer $l = 0$ dans un premier temps.

Indication pour l'exercice 8.17 :

1. On confond limite et inf notamment lorsque la suite en question est décroissante. Pensez au théorème de la limite monotone ! Il est clair que $\left(\sum_{k \geq n} u_k\right)_n$ est une suite décroissante. Le résultat tombe.
2. On est dans $\overline{\mathbb{R}}$! Le résultat est clair.
3. Oui par le théorème de la limite monotone. La réciproque est fausse. Réfléchissez aux limites supérieures/inférieures d'une suite monotone.
4. (a) C'est clair.
(b) C'est une question subtile. Il faut bien construire son extractrice. Distinguez les cas fini et infini.
5. OK.
6. Un passage à la limite (vous avez le droit dans $\overline{\mathbb{R}}$ maintenant !)
7. Clair.
8. Idem.
9. A vous de jouer.

Indication pour l'exercice 8.18 :

Par croissance de $(a_n)_n$, on peut affirmer que b_n est une somme partielle de terme générale positif. De plus, toujours par croissance de $(a_n)_n$, on a

$$\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k^2} \leq \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}.$$

De fait, $b_n \leq \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} \leq 1$ par télescopage. D'où la première assertion voulue.

Il est clair que $(b_n)_n$ croît donc elle converge. Considérons alors un réel $q > 1$ et la suite $(a_n)_n$ définie par $a_n = q^n$. Alors $(a_n)_n$ satisfait les hypothèses voulues et b_n vaut après calcul $\frac{1}{q} \left(1 - \frac{1}{q^n}\right)$. Donc $(b_n)_n$ converge vers $1/q \in]0, 1[$. Soit $c \in]0, 1[$. Je prends $q = 1/c \in]1, +\infty[$. Alors la suite (q^n) convient comme on vient de le prouver. Pour $c = 0$, la suite constante égale à 1 convient.

Indication pour l'exercice 8.19 :

On va utiliser l'exercice 8.12. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe au moins une valeur d'adhérence. Soit donc a , une valeur d'adhérence. Soit φ , une extractrice associée. Soit l , la limite de $v_n := \left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)_n$. Alors en écrivant $v_{\varphi(n)}$, on a $u_{2\varphi(n)} = 2(v_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2(l - a)$. Donc $2(l - a)$ est aussi une valeur d'adhérence. En itérant ce procédé, je construis une suite $(a_n)_n$ définie par $a_0 = a$ et $a_{n+1} = 2(l - a_n)$. C'est une suite

arithmético-géométrique de raison -2 . Or, cette suite diverge sauf si $a_0 = a$ est point fixe de $x \mapsto 2(l - x)$. Les valeurs d'adhérence étant bornées car la suite est bornée, nécessairement $a = \frac{2l}{3}$.
 a est donc unique et donc $(u_n)_n$ converge.

Indication pour l'exercice 8.20 :

Soit $u_n := e^{a_n} + e^{b_n}$. Puisque $e^{a_n}, e^{b_n} \leq u_n$, et que $(u_n)_n$ converge, nécessairement $(e^{a_n})_n$ et $(e^{b_n})_n$ sont majorées. Donc les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ le sont aussi. Puisque $(a_n + b_n)_n$ est bornée (car convergente), on en déduit que $(a_n)_n$ est bornée en tant que somme de deux fonctions minorées (qui sont $(a_n + b_n)_n$ et $(-b_n)_n$). Idem pour (b_n) . Par Bolzano-Weierstrass, je considère une valeur d'adhérence de (a_n) . Je note φ , une extractrice telle que $(a_{\varphi(n)})_n$ converge, disons vers a . Alors $(b_{\varphi(n)})_n$ converge vers $-a$ et on a $e^a + e^{-a} = 2$. On en déduit facilement que c'est équivalent à dire que $e^a = 1$ donc que $a = 0$. Par l'exercice 8.12, puisque $(a_n)_n$ admet une unique valeur d'adhérence, elle converge. Idem pour $(b_n)_n$.

Corrigé pour l'exercice 8.21 :

Supposons l'existence d'un λ tel qu'il existe un $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul vérifiant $AX = \lambda X$.

Par produit matriciel, on obtient

$$\forall i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, -x_{i+1} + 2x_i - x_{i-1} = \lambda x_i.$$

Pour $i = 1$, on a $2x_1 - x_2 = \lambda x_1$ et pour $i = n$, on a $-x_{n-1} + 2x_n = \lambda x_n$. En considérant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, on obtient

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = \lambda x_i. \quad (8.1)$$

Ce problème est délicat car on aimerait avoir 8.1 sur tout $i \in \mathbb{N}^*$. Résolvons donc d'abord un autre problème. On cherche λ réel tel qu'il existe une solution non nul au problème suivant :

$$\begin{cases} x_0 = 0, x_{n+1} = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, -x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} = \lambda x_k \end{cases} \quad (8.2)$$

$$(8.3)$$

Ce n'est pas une équation récurrente linéaire du cadre du cours, les conditions initiales n'étant pas respectées. On impose en fait des conditions, dites aux bords. Ici, ces conditions sont qualifiées « condition aux bords de Dirichlet ».

Trouvons les suites $(x_k)_k$ vérifiant 8.3. On écrit

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, x_{k+1} + (\lambda - 2)x_k + x_{k-1} = 0$$

qui est bien une équation récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique s'écrit alors

$$X^2 + (\lambda - 2)X + 1 = 0. \quad (8.4)$$

Le discriminant de cette équation est $(\lambda - 2)^2 - 4 = \lambda(\lambda - 4) =: \Delta$. Il y a donc trois cas.

- Si $\Delta > 0$, alors 8.4 admet deux solutions :

$$r_{\pm} = \frac{2 - \lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Le cours assure donc que si $(x_k)_k$ vérifie 8.3, alors il existe $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_k = \mu_1 r_+^k + \mu_2 r_-^k.$$

Si $(x_k)_k$ vérifie de plus 8.2, alors $x_0 = 0$ ce qui signifie que $\mu_1 + \mu_2 = 0$ et $x_{n+1} = 0$ ce qui signifie que $\mu_1 r_+^{n+1} + \mu_2 r_-^{n+1} = 0$. On a donc un système linéaire :

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 &= 0 \\ \mu_1 r_+^{n+1} + \mu_2 r_-^{n+1} &= 0 \end{cases}$$

Ce système admet une et unique solution car son déterminant associé est $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_+^{n+1} & r_-^{n+1} \end{pmatrix} = r_-^{n+1} - r_+^{n+1}$. Si $r_+^{n+1} = r_-^{n+1}$, étant des réels, on a $r_+ = \pm r_-$.

- Si $r_+ = r_-$, alors $r_+ - r_- = 0$ donc $\sqrt{\Delta} = -\sqrt{\Delta}$ ce qui signifie que $\Delta = 0$ ce qui n'est pas le cas.
- Si $r_+ = -r_-$, alors $r_+ + r_- = 0$ donc $2 - \lambda = -2 + \lambda$ donc $\lambda = 2$ ce qui n'est pas le cas (si $\lambda = 2$, alors $\Delta = -4$ et on est dans le cas $\Delta > 0$).

Puisque $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ est clairement solution du système, elle est la seule. Finalement, vérifier 8.2 et 8.3 revient à être la suite nulle dans ce cas.

- Si $\Delta = 0$, alors 8.4 admet une unique solution qui est $-\frac{\lambda-2}{2}$ ¹. On note cette racine r_0 . Le cours assure donc que si $(x_k)_k$ vérifie 8.3, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_k = (\mu_1 + \mu_2 n) r_0^k.$$

Si $(x_k)_k$ vérifie de plus 8.2, alors $x_0 = 0$ ce qui signifie que $\mu_1 = 0$ et $x_{n+1} = 0$ ce qui signifie que $(\mu_1 + \mu_2(n+1))r_0^{n+1} = 0$. Puisque $r_0 \neq 0$ (car $r_0 = 0 \iff \lambda = 2$ mais $\Delta = 0 \iff \lambda \in \{0, 4\}$), nécessairement, μ_2 vaut aussi 0. Finalement, vérifier 8.2 et 8.3 revient aussi à être la suite nulle dans ce cas.

- Si $\Delta < 0$, alors 8.4 admet deux solutions complexes conjugués :

$$z_{\pm} = \frac{2-\lambda}{2} \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Puisque $\Delta \neq 0$, $z_{\pm} \neq 0$: il existe donc un unique $R > 0$ et un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$z_+ = \frac{2-\lambda}{2} + i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = R e^{i\theta}. \quad (8.5)$$

Le cours assure donc que si $(x_k)_k$ vérifie 8.3, alors il existe $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ ² tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, x_k = \mu_1 R e^{ik\theta} + \mu_2 R e^{-ik\theta}.$$

Or,

$$R^2 = |z_+|^2 = \left(\frac{2-\lambda}{2}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4} = \frac{(2-\lambda)^2 - (\lambda-2)^2 + 4}{4} = 1$$

donc $R = 1$. Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, x_k = \mu_1 e^{ik\theta} + \mu_2 e^{-ik\theta}.$$

Si $(x_k)_k$ vérifie de plus 8.2, alors $x_0 = 0$ ce qui signifie que $\mu_1 + \mu_2 = 0$ donc que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, x_k = \mu_1 (e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}) = 2i\mu_1 \sin(k\theta)$$

mais aussi $x_{n+1} = 0$ donc

$$2i\mu_1 \sin((n+1)\theta) = 0.$$

Si $(x_k)_k$ vérifie alors 8.2 et 8.3, alors soit $\mu_1 = 0$ et $(x_k)_k$ est nulle ce qui est exclu, soit $\sin((n+1)\theta) = 0$ donc que $(n+1)\theta \equiv 0[\pi]$ donc

$$\theta \in \left\{ \frac{p\pi}{n+1} : p \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dans ce cas, de la relation 8.5, on tire que $\frac{2-\lambda}{2} = \cos(\theta)$ donc λ s'écrit

$$2 - 2 \cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right) : p \in \mathbb{Z}.$$

¹. Je ne suis pas censé vous apprendre que la racine double d'un polynôme de la forme $aX^2 + bX + c$ à discriminant négatif est $-\frac{b}{2a}$!

². *a priori*

On a de plus que $p \notin (p+1)\mathbb{Z}$ (car sinon, $(x_k)_k$ est nulle), que par 2π -périodicité de $\cos$, on peut restreindre p dans $\llbracket 0, 2n+2 \rrbracket$ et par la relation,

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \cos\left(\frac{(n+1+p)\pi}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{(n+1-p)\pi}{n+1}\right)$$

en réunissant toutes ces informations, on peut restreindre $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Ainsi,

$$\lambda \in \left\{ 2 - 2 \cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right) : p \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\} =: S.$$

Remarquons que pour chaque $\lambda \in S$ (que l'on écrit $\lambda = 2 - 2 \cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)$ avec $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$), on peut donc définir un $\theta_\lambda = \frac{p\pi}{n+1}$ (le même p).

Bilan : si $(x_k)_k$ est une suite non nulle vérifiant 8.2 et 8.3, alors nécessairement $\lambda \in S$ et que dans ce cas, $(x_k)_k$ vérifie

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_k = 2i\mu_1 \sin(k\theta_\lambda)$$

avec θ_λ et μ_1 un imaginaire pur ce qui est équivalent à dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_k = c \sin(k\theta_\lambda)$$

avec c réel.

Ainsi, si λ est un réel tel qu'il existe une suite non nulle vérifiant 8.2 et 8.3, alors $\lambda \in S$.

Réciproquement, soit $\lambda \in S$ et soit $\theta = \theta_\lambda$. Soit $x_k = c \sin(k\theta)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et c un réel quelconque. Alors $(x_k)_k$ vérifie bien 8.2. Montrons qu'elle vérifie aussi 8.3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On se souvient de la formule

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

pour tout $p, q \in \mathbb{R}$. On a donc ici :

$$\sin((k+1)\theta) + \sin((k-1)\theta) = 2 \sin(k\theta) \cos(\theta).$$

Ainsi,

$$-\sin((k+1)\theta) + 2 \sin(k\theta) - \sin((k-1)\theta) = -2 \sin(k\theta) \cos(\theta) + 2 \sin(k\theta) = 2(1 - \cos(\theta)) \sin(k\theta) = \lambda \sin(k\theta).$$

En multipliant cette dernière relation par c , on obtient alors

$$-x_{k+1} + 2x_k - x_{k-1} = \lambda x_k$$

donc $(x_k)_k$ vérifie 8.3.

Maintenant, on peut répondre à la question de l'énoncé. Soit λ un réel tel qu'il existe une suite non nulle solution du problème 8.1. Alors on peut définir la suite $(x_k)_k$ sur tout n suivant la relation de récurrence donnée avec comme valeurs initiales, les valeurs de x_k avec k balayant $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Ainsi, $(x_k)_k$ satisfait 8.2 et 8.3 donc $\lambda \in S$. Réciproquement, si $\lambda \in S$, alors on a obtenu une solution $(x_k)_k$ vérifiant 8.2 et 8.3 donc en particulier 8.1. Ainsi, la réponse au problème initial est : $\lambda \in S$.

Il reste à conclure quant à la limite à calculer. Déjà,

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{1}{2}.$$

En effet,

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{x^2} \frac{1}{1 + \cos(x)} = \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2} \frac{1}{1 + \cos(x)} = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos(x)}.$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

(on peut calculer cette limite avec un taux d'accroissement par exemple mais ce n'est pas l'idéal pour des raisons de définition « sympathique » du sinus) et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos(x)} = \frac{1}{2}.$$

Par produit, on a le résultat souhaité. Ainsi,

$$\frac{1}{n^2} \frac{\lambda_M}{\lambda_m} = \frac{1}{n^2} \frac{2 - 2 \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)}{2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)} = \frac{1 - \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)}{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{\left(\frac{\pi}{n+1}\right)^2}} \frac{1}{\left(n \frac{\pi}{n+1}\right)^2}.$$

Le numérateur tend vers 2 car $\frac{n\pi}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi$ et $\cos(\pi) = -1$. Le dénominateur tend vers $\frac{1}{\pi^2}$. Le terme à droite de la fraction tend vers $\frac{1}{\pi^2}$. Ainsi,

$$\frac{1}{n^2} \frac{\lambda_M}{\lambda_m} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\pi^2}.$$

Remarque : la quantité $\frac{\lambda_M}{\lambda_m}$ s'appelle le conditionnement de la matrice A . On vient d'obtenir un équivalent :

$$\text{Cond}(A) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4n^2}{\pi^2}.$$

Chapitre 9

Arithmétique de $\mathbb{Z}$

9.1 Exercices

Exercice 9.1 (Un peu de pgcd).

Soit a, b dans $\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $a|b \implies a^k|b^k$.
2. Montrer que $a^k \wedge b^k = (a \wedge b)^k$.

Exercice 9.2 (Mersenne).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n = 2^n - 1$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Montrer que $a^n - 1 \in \mathcal{P} \implies \alpha = 2$.
2. Montrer que si $d|n, M_d|M_n$.
3. Montrer que $M_n \in \mathcal{P} \implies n \in \mathbb{N}$. Que pensez-vous de la réciproque ? On pourra calculer 23×89 .
4. Soit $a, b \in \mathbb{N}, r$ le reste de la division euclidienne de a par b . Montrer que le reste de la division euclidienne de M_a par M_b est M_r .

Exercice 9.3 (Une fonction arithmétique).

Soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui à n , associe $\sum_{d|n, d \geq 1} d$.

1. Montrer que f est multiplicative, c'est-à-dire $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(pq) = \sigma(p)\sigma(q)$ lorsque $p \wedge q = 1$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$. Montrer que si $2^k - 1 \in \mathcal{P}$, alors $n \in 2\mathbb{Z}$ et $\sigma(n) = 2n$, puis que si $2^k - 1 \notin \mathcal{P}$, $\sigma(n) > 2n$.
3. Soit maintenant n tel que $n \in 2\mathbb{Z}$ et $\sigma(n) = 2n$.
 - (a) On note $m := \frac{n}{2^{v_2(n)}}$. Montrer que m est impair et que $2^{v_2(n)+1}m = (2_2^v(n) - 1)\sigma(m)$.
 - (b) Montrer que $2_2^v(n) - 1$ divise m : on note r tel que $m = (2_2^v(n) - 1)r$. En déduire $\sigma(m)$, puis que $n = 2^{v_2(n)}M_{v_2(n)+1}$ avec $M_{v_2(n)+1}$ premier.

Exercice 9.4 (Critère de divisibilité).

On note n , un nombre naturel et $\overline{n_k n_{k-1} \cdots n_1 n_0}$, l'écriture en base 10 de n . Montrer que

$$\overline{n_k n_{k-1} \cdots n_1 n_0} \equiv 0[17] \iff \overline{n_k n_{k-1} \cdots n_1 - 5n_0} \equiv 0[17].$$

Exercice 9.5 (Un petit comptage).

Combien existe-t-il de nombres naturels multiples de 15 possédant exactement 15 diviseurs positifs ?

Exercice 9.6 (Pythagore ?).

Montrer que l'équation $x^2 + y^2 = 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Exercice 9.7 (Un autre pgcd).

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels, on note $\text{pgcd}((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \text{pgcd}(u_0, \text{pgcd}((u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}))$. (Pour résumer, on prend le pgcd de tous les éléments.

Déterminer $\text{pgcd}(\{p^8 - 1 : p \in \mathcal{P}\})$.

Exercice 9.8 (Equation diophantienne linéaire).

Résoudre $6x + 10y + 15z = 2022$ dans $\mathbb{Z}^3$ puis dans $\mathbb{N}^3$.

Exercice 9.9 (Un peu fastidieux).

Trouver le nombre de paires d'entiers strictement positifs x, y avec $x \leq y$ tels que $\text{pgcd}(x, y) = 5!$ et $\text{ppcm}(x, y) = 50!$.

Exercice 9.10 (Wilson).

A faire en classe de MP. Montrer que

$$p \in \mathcal{P} \iff (p-1)! \equiv -1[p].$$

Exercice 9.11 (Legendre).

Soit p , un nombre premier et n , un entier naturel. Montrer que

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Exercice 9.12 (Liouville).

Soit $p \geq 6$. Montrer que l'équation en $m \in \mathbb{N}^*$, $(p-1)! + 1 = p^m$ n'a pas de solution

Exercice 9.13.

Résoudre l'équation $x^y = y^x$ avec $x \neq y$ et x, y des entiers naturels non nuls. On donnera une preuve arithmétique, bien sûr. On pourra considérer $d = a \wedge b$.

Exercice 9.14.

Calculer, pour $p \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N}^*, k \in \llbracket 1, p^n - 1 \rrbracket$, $v_p \left(\binom{p^n}{k} \right)$.

9.2 Éléments de corrections

Indication pour l'exercice 9.1 :

1. $a|b \Rightarrow \forall p \in \mathcal{P}, v_p(a) \leq v_p(b) \Rightarrow \forall p \in \mathcal{P}, kv_p(a) \leq kv_p(b) \Rightarrow \forall p \in \mathcal{P}, v_p(a^k) \leq v_p(b^k) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, a^k | b^k$.
2. $a^k \wedge b^k = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min(v_p(a^k), v_p(b^k))} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min(kv_p(a), kv_p(b))} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(p^{\min(v_p(a), v_p(b))} \right)^k = \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min(v_p(a), v_p(b))} \right)^k$.
Le dernier terme est exactement $(a \wedge b)^k$.

Indication pour l'exercice 9.2 :

Visiblement, vous l'avez déjà fait. Mais n'hésitez pas à me contacter.

Indication pour l'exercice 9.3 :

1. Il faut juste remarquer qu'un diviseur d'un nombre n se construit avec les mêmes nombres premiers que composent n mais en nombres de copies de nombres premiers inférieures. (traduction du fait que $\forall p \in \mathcal{P}, v_p(d) \leq v_p(n)$). Notons $a = \prod_{i=1}^r p_i$ et $b = \prod_{j=1}^s q_j$, décompositions en facteurs irréductibles. Alors

$$\sigma(a) = \sum_{I \subset [1, r]} \left(\prod_{i \in I} p_i \right); \sigma(b) = \sum_{J \subset [1, s]} \left(\prod_{j \in J} q_j \right)$$

Mais

$$\sigma(ab) = \sigma \left(\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^s p_i q_j \right) = \sum_{I \subset [1, r], J \subset [1, s]} \left(\prod_{i \in I} \prod_{j \in J} p_i q_j \right)$$

Le résultat en découle.

2. Si $2^k - 1$ est premier, alors k n'est pas 1 donc n est divisible par 2^{k-1} donc par 2 en particulier. Puis, $\sigma(n) = \sigma(2^{k-1})\sigma(2^k - 1) = (2^k - 1 + 1)\sigma(2^{k-1})$. Les diviseurs de 2^{k-1} étant les 2^i avec $0 \leq i \leq k-1$, on a

$$\sigma(2^{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 2^k - 1.$$

De fait,

$$\sigma(n) = 2^k(2^k - 1) = 2(2^{k-1}(2^k - 1)) = 2n.$$

Si $2^k - 1 \notin \mathcal{P}$, il est clair que $\sigma(2^k - 1) \geq 2^k$ donc $\sigma(2n) \geq 2^k \sigma(2^{k-1}) > 2n$.

3. (a) Il est clair que m est impair. On a $n = 2^{v_2(n)}m$. De fait, $\sigma(n) = (2^{v_2(n)} - 1)\sigma(m)$ puisque m et $2^{v_2(n)}$ sont premiers entre eux et on a déjà fait le calcul de $\sigma(2^{v_2(n)})$. Puisque $\sigma(n) = 2n$, le résultat tombe.
 (b) $2^{v_2(n)} - 1$ est premier avec $2^{v_2(n)+1}$ donc par Gauss, divise m .

Indication pour l'exercice 9.4 :

J'écris :

$$\begin{aligned} \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} &\equiv 0[17] & \iff & \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} \times 10 + a_0 \equiv 0[17] \\ & & \iff & \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} \times 10 - 50a_0 + 50a_0 + a_0 \equiv 0[17] \\ & & \iff & 10(\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} - 5a_0) + 51a_0 \equiv 0[17] \\ & & \iff & 10(\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} - 5a_0) \equiv 0[17] \\ & & \iff & \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} - 5a_0 \equiv 0[17] \\ & \text{Par Gauss car } 10 \wedge 17 = 1 & & \end{aligned}$$

Indication pour l'exercice 9.5 :

Soit $\mathcal{P}$, l'ensemble des nombres premiers. Alors pour tout entier n supérieur à 2, n s'écrit $\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$.

Soit donc un entier n vérifiant les conditions de l'énoncé. Puisque 15 le divise, n est divisible par 3 et 5. Dit autrement $v_3(n) \geq 1$ et $v_5(n) \geq 1$.

Pour avancer, j'utilise le lemme suivant : soit d , la fonction qui à un entier naturel n associe le nombre de diviseurs positifs de n . Alors $\forall n \geq 2, d(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (v_p(n) + 1)$.

J'enlève le cas $n = 0$ puisque il ne satisfait pas les conditions de l'énoncé. Puisque n est divisible par 15, il est plus grand que 15. Donc je peux appliquer la décomposition en facteur premiers et le lemme ci-dessus. J'ai donc $d(n) = 15 = \prod_{p \in \mathcal{P}} (v_p(n) + 1)$. Les seuls valeurs possibles prises par $v_p(n) + 1$ sont donc 1, 3, 5 et 15, les

diviseurs de 15.

15 n'étant que le produit de maximum deux nombres premiers, il n'y a que deux premiers qui jouent dans la décomposition (i.e. ont une valuation plus grande que 1). Ce sont donc 3 et 5.

Je sais dorénavant que n s'écrit $3^a 5^b$ pour deux entiers a, b vérifiant les conditions supérieur à 1 et $(a+1)(b+1) = 15$. Je n'ai que deux couples qui vérifie cela : (2,4) et (4,2). n vaut soit $3^2 5^4 = 5625$, soit $3^4 5^2 = 2025$.

Indication pour l'exercice 9.6 :

Supposons par l'absurde le contraire. Il existe donc (p, q, r, d) tels que : $x = p/r, y = q/d$, décomposition irréductible de la forme $\mathbb{Z}/\mathbb{N}^*$. Alors j'ai $p^2 d^2 + q^2 r^2 = 3r^2 d^2$. $r^2 | p^2 d^2 + q^2 r^2$ et $r^2 | q^2 r^2$. Donc r^2 divise la différence donc divise $p^2 d^2$ mais étant premier avec p^2 , il divise d^2 . De même, je montre que $d^2 | r^2$. J'ai donc $d^2 = r^2$ car ils sont positifs en tant que carré, donc $d = r$ car les deux sont positifs.

Je me suis ramené à l'équation $p^2 + q^2 = 3r^2$, avec toujours la condition $r \wedge p = 1, r \wedge q = 1$. Modulo 3, j'ai donc $p^2 + q^2 = 0 \pmod{3}$, ce qui implique que $p, q = 0 \pmod{3}$. En effet, p^2 est congru à 0 ou 1 modulo 3, idem pour q^2 donc pour que la somme fasse 0, nécessairement p et q doivent être 0 modulo 3.

En notant $p = 3k, q = 3l$, $3(k^2 + l^2) = r^2$. Donc 3 divise r^2 . Donc 3 divise r . (par exemple, en disant $v_3(r^2) = 2v_3(r) \geq 1$ qui implique que $v_3(r) \in \mathbb{N} > 0$).

Je viens donc de constater que 3 divise p et r , contredisant la primalité relative de ces deux entiers. Donc x, y ne sont pas rationnels.

Indication pour l'exercice 9.7 :

$$p^8 - 1 = (p^4 + 1)(p^4 - 1)$$

$$p^8 - 1 = (p^4 + 1)(p^2 + 1)(p^2 - 1)$$

$$p^8 - 1 = (p^4 + 1)(p^2 + 1)(p + 1)(p - 1).$$

Nous allons utiliser toute ces lignes.

Ligne 1 : Par le petit théorème de Fermat, 5 divise $p^4 - 1$ (car p est premier différent de 5 donc premier avec lui) donc divise $p^8 - 1$.

Ligne 2 : idem, 3 divise $p^8 - 1$ par un raisonnement analogue.

Ligne 3 : p est impair donc $P - 1, p + 1$ soit deux pairs consécutifs. L'un est divisible par 4 et donc le produit est divisible par 8. Comme $p^2 + 1$ et $p^4 + 1$ sont pairs (La parité se conserve par passage au carré), le tout est divisible par 32.

Ainsi, $\text{ppcm}(5, 3, 32) = 480 | (p^8 - 1)$.

Calculons $\text{pgcd}(7^8 - 1, 11^8 - 1)$. Ça me donne (merci la calculatrice) 480. Je dispose donc d'un cas d'égalité. L'entier demandé est donc 480.

Indication pour l'exercice 9.9 :

Comme on sait que $\text{ppcm}(a, b)\text{pgcd}(a, b) = ab$ puisque a, b sont deux entiers strictement positif, deux entiers x, y vérifiant les conditions de l'énoncé satisfont donc l'égalité :

$$5!50! = xy \quad (1).$$

Puisque $\text{pgcd}(x, y) = 5!$, il existe deux entiers a, b premiers entre eux tel que $x = 5!a, y = 5!b$.

J'injecte dans l'égalité (1), et j'obtiens $ab = \prod_{k=6}^{50} k =: N$.

Il faut donc trouver le nombre de couples premiers entre eux dont le produit vaut ab , prendre la moitié et on aura gagné. Pour cela, je procède le comptage comme suit :

Prenons le cas où a est une puissance de 2. Alors forcément, $a = 2^{v_2(N)}$. En effet, si ce n'est pas le cas, comme

$v_2(N) = v_2(a) + v_2(b)$, j'ai $v_2(b) > 0$ donc 2 divise a et b . Cette remarque justifie donc l'écriture :

$$N = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(N)} = \underbrace{\prod_{p \in \mathcal{P}_1} p^{v_p(N)}}_{=:a} \overbrace{\prod_{p \in \mathcal{P}_2} p^{v_p(N)}}^{=:b}$$

avec $\mathcal{P}_1 \sqcup \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}$.

Le nombre de possibilités pour a correspond au nombre de découpage d'un ensemble d'indices en deux ensembles de cardinal supérieur à 1. Dans N , puisque c'est un produit d'entiers consécutifs, il suffit de trouver le plus grand premier qui compose N (i.e. 47) pour écrire :

$$N = \prod_{p=2}^{47} p^{v_p(N)} = \prod_{p \in I} p^{v_p(N)}, \text{ avec } I = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}.$$

Combien existe-t-il de façon pour couper I en deux ensembles disjoints ? Pour en créer un, il suffit de parcourir les éléments de I et de regarder si on le prend ou non. Ça me donne $2^{\text{Card}(I)} = 2^{15}$.

J'ai donc 2^{15} découpage de I , donc $2^{15} - 2$ découpage pour créer $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Donc $2^{15} - 2$ manières de créer mon entier a . Comme on souhaite que $x \leq y$, i.e. $a \leq b$, j'ai $2^{14} - 1$ manières pour créer mon entier a donc mon entier x en multipliant par 5!. Comme y est entièrement déterminé par x , j'ai donc finalement $2^{14} - 1$ paires satisfaisant les conditions demandées.

Indication pour l'exercice 9.8 :

Etablissons déjà une solution en particulier. On a un peu de chance, $337 \times 6 = 2022$. De fait, le triplet $(337, 0, 0)$ est solution. De fait, je me suis ramené à étudier

$$6(x - 337) + 10y + 15z = 0.$$

Avec un changement de variable, je n'ai plus qu'à considérer les solutions de

$$(E_h) : 6x + 10y + 15z = 0.$$

Soit (x, y, z) , un triplet solution. Alors $6x + 10y = -15z$ donc $2(3x + 5y) = -15z$. Puisque $2 \wedge 15 = 1$, par Gauss, 2 divise z . Soit k tel que $z = 2k$.

Aussi, $6x + 15z = -10y$, donc $3(2x + 5z) = -10y$. Puisque $3 \wedge 10 = 1$, par Gauss, 3 divise y . Soit l tel que $y = 3l$.

Enfin, $10y + 15z = -6x$ donc $5(2y + 3z) = -6x$. Puisque $5 \wedge 6 = 1$, par Gauss, 5 divise x . Soit p tel que $x = 5p$. J'ai finalement

$$6 \times 5p + 3 \times 10l + 2 \times 15k = 0,$$

donc $p + l + k = 0$. Les solutions sont donc les $\{(-5l - 5k, 3l, 2k), (l, k) \in \mathbb{Z}^2\}$. De fait, les solutions de l'équation générale sont donc $\{(337 - 5(l + k), 3l, 2k), (l, k) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Quid des solutions positives ? Pour cela, on doit imposer $l, k \geq 0$ et $l + k \leq \frac{337}{5}$. Puisque $l + k \in \mathbb{N}$, il faut que $l + k \leq 67 = \lfloor 337/5 \rfloor$. De fait, les solutions sont donc

$$\{(337 - 5(l + k), 3l, 2k), (l, k) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } k + l \leq 67\}$$

Indication pour l'exercice 9.10 :

Faites cet exercice en MP. J'ai besoin du cours de mathématiques spéciales. Pour l'implication réciproque, supposons que p ne soit pas premier. Alors je peux trouver q premier tel que q divise p . En particulier, $q \leq p - 1$. De fait, $(p - 1)!$ contient q et donc est congru à $0[p]$. Mais $0 \neq -1$ pour $p \geq 2$.

Passons à l'implication directe. Dans toute la suite, lorsque l'on fixe un nombre premier p , les calculs se font

dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Pour le cas $p = 2$, j'ai bien $1 = -1$. Pour le cas $p = 3$, j'ai bien $2 = -1$. Dans la suite, p est un nombre premier plus grand que 5.

Puisque p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps. En particulier, si je prends un élément compris entre 2 et $p - 2$ disons k , il admet un inverse. Cet inverse n'est pas 1 puisque 1 est inversible, d'inverse 1. (Il y a unicité de l'inverse). De plus, l'inverse de $p - 1$, c'est $p - 1$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Donc $k^{-1} \neq 1, p - 1$. Ainsi, k admet un inverse dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cap \llbracket 2, p - 2 \rrbracket$. ($\mathcal{P}$, l'ensemble des nombres premiers).

Montrons maintenant que $k \neq k^{-1}$. Si $k = k^{-1}$, alors, $k^2 = 1$ donc $k^2 - 1 = 0$ donc $(k - 1)(k + 1) = 0$. Or $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, donc il est en particulier intègre. Donc $k - 1 = 0$ ou $k + 1 = 0$. Donc $k = k^{-1} \implies k = 1$ ou $k = -1$, dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Donc en rassemblant tous les inverses deux par deux, j'ai $\prod_{k=2}^{p-2} k = \underbrace{1 \times 1 \times 1 \cdots \times 1}_{\frac{p-3}{2} \text{ fois}}$. Cela est cohérent puisque

p est impair (le cas $p = 2$ étant exclu), $p - 2$ est aussi impair. Donc $\text{Card}(\llbracket 2, p - 2 \rrbracket) = p - 2 - 2 + 1 = p - 3$ est pair.

Ainsi, $(p - 1)! = 1 \times p - 1 = p - 1 = -1$. CQFD.

Indication pour l'exercice 9.11 :

On a

$$v_p(n!) = \sum_{j \leq n} v_p(j) = \sum_{j \leq n} \sum_{k=1}^{v_p(j)} 1 = \sum_{k \geq 1} \sum_{j \leq n, v_p(j) \geq k} 1.$$

Or, $\sum_{j \leq n, v_p(j) \geq k} 1$ est égal au nombre d'entier $j \leq n$ qui sont divisibles par p^k . C'est exactement $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

Indication pour l'exercice 9.12 :

Comme $p > 5$, $(p - 1)! + 1$ est impair. (Vrai dès que $p \neq 2$). Donc p^m aussi. De fait, p est impair. J'ai donc

$$2 < \frac{p-1}{2} < p-1.$$

De fait, $(p - 1)^2 = 2^{\frac{p-1}{2}}(p - 1)$ divise $(p - 1)!$. J'ai donc, en écrivant que $(p - 1)! = p^m - 1$ par hypothèse, que $(p - 1)^2 | p^m - 1 = (p - 1)(1 + p + \cdots + p^{m-1})$. Donc $p - 1$ divise $(1 + p + \cdots + p^{m-1})$. Puisque $p \equiv 1[p - 1]$, j'ai donc $1 + p + \cdots + p^{m-1} \equiv 1 + 1 + 1^2 + \cdots + 1^{m-1} \equiv m[p - 1]$. $(p - 1)$ divisant cette somme, j'ai donc $0 \equiv m[p - 1]$ donc $(p - 1) | m$. En particulier, $m \geq p - 1$ donc $p^m \leq p^{p-1} > (p - 1)^{p-1} > (p - 1)!$. Ceci entraîne que l'équation proposé n'a pas de solution.

Indication pour l'exercice 9.13 :

Soit a, b , deux entiers naturels non nuls, avec $a < b$ et $a^b = b^a$. Soit $d = \text{pgcd}(a, b)$, et a', b' tel que $a = da', b = db'$. Il est clair que $a' \wedge b' = 1$ et $a' < b'$. J'ai donc $a^b = b^a \iff d^{b'-a'} a'^{b'} = b'^{a'}$. Alors a' divise $b'^{a'}$. Puisque $a' \wedge b' = 1$, on a que $a' = 1$. Donc $b' > 1$ et $d^{b'-1} = b'$. Donc $d > 1$.

Si $b' \geq 3$, alors $d^{b'-1} \geq (1 + 1)^{b'-1} > 1 + \binom{b'-1}{1} = b'$.

Donc $b' = 2$ et $d = 2$. De fait $a = 2$ et $b = 4$. a, b étant symétrique, $(4, 2)$ est aussi solution.

Réciproquement, ces deux couples conviennent.

Indication pour l'exercice 9.14 :

J'ai

$$k! \binom{p^n}{k} = k! \frac{(p^n)!}{k!(p^n - k)!} = p^n(p^n - 1)(p^n - 2) \cdots (p^n - (k - 1)).$$

Soit $j \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$. J'écris alors $j = p^a u$ avec u non divisible par p et $0 \leq a < n$ (puisque $j < k < p^n$). Alors $p^n - j = p^a(p^{n-a} - u)$ et $p^{n-a} - u$ n'est pas divisible par p en tant que somme d'une quantité divisible et une autre non-divisible par p . De fait, $v_p(p^n - j) = v_p(p^a) = a = v_p(j)$, la dernière égalité découlant du fait que u n'est pas divisible par p .

Ainsi, j'ai

$$v_p(k!) + v_p\left(\binom{p^n}{k}\right) = n + \sum_{j=1}^{k-1} v_p(j).$$

De fait,

$$v_p\left(\binom{p^n}{k}\right) = n - v_p(k).$$

Chapitre 10

Continuité

10.1 Exercices

Exercice 10.1 (Continuité à la main).

Etudier la continuité des fonctions suivantes :

- a) $x \mapsto \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x < 1 \\ 1 + \ln(x) & \text{sinon} \end{cases}$
- b) $x \mapsto \begin{cases} \frac{3x-1}{2x+1} & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{x+5} & \text{sinon} \end{cases}$
- c) $x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 10.2 (Point fixe).

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, continue. Montrer qu'il existe x dans $[0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 10.3 (Une équation fonctionnelle).

Soit f , une fonction continue en 0, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 10.4 (Les dessins, c'est bien).

Soit f , une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que f converge en $\pm\infty$ vers 0 : l'ensemble des fonctions satisfaisant ces hypothèses est parfois noté $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $A_f := \{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}, f(x) \neq f(y)\}$. Déterminer $\max(\{\text{Card}(A_f) : f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})\})$.

Exercice 10.5 (Seconde espèce).

Etudier la convergence de $\sin \circ \ln$ en $+\infty$.

Exercice 10.6 (Une annulation).

Soit f, g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. On suppose que f et g commutent pour la composition. On suppose par l'absurde que $f - g$ ne s'annule jamais.

1. Montrer que $f > g$ ou $g > f$. On suppose donc dans la suite que $f > g$.
2. Montrer qu'il existe un réel A strictement positif tel que

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], f^n(x) \geq g^n(x) + nA,$$

où f^n désigné f itérée n fois.

3. Conclure.

Exercice 10.7 (Suite implicite).

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, l'équation $f(x) = x^n$ admet une solution. Etudier l'unicité dans le cas où f est décroissante strictement.

En notant u_n , la solution de l'équation en question, étudier la convergence de $(u_n)_n$ et calculer sa limite éventuelle.

Exercice 10.8 (Heine).

On dit qu'une fonction f est uniformément continue de I dans J , avec I, J , deux intervalles de $\mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

1. Illustrer cette propriété à l'aide d'un dessin. La comparer avec la notion de continuité. Montrer que f uniformément continue implique f continue.
2. Soit $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites telles que $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que si $f(u_n) - f(v_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors f n'est pas uniformément continue. En déduire une fonction continue qui n'est pas uniformément continue.
3. On suppose que I est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. On souhaite démontrer le théorème de Heine.

Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ y est uniformément continue.

A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer ce théorème.

Exercice 10.9 (Une limite).

Soit f , une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $|f|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Montrer que f diverge vers l'infini en $+\infty$.

Exercice 10.10 (Injectivité).

Soit f , une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui converge vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $\pm\infty$. Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 10.11 (Perturbation).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^n + 5x^2 - 2 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = 0$. Vu que x dépend de n , on le note x_n .
2. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \leq \sqrt{2/5}$.
3. Soit $x \in]0, 1[$. Etudier les variations de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ puis de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. En déduire la convergence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Quelle est sa limite ?

Exercice 10.12 (Itérée).

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. On suppose que pour tout $x \in [0, 1], \exists n \geq 2, f^n(x) = x$, où f^n est la composée n -ième de f . Montrer que $\forall x \in [0, 1], f(f(x)) = x$.

Exercice 10.13 (Surjection).

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue surjective.

1. Donner un exemple.
2. Montrer que f ne peut converger dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(\{x\})$ est de cardinal infini.

10.2 Eléments de corrections

Indication pour l'exercice 10.1 :

1. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, continue sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(1)$, puisque f est définie pour $x \in]0, 1[$, f est continue en 1 donc est continue sur D_f .
2. Cette fonction est définie sur $] -\infty, -2[\cup] -2, -1/2[\cup] -1/2, +\infty[$. Elle est continue sur $(] -\infty, -2[\cup] -2, -1/2[\cup] -1/2, +\infty[) \setminus \{-1\}$ et puisque $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4 = f(1)$, et que f est définie pour $x \in] -2, -1]$, on en déduit que f est continue en -1 donc sur D_f .
3. Idem. Mieux : cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$! (c.f. plus tard).

Correction pour l'exercice 10.2 :

Soit $g = f - \text{id}$. Alors $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ puisque $f(1) \leq 1$. De fait, puisque g est continue, par le TVI, g s'annule, disons en c . Alors $f(c) - c = 0$ donc $f(c) = c$.

Indication pour l'exercice 10.3 :

On peut aisément montrer par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\frac{x}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par continuité de f en 0, on en déduit que $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $f(x) = f(0)$, et ce, pour tout x dans $\mathbb{R}$. Donc f est constante.

Indication pour l'exercice 10.4 :

Pensez à la $x \in \mathbb{R} \mapsto xe^{-x^2} \in \mathbb{R}$. On dessine son graphe :

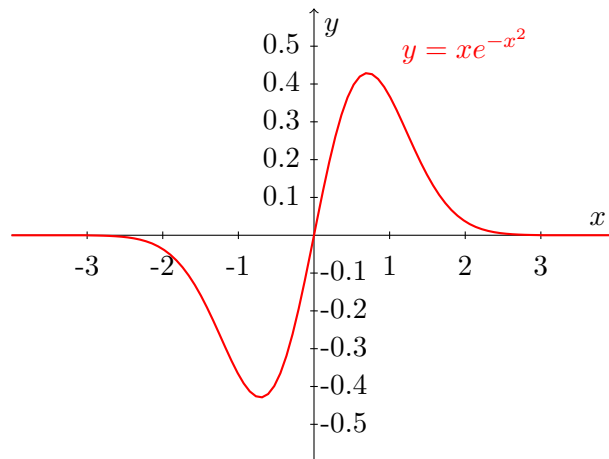


FIGURE 10.1 – $x \mapsto xe^{-x^2}$ sur $[-4, 4]$

Supposons donc que le maximum est 4 ou plus. On peut supposer que c'est exactement 4. Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, les 4 réels uniquement atteints et a, b, c, d , tels que $f(a) = \alpha, f(b) = \beta, f(c) = \gamma, f(d) = \delta$. Alors sur $[a, b]$, nécessairement f admet un minimum et un maximum sur cet intervalle par continuité (théorème des bornes atteintes). Si le minimum est atteint en un intérieur de $[a, b]$, disons en e . Mettons que $\alpha < \beta$. Alors puisque $f(e) < \beta = f(b)$, il existe alors un réel t tel que $f(t) = \alpha \in [f(e), \beta]$ avec $t \in [e, b]$. En particulier, $t \neq a$ ce qui est absurde. De même si $\beta < \alpha$, et de même pour le maximum. Donc le maximum et le minimum est nécessairement atteint en a ou en b (chacun se partageant un des deux rôles). Mettons que le maximum est atteint en b . Sur l'intervalle $[b, c]$, si j'ai un $t \in [b, c]$ tel que $f(t) \leq \beta$, j'ai $f(t) \leq \beta \leq \gamma$. Donc Par le TVI, il va exister un réel s tel que $f(s) = \beta$ avec $s \in [t, c]$. En particulier, $s \neq b$ ce qui est absurde. Donc $f([b, c]) = [\beta, \gamma]$. Un raisonnement analogue permet donc de montrer que γ est le maximum de f sur $[b, c]$ et donc sur $[a, c]$. Le même raisonnement s'applique pour δ . J'ai donc 4 réels $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ tel que $a < b < c < d$ et $f([a, b]) = [\alpha, \beta], f([b, c]) = [\beta, \gamma], f([c, d]) = [\gamma, \delta]$.

Reste à exploiter la convergence en l'infini.

Si $\alpha > 0$, il existe un réel $A > a$ tel que pour tout $x \geq A$, $f(x) < \alpha/2$. En particulier, $f(A) \leq \alpha \leq \delta$. Par le TVI, il existe un réel u tel que $f(u) = \alpha$ avec $d < u < A$. En particulier, $u \neq a$ ce qui est absurde. Le raisonnement s'applique de même pour β et γ , donc $\alpha, \beta, \gamma \leq 0$.

Si $\alpha = 0$, alors $\beta > 0$ et le raisonnement ci-dessus s'applique encore pour β et γ .

Donc $\alpha < 0$.

Si $\beta = 0$, alors $\gamma > 0$ et le raisonnement ci-dessus s'applique. Donc $\beta < 0$.

Exploisons maintenant en $-\infty$. Puisque $\beta < 0$, et que f tend vers 0 en $-\infty$, il existe un réel $B < b$ tel que $\forall x < B$, $f(x) > \beta/2$. En particulier, $f(B) > \beta > \alpha$. Donc par le TVI, il existe un réel v tel que $f(v) = \beta$ et $v \in [B, a]$. En particulier, $v \neq b$ ce qui est absurde.

Donc l'hypothèse de départ est absurde : il ne peut exister 4 réels atteints uniquement. Puisqu'on a trouvé un cas d'égalité pour 3 points, le maximum cherché est bien 3.

Indication pour l'exercice 10.5 :

On prends $u_n := e^{2\pi n}$ et $v_n = e^{2\pi n + \pi/2}$. Alors $\sin(\ln(u_n)) = \sin(2\pi n) = 0$ et $\sin(\ln(v_n)) = \sin(2\pi n + \pi/2) = 1$. Puisque $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ tendent vers l'infini, $\sin \circ \ln$ ne converge donc pas en $+\infty$. (Le résultat invoqué s'appelle certainement caractérisation séquentielle de la limite)

Indication pour l'exercice 10.6 :

1. Une basique utilisation du TVI.
2. Montrons cette propriété par récurrence. Pour $n = 1$, puisque $f - g > 0$, il existe un $A > 0$ tel que $f - g \geq A$. Je fixe ce A pour toute la suite.
Supposons que pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $f^n - g^n \geq nA$. Alors $f \circ f^n \geq g \circ f^n + A = f^n \circ g + A \geq_{Hyp} g^n \circ g + nA + A = g^{n+1} + (n+1)A$.
3. Soit x_0 un réel, et $f(x_n) =: x_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $f^n(x_0) = x_n$. On pose y_0 un réel et $g(y_n) =: y_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $g^n(y_0) = y_n$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \geq y_n + nA$. Or (y_n) est bornée. Donc $y_n + nA$ tend vers $+\infty$ ($A > 0$).
Donc par comparaison, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui est absurde car $(x_n)_n$ est aussi bornée. CQFD.

Indication pour l'exercice 10.7 :

Pour l'existence de la solution, on fait comme dans 10.2. Si f est strictement décroissante, puisque $-x^n$ est strictement décroissante, $f(x) - x^n$ est aussi strictement décroissante. Le TVI conclut quant à l'unicité (en fait, strictement monotone implique injective).

$(u_n)_n$ est donc bornée. Notons $g_n : x \mapsto f(x) - x^n$. Alors $g_{n+1}(u_n) = f(u_n) - u_n^{n+1} = u_n^n - u_n^{n+1} = u_n^n(1 - u_n) \geq 0 = g_{n+1}(u_{n+1})$. Puisque g est décroissante, $(u_n)_n$ est donc croissante, donc est finalement convergente. Soit l , sa limite. l ne peut être nul. Si $l \in]0, 1[$, alors $\exp(n \ln(x_n)) = x^n$ nous permet de dire que $\ln(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(l) \in \mathbb{R}^*$.
Donc $n \ln(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ donc $x_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. De fait, $f(l) = 0$. Puisque $l < 1$, alors $f(l) = 0 > f(1)$. Cela est absurde puisque $f(1) \in [0, 1]$.

Indication pour l'exercice 10.8 :

1. Ce n'est qu'un jeu d'écriture des quantificateurs.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Soit η telle que $\forall x, y \in I, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Puisque $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, telle que $\forall n \geq n_0, |u_n - v_n| \leq \eta$.

De fait, $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon$.

Reprenons : on a fixé un $\varepsilon > 0$. On a trouvé un rang n_0 dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \geq n_0, |f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon$. Cela veut bien dire que $f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

En contraposant, on a la conclusion voulue.

Exponentielle n'est pas uniformément continue. Soit $u_n := n, v_n := n + 1/n$. Alors $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Pour autant, $e^n - e^{n+1/n} = e^n(1 - e^{1/n}) = -\frac{e^n}{n} \frac{1 - e^{1/n}}{0 - \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

3. On suppose la continuité. Nions la proposition de l'uniforme continuité. On a

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x, y \in I, |x - y| \leq \eta \text{ ET } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Soit un tel $\varepsilon > 0$. Soit n , un entier non nul, et $\eta = 1/n$. Il existe alors un x et un y dans I tel que $|x - y| \leq 1/n$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. A chaque n , je peux trouver un x et un y . Notons alors x_n, y_n , deux réels tel que $|x_n - y_n| \leq 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Puisque $(x_n)_n$ est à valeurs dans I , qui est donc un segment, le théorème de Bolzano-Weierstrass s'applique : il existe une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge, disons vers l .

Puisque $(y_{\varphi(n)})_n$ vit toujours dans I , le théorème de Bolzano-Weierstrass s'applique : il existe une extractrice ψ telle que $(y_{\psi(\varphi(n))})_n$ converge, disons vers l' .

Clairement,

$$|x_{\psi(\varphi(n))} - y_{\psi(\varphi(n))}| \leq \frac{1}{\psi(\varphi(n))}.$$

L'inégalité passe à la limite en $|l - l'| \leq 0$, donc $l = l'$. Or, par continuité de f , dans $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$, on peut passer à la limite et on a $|f(l) - f(l')| = |f(l) - f(l)| = 0 \geq \varepsilon$, ce qui est absurde.

De fait, f est bien uniformément continue sur I .

Indication pour l'exercice 10.9 :

Déjà, montrons que f est de signe constant pour x assez grand. En effet, supposons que f s'annule un nombre infini de fois. Soit M , un réel strictement positif. Alors il existe un réel A tel que pour tout $x \geq A$, $|f(x)| \geq M$. Ainsi, pour tout $x \geq A$, ou bien $f(x) \geq M$, ou bien $f(x) \leq -M$. Soit $x \geq A$.

Supposons $f(x) \geq M$. Alors il existe un réel t tel que $t \geq x$ et $f(t) = 0$. Donc $t \geq A$, mais $|f(t)| = 0 \geq M > 0$. Supposons $f(x) \leq -M$. Alors il existe un réel t tel que $t \geq x$ et $f(t) = 0$. Donc $t \geq A$, mais $|f(t)| = 0 \geq M > 0$.

Ainsi, f s'annule qu'un nombre fini de fois. Soit B , un réel tel que $B \geq A$ et $f : x \in [B, +\infty[\mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ soit de signe constant.

Supposons que ce signe soit positif. Alors $\forall x \geq B, f(x) =_{x \geq B} |f(x)| \geq_{x \geq A} M$. Et ce pour tout $M > 0$, donc f diverge vers $+\infty$.

Supposons que ce signe soit négatif. Alors $\forall x \geq B, -f(x) =_{x \geq B} |f(x)| \geq_{x \geq A} M$. Ainsi, $\forall x \geq B, f(x) \leq -M$ et ce pour tout $M > 0$, donc f diverge vers $-\infty$.

CQFD.

Indication pour l'exercice 10.10 :

Supposons que f tende vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Alors il existe un réel $A > 0$ tel que $\forall x \geq A, f(x) > f(0)$, et un réel $B < 0$ tel que $\forall x \leq B, f(x) > f(0)$. En particulier, $f(A) > f(0)$ et $f(B) > f(0)$. Soit c , un réel dans $]f(0), \min(f(A), f(B))$ (ce réel existe bien). Alors par le TVI, il existe un réel α tel que $0 \leq \alpha \leq A$ et $f(\alpha) = c$. De même, il existe un β tel que $B \leq \beta \leq 0$ et $f(\beta) = c$. J'ai donc $\alpha \neq \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta)$ donc f n'est pas injective.

Supposons que f tende vers un réel $l \geq 0$ en $\pm\infty$. Soit t un réel tel que $f(t) \neq l$. Sinon, f est constante, et donc non injective. Alors supposons que $f(t) > l$. Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$, il existe un réel $A > t$ tel que

$|f(x) - l| < \frac{f(t) - l}{2}$. En particulier, $f(t) > f(A)$ avec $A > t$. De même, il existe un réel $B < t$ tel que

$|f(x) - l| < \frac{f(t) - l}{2}$. En particulier, $f(t) > f(B)$ avec $t > B$. Soit c , un réel dans $] \max(f(A), f(B)), f(t)[$. Par le TVI, il existe un réel α tel que $f(\alpha) = c$ et $\alpha \in]B, t[$. De même, il existe un β tel que $f(\beta) = c$ et $\beta \in]t, A[$. En particulier, $\alpha \neq \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta)$. Donc f n'est pas injective.

Tous les autres cas sont traités en remarquant que f injective $\iff -f$ injective.

Indication pour l'exercice 10.11 :

1. On utilise le TVI en étudiant le signe de la dérivée de f_n .
2. OK pour x_1 et x_2 . Pour l'inégalité, on calcule $f_n(\sqrt{2/5}) = (2/5)^{n/2} \geq 0 = f_n(x_n)$. Par croissance de f_n , le résultat tombe.
3. Puisque $x \in]0, 1[$, $(f_n(x))_n$ est clairement décroissante. On calcule $f_n(x_{n+1})$ (Toujours!). On a $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + 5x_{n+1}^2 - 2 \geq x_{n+1}^{n+1} + 5x_{n+1}^2 - 2 = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n)$. Par croissance de f_n , on a la croissance de $(x_n)_n$.
4. Croissante majorée donc convergente. Soit l la limite. Puisque $0 = x_n^n + 5x_n^2 - 2$, et que x_n vit dans $[0, \sqrt{2/5}]$, alors x_n^n tend vers 0. Donc par passage à la limite, on a $0 = 5l^2 - 2$. Donc $l = \sqrt{2/5}$.

Indication pour l'exercice 10.12 :

Par hypothèse, f est surjective. Soit x, y deux réels de $[0, 1]$. Il existe alors deux naturels p, q non nuls tels que $f^p(x) = x$, $f^q(y) = y$. Ainsi, $f(x) = f(y) \implies f^{pq}(x) = f^{qp}(y)$. Or, une récurrence immédiate montre que $f^{pq}(x) = f^{(q-1)p}(f^p(x)) = f^{(q-1)p}(x) \dots = f^p(x) = x$. Idem pour $f^{qp}(y)$, donc $x = y$. Ainsi, f est injective, donc bijective. Puisque f est continue, f est directement strictement monotone. Supposons strictement croissante (on pourra remplacer par $-f$). Soit $x \in [0, 1]$. Supposons que $f(f(x)) \neq x$. Alors on peut supposer $f(f(x)) > x$ par exemple. Par hypothèse, il existe un rang n tel que $f^n(x) = x$. Si $n = 2k$ pour $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $x = f^{2k}(x) > f^2(x) > x$, donc $x > x$ ce qui n'est pas. Si $n = 2k + 1$, $x = f^n(x) = f^{2k+1}(x) > f(x)$. Donc $x > f(x)$ et $f(x) > f^2(x) > x$. Donc $x > f(x)$ et $f(x) > x$. Absurde.

Supposons que $f(f(x)) < x$. Par hypothèse, il existe un rang n tel que $f^n(x) = x$. Si $n = 2k$ pour $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on a successivement $f^3(x) < f(x)$, donc $f^4(x) < f^2(x) < x$, etc., jusqu'à $f^{2k}(x) = x < x$, ce qui est absurde.

Si $n = 2k + 1$, on a toujours $x = f^n(x) = f^{2k+1}(x) < f(x)$. Donc $f(x) < f^2(x) < x$, donc $f(x) < x$ et $x < f(x)$. Absurde.

Ainsi, pour tout x dans $[0, 1]$, $f(f(x)) = x$.

Indication pour l'exercice 10.13 :

1. $x \mapsto x \sin(x)$ convient.
2. Supposons que f converge en $+\infty$. Supposons que la limite est $+\infty$. Soit $M \geq 0$. Il existe alors un réel $A \geq 0$ tel que $\forall x \geq A, f(x) \geq M$. Donc f est minorée sur $[A, +\infty[$ et sur $[0, A]$ par le théorème des bornes atteintes. Ainsi, f est minorée sur $\mathbb{R}^+$, disons par y . Alors pour tout $z < y$, je ne peux trouver de x dans $\mathbb{R}^+$ tel que $f(x) = z$. Donc f n'est pas surjective. On conclut par contraposée.
Supposons maintenant que la limite est réelle. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $A \geq 0$ tel que $f(x) \in l \pm \varepsilon$. De fait, f est minorée sur $[A, +\infty[$ et sur $[0, A]$ par le théorème des bornes atteintes. On conclut de même.
3. Soit $y \in \mathbb{R}$. Supposons que $f^{-1}(\{y\})$ soit de cardinal fini. Soit donc x_m , le plus grand réel tel que $f(x_m) = y$. Puisque $[0, x_m]$ est un segment, le théorème des bornes atteintes s'applique. Soit donc m, M , le sup et l'inf respectivement de f sur $[0, x_m]$. Alors par surjectivité de f , il existe a, b deux réels tel que $f(a) = m - 1$ et $f(b) = M + 1$. Il est clair que $a, b > x_m$ et que $y \in [f(a), f(b)]$. Supposons que a soit le plus petit (quitte à les renommer, je peux). Alors le théorème des valeurs intermédiaires nous

assure l'existence d'un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = y$. Puisque $c \in [a, b]$, il tombe que $c > x_m$. Mais puisque $f(c) = f(x_m) = y$, par maximalité, $x_m \geq c$. Absurde. Donc $f^{-1}(\{y\})$ est de cardinal infini, et ce pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Chapitre 11

Groupe, anneaux, corps

11.1 Exercices

Dans toute la suite, pour G , un groupe, on dira soit $P \subset S$, pour fixer une partie P de G vu en tant qu'ensemble, et $H < G$, pour fixer H , un sous-groupe de G .

11.1.1 Groupes

Exercice 11.1. [Classique]

1. Soit G , un groupe tel que $\forall g \in G, g^2 = 1$. Montrer que G est abélien.
2. (A faire après avoir vu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, en MP par exemple). Montrer que si G est de cardinal fini, alors il existe un entier n tel que $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Exercice 11.2. [Lagrange]

Soit G , un groupe. On souhaite montrer le théorème de Lagrange : $\forall H < G, \#H \mid \#G$. (Ce théorème n'est pas au programme : une version faible et au programme sera vu en MP). Soit donc H , un sous-groupe de G .

1. On définit la relation $\sim$ de sorte que $\forall x, y \in G, x \sim y \iff \exists h \in H, x = yh$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. En notant q , le nombre de classes d'équivalences, montrer que $\#G = q\#H$. On pourra déterminer le nombre d'éléments dans chaque classe.

Exercice 11.3. [Sous-groupes]

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

1. Montrer que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe abélien.
2. Montrer qu'il existe $\zeta \in \mathbb{U}_n$ tel que $\langle \zeta \rangle = \mathbb{U}_n$.
3. Caractériser simplement les ζ tel que $\langle \zeta \rangle = \mathbb{U}_n$.
4. Montrer que pour tout $d \mid n$, il existe un unique sous-groupe de $\mathbb{U}_n$ de cardinal d . On pourra utiliser Lagrange.

Exercice 11.4. [Sous-groupes distingués : partie 1]

Soit G , un groupe et $H < G$. On dit que H est distingué dans G (ou H est un sous-groupe distingué de G) lorsque $\forall g \in G, \forall h \in H, ghg^{-1} \in H$. On note alors $H \triangleleft G$.

1. Montrer que si $H \triangleleft G$ et $H' \triangleleft G$, alors $H \cap H' \triangleleft G$.
2. Montrer que si G est abélien, $H < G \iff H \triangleleft G$.
3. On note $Z := \{g \in G : \forall x \in G, gx = xg\}$, dit le centre du groupe. Montrer que $Z \triangleleft G$.

Exercice 11.5. [Sous-groupes distingués : partie 2]

Soit G, G' , deux groupes, et $f : G \rightarrow G'$, un morphisme de groupe.

1. Montrer que $H \triangleleft G \implies f(H) \triangleleft f(G)$.
2. Montrer que si $H' \triangleleft G'$, alors $f^{-1}(H') \triangleleft G$. Que dire donc du noyau de f ?

Exercice 11.6. [Sous-groupes caractéristique]

Soit G , un groupe et $H < G$. On dit que H est un sous-groupe caractéristique de G lorsque $\forall \varphi \in \text{Aut}(G), \varphi(H) \subset H$.

1. Montrer que cette condition est équivalente à $\forall \varphi \in \text{Aut}(G), \varphi(H) = H$.
2. Montrer que si H est sous-groupe caractéristique de G , alors il est distingué dans G .
3. Montrer que le centre du groupe est caractéristique de G .
4. Montrer que la relation "est sous-groupe caractéristique de" est transitive (on montrera ultérieurement que ce n'est pas le cas pour la relation "est distingué dans").

Exercice 11.7. [Groupe explicite]

Soit G , l'ensemble des applications $f_i : \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0, 1\}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tels que

$$f_0(x) = x, f_1(x) = \frac{1}{1-x}, f_2(x) = \frac{x-1}{x}, f_3 = \frac{1}{x}, f_4(x) = \frac{x}{x-1}, f_5(x) = 1-x.$$

1. Dresser la table de G pour la composition. En déduire que $(G, \circ)$ est un groupe.
2. Déterminer les sous-groupes de cardinal 2 et 3.
3. Lemme préliminaire : montrer que tout groupe de cardinal 4 admet soit 2 éléments d'ordre 2, soit un seul.
4. Déterminer les sous-groupes de cardinal 4.

11.1.2 Groupe symétrique**Exercice 11.8.** [Type]

Soit $1 \leq k \leq n$, deux entiers et $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k)$, un k -cycle et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

1. Rappeler le calcul de $\sigma(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k)\sigma^{-1}$.
2. Quel est l'ordre d'un k -cycle ?
3. Montrer que les k -cycles sont tous conjugués dans $\mathfrak{S}_n$ (cela signifie que si l'on prend deux k -cycles s, s' , il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $s = \sigma s' \sigma^{-1}$).
4. Notons γ_i , les cycles à supports 2 à 2 disjoints qui composent σ , $1 \leq i \leq r$. On note d_i , l'ordre des γ_i . Montrer que l'on peut supposer sans perte de généralités que $d_i \leq d_{i+1}$. On définit alors le *type* de σ le r -uplet $(d_1, \dots, d_r)$.
5. Montrer que deux permutations sont conjugués si, et seulement si, elles ont le même type.

Exercice 11.9. [Partie génératrice]

Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(i \ i+1)_{1 \leq i \leq n-1}$.
2. Montrer que si l'on omet une de ces transpositions, on perd ce caractère générateur.
3. Mêmes questions pour les transpositions $(1 \ i)_{2 \leq i \leq n}$.
4. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par $(1 \ 2)$ et $c := (1 \ \dots \ n)$.

Exercice 11.10. [Itérés d'une permutation]

Soit $n \geq 2$.

1. Déterminer l'ordre du produit $s_1 s_2$ en fonction de l'ordre de s_1 et de s_2 pour $s_1, s_2 \in \mathfrak{S}_n$.
2. Généraliser pour un nombre quelconque de permutation avec des supports deux-à-deux disjoints.

3. Application : on note

$$s := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 1 & 5 & 4 & 6 & 10 & 3 & 8 & 9 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $\varepsilon(s)$, puis s^{2023} .

Exercice 11.11. [Conjugaison]

On pose

$$s := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 7 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} ; s' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 4 & 7 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer leurs signature, puis montrer que σ et σ' sont conjugués. Donner explicitement un $g \in \mathfrak{S}_9$ tel que $s' = gsg^{-1}$.

Exercice 11.12. [Conjugaison 2]

On pose

$$s := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 6 & 2 & 7 & 1 & 3 & 5 & 10 & 9 & 8 & 11 \end{pmatrix} ; s' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 2 & 10 & 8 & 11 & 7 & 3 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'ordre de $s_1, s_2, s_1 s_2$.
2. Même question pour la signature.
3. Calculer s^{2023} et s'^{2023} .
4. Les permutations s_1, s_2 sont-elles conjugués dans $\mathfrak{S}_{11}$? Et dans $\mathfrak{A}_{11}$?

Exercice 11.13. [Groupe de Klein]

On cherche à montrer que la relation "est distingué dans" n'est pas transitive.

1. Montrer que $\langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$ est distingué dans $\mathfrak{A}_4$.
2. Montrer que $\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle$ est distingué dans $\langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$.
3. Montrer que $\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle$ n'est pas distingué dans $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 11.14. [Ordre maximal]

Quel est l'ordre maximal d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$? On pourra déterminer l'ordre de $\mathfrak{S}_i$ pour $i = 3, 4, 5$.

11.1.3 Anneaux et corps

Dans toute la suite, les anneaux considérés seront unitaires, les corps considérés seront commutatifs. (Je parlerai de corps gauche, ou d'anneau à division pour un corps non commutatif.)

On rappelle la définition d'un idéal d'un anneau. Soit $(A, +, \times)$ un anneau (pas forcément commutatif). On dit que I est un idéal à gauche (resp. à droite) de A si $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ et que $\forall x \in I, \forall a \in A, ax \in I$ (resp. $xa \in I$). Dans le cadre d'un anneau commutatif, il n'y a donc pas de distinctions entre droite ou gauche. *Il est peu probable de faire des idéaux dans un anneau non commutatif pour les concours.*

Exercice 11.15. [Idéaux d'un corps]

Soit $(A, +, \times)$, un anneau commutatif. Montrer que A est un corps si ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et A (dit idéaux triviaux de A).

Exercice 11.16. [Calcul d'idéaux]

Soit $(A, +, \times)$, un anneau commutatif. Soit I, J , deux idéaux de A . On définit $I + J := \{i + j : i \in I, j \in J\}$ et $IJ := \{\sum_{k=1}^n i_k j_k : n \in \mathbb{N}^*, i_k \in I, j_k \in J\}$.

1. Montrer que $I + J$ et IJ sont des idéaux de A .
2. Montrer que $IJ \subset I \cap J$.
3. Montrer que $(I + J)(I \cap J) \subset IJ$.

Exercice 11.17. [Radical d'un idéal]

Soit $(A, +, \times)$, un anneau commutatif. Pour tout idéal I de A , on définit le radical de I par $\sqrt{I} := \{x \in A : \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}$.

1. Montrer que pour tout idéal I de A , $\sqrt{I}$ est aussi un idéal de A .
2. Soit I, J , deux idéaux de A , $p \geq 1$. Montrer que

$$\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}.$$

3. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ et $\sqrt{\underbrace{I \times I \times \cdots \times I}_p \text{ fois}}} = \sqrt{I}$.

Exercice 11.18. [Idéal premier, idéal maximal]

Soit $(A, +, \times)$, un anneau commutatif. On dit que I est un idéal premier si $xy \in I \iff x \in I$ ou $y \in I$. On dit que I est maximal si, pour tout J idéal de A tel que $I \subset J$, alors $J = I$ ou $J = A$.

1. Soit I , un idéal de A et $u \in A \setminus I$. Soit J , un idéal qui contient tout I et u . Montrer que $J = \{a \in A : \exists x \in I, \exists y \in A, a = x + uy\}$.
2. En déduire qu'un idéal maximal est premier.
3. Montrer que si tous les idéaux de A sont premiers, alors A est un corps. (On pourra montrer que A est intègre). En déduire l'exercice 11.15.
4. Montrer que si tous les idéaux de A sont générés par un seul élément, alors tout idéal premier non nul est maximal.

Exercice 11.19. [Morphisme de corps]

Montrer qu'un morphisme de corps est injectif.

Exercice 11.20. [Anneau intègre fini]

Montrer qu'un anneau intègre fini est un corps.

Exercice 11.21. Soit $(A, +, *)$ un anneau. On dit que $a \in A$ est nilpotent lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $a^n = 0_A$. On suppose que dans cet anneau, l'inversibilité à droite équivaut à l'inversibilité à gauche (comme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

1. On suppose que a est nilpotente. Montrer que $1_A - a \in A^\times$ et calculer son inverse.
2. On suppose que $a * b$ est nilpotente. Montrer que $1_A - b * a \in A^\times$ et exprimer $(1_A - b * a)^{-1}$ à l'aide de $(1_A - a * b)^{-1}$.
3. Montrer qu'on a le même résultat que la question précédente en remplaçant « $a * b$ est nilpotente » par « $1_A - a * b$ est inversible ».

11.2 Eléments de corrections

Indication pour l'exercice 11.1 :

1. Soit $x, y \in G$. Remarquons que $x^2 = 1$ donc $x^{-1}x^2 = x^{-1}$, et en simplifiant à gauche, on a $x = x^{-1}$. Ceci étant vrai pour tout $x \in G$, on a alors $xyxy = 1$ donc $x^{-1}xyxy^{-1} = x^{-1}y^{-1} = xy$. En simplifiant à gauche, on a $yx = xy$ donc G est abélien.
2. Puisque G est fini, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\#G = n$. J'ai donc $\{n \in \mathbb{N} : \exists S \subset G, \#S = n \wedge \langle S \rangle = G\}$ qui est non vide. J'ai donc un plus petit élément n_0 , et donc une partie S_0 de G tel que $\langle S_0 \rangle = G$. Mettons que S s'écrive $\{g_1, \dots, g_{n_0}\}$. G étant abélien, G s'écrit donc simplement

$$G = \left\{ \prod_{i=1}^{n_0} g_i^{\varepsilon_i} : \varepsilon_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A priori, les ε_i vivent dans $\mathbb{Z}$, mais en fait, en faisant la division euclidienne de tous les ε_i par 2, (je note q_i, r_i , le couple associé, on a

$$\prod_{i=1}^{n_0} g_i^{\varepsilon_i} = \prod_{i=1}^{n_0} g_i^{2q_i + r_i} = \prod_{i=1}^{n_0} \underbrace{(g_i^2)^{q_i}}_{=1} g_i^{r_i} = \prod_{i=1}^{n_0} g_i^{r_i}.$$

Ne pas oublier que $\forall g \in G, g^2 = 1$.

On pose alors $f : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n_0} \rightarrow G, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_0}) \mapsto \prod_{i=1}^{n_0} g_i^{\varepsilon_i}$. f est clairement un morphisme surjectif. L'injectivité est claire : en effet, supposons que j'ai un vecteur $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_0})$ non nul, tel que $f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_0}) = 1$. Alors, sans perte de généralité, on peut supposer que $\varepsilon_1 = 1$. J'ai donc $g_1 = \prod_{i=2}^{n_0} g_i^{\varepsilon_i}$, donc $g_1 \in \langle (g_2, \dots, g_{n_0}) \rangle$ donc $\langle (g_2, \dots, g_{n_0}) \rangle = G$. J'ai une partie génératrice de cardinal inférieur au cardinal de S . Absurde.

Donc f est un morphisme surjectif et injectif. C'est donc un isomorphisme, ce qui conclut.

Indication pour l'exercice ?? :

1. On montre facilement que $\langle \{2\} \rangle = 2\mathbb{Z}$, $\langle \{2, 3\} \rangle = \mathbb{Z}$ par Bézout, et $\langle \{2, 4\} \rangle = 2\mathbb{Z}$ car $4 = 2 + 2$.
2. K est clairement un groupe, qui contient S , donc contient $\langle S \rangle$. Maintenant, soit H , un groupe qui contient S . Alors H contient K . En particulier, pour $H = \langle S \rangle$. Donc $K = \langle S \rangle$.

Indication pour l'exercice 11.3 :

1. $\mathbb{U}_n = \langle e^{2i\pi/n} \rangle$. Donc c'est un groupe abélien automatiquement. (On dit qu'il est cyclique).
2. Eh bien on prend $\zeta = e^{2i\pi/n}$.
3. Ce sont les racines primitives de l'unité : $\langle \zeta \rangle = \mathbb{U}_n \iff \zeta = e^{2ik\pi/n}, k \wedge n = 1$.
4. Un corollaire du théorème de Lagrange nous permet en fait de dire que $\forall x \in G, x^{\#G} = 1$. (Pour G , un groupe multiplicatif). (Preuve : soit d , l'ordre de x . Alors $\langle x \rangle$ est de cardinal d , et est un sous-groupe de G . Par Lagrange, $d \mid \#G$. Puisque $x^d = 1$, naturellement, $x^{\#G} = 1$).
Reprenons l'énoncé. Remarquons que $\langle e^{2ikd\pi/n} \rangle$ est de cardinal d . Il s'agit de montrer que c'est le seul. Soit H , un sous-groupe de $\mathbb{U}_n$ de cardinal d . Alors $\forall x \in H, x^d = 1$ par le corollaire ci-dessus. Il suffit alors de remarquer que tous les éléments tel qu'élevé à la puissance d donne 1 se trouve dans $\langle e^{2ikd\pi/n} \rangle$. Donc $H \subset \langle e^{2ikd\pi/n} \rangle \subset H$, donc égal à H par cardinalité.

Indication pour l'exercice 11.4 :

1. Clair.
2. Puisque G est abélien, $ghg^{-1} = h$. Donc c'est clair.
3. Evidemment, dans le centre, h commute avec g donc $ghg^{-1} = g(hg^{-1}) = g(g^{-1}h) = gg^{-1}h = h$. Donc c'est clair.

Indication pour l'exercice 11.5 :

1. Soit $x \in f(H), y \in f(G)$. Il existe alors $h \in H$ tel que $x = f(h)$, et il existe $g \in G$ tel que $y = f(g)$. Alors $ghg^{-1} \in H$ car $H \triangleleft G$. De fait, il existe un $h' \in H$ tel que $ghg^{-1} = h'$. Mais $f(h') = f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1})$ car f est un morphisme de groupe. On a donc $f(h') = yxy^{-1}$ donc $yxy^{-1} \in f(H)$. Ainsi $f(H) \triangleleft f(G)$.
2. Même acabit. Pour le noyau, on remarque que $\ker(f) = f^{-1}(0_G)$ et $\{0_G\}$ est distingué dans G naturellement.

Indication pour l'exercice 11.6 :

1. Si $\forall \varphi \in \text{Aut}(G), \varphi(H) \subset H$, alors $\forall \varphi \in \text{Aut}(G), H \subset \varphi^{-1}(H)$, ce qui est possible puisque φ est un automorphisme. Mais alors, en réalité, $\forall \varphi \in \text{Aut}(G), \varphi(H) \subset H$ et $H \subset \varphi(H)$. D'où le résultat.
2. Soit $g \in G$. Alors $\varphi : h \mapsto ghg^{-1}$ est un automorphisme de G . De fait, $\forall h \in H, \varphi(h) \in H$, donc $ghg^{-1} \in H$. Et ce, pour tout g dans G , d'où le résultat.
3. Aussi facile que pour le caractère distingué.
4. La composée d'automorphisme reste un automorphisme.

Indication pour l'exercice 11.7 :

- 1.

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	f_0	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_5	f_1	f_0	f_2
f_5	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0

Vérifier toutes les lois pour montrer que c'est un groupe.

2. Un groupe de cardinal 2, c'est un groupe qui contient un élément et son inverse. Or, le neutre est forcément dans ce groupe. Donc on cherche un élément qui est l'inverse de lui-même (autrement dit, un élément tel qu'élevé au carré fasse le neutre (qui est f_0)). On les voit sur la diagonale. Ce sont les f_3, f_4, f_5 . Donc les groupes cherchés sont les $\{f_0, f_i\}$, avec $i = 3, 4$ ou 5 .
De cardinal 3, c'est le même raisonnement : il faut trouver un élément d'ordre 3. Seul f_1 convient.
3. Il faut du Lagrange je pense, je vais la laisser de côté.
4. Je n'ai pas d'élément d'ordre 4. Les éléments d'ordre 2 sont f_3, f_4 et f_5 , mais le produit entre deux d'entre eux ne donne jamais l'autre. De fait, $\{f_0, f_3, f_4, f_5\}$ ne forment pas un groupe. Il n'y a donc pas de sous-groupe de cardinal 4.

Indication pour l'exercice 11.8 :

1. $(\sigma(a_1) \sigma(a_2) \cdots \sigma(a_k))$.
2. Son ordre est k .
3. Soit $(a_1 a_2 \cdots a_k), (b_1 b_2 \cdots b_k)$, deux k -cycles. Soit σ , une permutation de $\mathfrak{S}_n$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \sigma(a_i) = b_i$. Alors $\sigma(a_1 a_2 \cdots a_k)\sigma^{-1} = (b_1 b_2 \cdots b_k)$.
4. Support disjoints, donc ils commutent, donc je peux mettre les plus petits cycles au début, les plus grands à la fin.
5. $\Rightarrow$ Soit $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, conjuguées. Soit donc un $g \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma' = g\sigma g^{-1}$. En décomposant σ en $c_1 \circ c_2 \circ \cdots \circ c_r$ en produit de cycles à support disjoints, on a $\sigma' = (gc_1g^{-1})(gc_2g^{-1}) \cdots (gc_rg^{-1})$ car les c_i commutent. Il suffit alors de remarquer que les $gc_i g^{-1}$ sont de même longueur que les c_i car g est une bijection, et que les supports restent deux-à-deux disjoints car g est une bijection. Fixons donc un i . Notons $c_i = (a_1 a_2 \cdots a_k)$. Alors $c'_i := gc_i g^{-1} = (g(a_1) g(a_2) \cdots g(a_k))$. S'il existe un rang p tel que $(c'_i)^p(g(a_i)) = g(a_i)$, alors puisque $(c'_i)^p(g(a_i)) = gc_i^p(a_i)$, on a $gc_i^p(a_i) = g(a_i)$. En composant par la gauche par g^{-1} , j'ai donc $c_i^p(a_i) = a_i$, donc $p = k$. Ainsi, c'_i est un k -cycle.
Un raisonnement du même acabit conclut aussi pour le support. σ et σ' ont donc le même type.
 $\Leftarrow$ Soit $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, de même type. Alors σ et σ' se décomposent en cycles à support disjoint : $\sigma = c_1 \circ \cdots \circ c_r$ et $\sigma' = c'_1 \circ \cdots \circ c'_r$. Oui, c'est le même r . On peut supposer, quitte à commuter, que c_i et c'_i ont le même ordre. On prend un g construit comme à la question 3 pour conclure. On construit ainsi un g qui est défini sur tout les éléments sur lequel σ agit, ce qui conclut.

Indication pour l'exercice 11.9 :

1. Notons G , le groupe engendré par les permutations $(i \ i+1)$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Il faut montrer que $G = \mathfrak{S}_n$. Pour cela, soit $(x \ y)$, une permutation quelconque. Il suffit de montrer que $(x \ y) \in G$. On peut supposer que $x < y$. Il s'agit alors de faire une récurrence sur la quantité $y - x$. Si $y - x = 1$, c'est vrai puisque $y = x + 1$ et $(x \ x+1) \in G$. En notant $(x \ y+1) = (y \ y+1)(x \ y)(y \ y+1)$, on a le résultat par récurrence.
2. Disons que celle que l'on a enlevé est $(j \ j+1)$ pour $1 \leq j \leq n-1$. On note H , le groupe engendré par S , l'ensemble des $(i \ i+1)$ sans le $(j \ j+1)$. Notons alors $I = \llbracket 1, j \rrbracket$ avec $I = \llbracket 2, n \rrbracket$ si $j = n$. Alors $\forall \sigma \in S, \sigma(I) \subset I$.
De plus, $\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n, \sigma(I) \subset I, \tau(I) \subset I \implies (\sigma \circ \tau)(I) \subset I$. On a alors $\forall h \in H, h(I) \subset I$. Or $(j \ j+1)$ ne satisfait pas cette propriété. Donc H ne contient pas $(j \ j+1)$. Et en particulier, $H \neq \mathfrak{S}_n$. CQFD.
3. On remarque que $\forall 2 \leq i \leq n-1, (1 \ i)(1 \ i+1)(1 \ i) = (i \ i+1)$, donc le sous-groupe engendré par les $(1 \ i)$ engendrent les $(i \ i+1)$ qui engendrent $\mathfrak{S}_n$.
Soit $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Mettons que l'on aie enlevé $(1 \ j)$. Soit S , l'ensemble des $(1 \ i)$ ôté de $(1 \ j)$. Alors $\forall \sigma \in S, s(j) = j$, et donc $\forall \sigma \in \langle S \rangle, s(j) = j$. Donc $(1 \ j) \notin \langle S \rangle$ donc $\langle S \rangle \neq \mathfrak{S}_n$.
4. Il suffit de remarquer que $\forall 1 \leq k \leq n-1, c^k(1 \ 2)c^{-k} = (k \ k+1)$.

Indication pour l'exercice 11.10 :

1. C'est le ppcm des ordres.
2. ...
3. On décompose en produit de cycles à support disjoint. Puis prendre le ppcm des ordres. (c'est le ppcm du type : c.f. exercice ??).

Indication pour l'exercice 11.11 :

C'est une application du 11.8, question 3.

Indication pour l'exercice 11.12 :

Idem. Petite subtilité pour la conjugaison dans $\mathfrak{A}_n$. Elles sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ (facile à montrer). Notons g , une permutation qui convient. Si g est dans $\mathfrak{A}_n$, c'est gagné. Sinon, soit $\tau = (9\ 11)$. τ bouge des éléments fixés par σ et σ' . De fait, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$. Ainsi, $g \circ \tau$ est de signature 1 et convient pour la conjugaison.

Indication pour l'exercice 11.13 :

Il suffit de calculer tous les sous-groupes et de tout calculer à la main. (tout tester).

Indication pour l'exercice 11.14 :

On note $g(n)$, cet ordre. Alors

$$g(n) = \max \left\{ \text{ppcm}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) : r \in \mathbb{N}^*, 0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_r, \sum_{i=1}^r \lambda_i = n \right\}.$$

Pour la preuve, on décompose en cycle à supports disjoints, et on sait que l'ordre est le ppcm des longueurs des cycles. Il suffit de savoir que pour obtenir un cycle, on fait une partition additive de n . (décomposer en somme la quantité n : par exemple, $5 = 4 + 1 = 3 + 1 + 1 = 3 + 2 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$).

Landau a montré que $\ln(g(n)) \sim \sqrt{n \ln(n)}$ quand $n \rightarrow \infty$.

Indication pour l'exercice 11.15 :

Soit $x \neq 0$. Alors $xA := \{xa : a \in A\}$ est un idéal de A . Il n'est pas nul car il contient x donc par hypothèse, $xA = A$. $1 \in xA$, c'est-à-dire qu'il existe un élément $a \in A$ tel que $1 = xa$. Alors x est inversible. Ainsi, tout élément non nul est inversible donc A est un corps.

Indication pour l'exercice 11.16 :

- On sait déjà que $I_1 \cap I_2$ est un sous-groupe de $(A, +)$. Soit $a \in A$. Soit $x \in I_1 \cap I_2$. Alors $x \in I_1$ donc $ax \in I_1$ car I_1 est un idéal de A . De même, $x \in I_2$ donc $ax \in I_2$. Ainsi, $ax \in I_1 \cap I_2$. Donc $I_1 \cap I_2$ est bien un idéal.
Puisque $0_A = 0_A + 0_A$ et I_1, I_2 sont deux idéaux de A , alors $0_A \in I_1 + I_2$. Donc $I_1 \cap I_2$ est bien un idéal de A .

Soit $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2 \in I_1 + I_2$, avec $x_1, y_1 \in I_1, x_2, y_2 \in I_2$. Alors $x + y = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \in I_1 + I_2$.

Soit $a \in A$. Alors $ax = ax_1 + ax_2 \in I_1 + I_2$ car I_1 et I_2 sont des idéaux de A . Donc $I_1 + I_2$ est bien un idéal de A .

- Soit $x = \sum_{k=1}^n x_k y_k$, un élément de IJ . Pour chaque k , $x_k y_k \in I$ car $y_k \in A$. Donc la somme des $x_k y_k$ est dans I donc $x \in I$. Par symétrie, $x \in J$. D'où l'inclusion.

3. Soit $x = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ avec $x_k \in I + J$ et $y_k \in I \cap J$. Il suffit donc de prouver que $x_k y_k \in IJ$. En écrivant $x_k = i_k + j_k$ avec $i_k \in I, j_k \in J$, on a $x_k y_k = i_k y_k + j_k y_k \in IJ$. CQFD.

Indication pour l'exercice 11.17 :

1. Si $x^n \in I$, alors $\forall k \geq n, x^k = x^{k-n} x^n \in I$. Cela va nous servir.
Montrons que $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$. Clairement, 0 est dedans. Si $x \in I, (-x)^n = (-1)^n x^n \in I$ donc $-x \in \sqrt{I}$. Si $x, y \in \sqrt{I}$, soit p, q tel que $x^p \in I, y^q \in I$. Alors $(x+y)^{p+q} = \sum_{k=1}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k y^{p+q-k} = \sum_{k=1}^p \binom{p+q}{k} x^k y^{p+q-k} + \sum_{k=p+1}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k y^{p+q-k}$. Si $k \leq p$, alors $p+q-k \geq q$ donc $y^{p+q-k} \in I$. Donc la première somme est dans I . Argument du même style pour la deuxième somme.
Puisque $(ax)^n = a^n x^n$, on a la stabilité par multiplication externe, d'où le résultat.
2. On raisonne par inclusion successives. Il suffit d'utiliser le fait que $IJ \subset I \cap J$ pour la première, les deux suivantes étant immédiates.
3. $I \subset \sqrt{I}$ donc $\sqrt{I} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$. Soit $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$. Soit p tel que $x^p \in \sqrt{I}$. Il existe alors un q tel que $(x^p)^q \in I$ donc $x^{pq} \in I$. Donc $x \in \sqrt{I}$. On raisonne de même pour $\sqrt{I^p} = \sqrt{I}$.

Indication pour l'exercice 11.18 :

A faire plutôt en MP.

Indication pour l'exercice 11.19 :

Soit $f : K \rightarrow L$ un morphisme de corps (morphisme d'anneaux, avec K, L , deux corps). Soit $x \in K^\times = K \setminus \{0\}$. Alors $f(xx^{-1}) = f(1_K)$. f étant un morphisme d'anneaux, $f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1})$ et $f(1_K) = 1_L$. De fait $f(x)$ est inversible. De fait, si $f(x) = 0$, f n'est pas inversible, donc $x \notin K \setminus \{0\}$. Mais $x \in K$. Donc $x = 0_K$. Ainsi, $\ker(f) = \{0_K\}$ donc f est injective.

Indication pour l'exercice 11.20 :

Soit $a \neq 0$ et $f : x \in A \mapsto ax \in A$, définie ainsi, est un morphisme de groupe (l'anneau A étant vu comme $(A, +)$). ATTENTION : ce n'est pas un morphisme d'anneaux ! (exercice)). f est injective car A est intègre, et surjectif par cardinalité A étant fini. Donc f est bijective, donc 1 admet un antécédent par f , disons b . Alors $f(b) = 1$ donc $ab = 1$. a est donc inversible. Ainsi, A est un corps.

Chapitre 12

Dérivabilité

12.1 Exercices

Exercice 12.1. [$\mathcal{D}^1$ v.s. $\mathcal{C}^1$]

Est-ce que $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Exercice 12.2.

Soit P , un polynôme réel. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions.

Exercice 12.3.

Soit $f : x \mapsto e^{-1/x} \mathbb{1}_{x>0}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 12.4. [Darboux]

Soit I , un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$. Montrer que $f'(I) \subset I$.

Exercice 12.5. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$.

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 12.6. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ dérivable sur $[a, b]$ vérifiant $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq k$ avec $k \in [0, 1[$.

1. Rappeler pourquoi f admet un point fixe.
2. Montrer l'unicité du point fixe.
3. Soit $u_0 \in [a, b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Que dire de la limite de u ?

12.2 Eléments de corrections

Indication pour l'exercice 12.1 :

Non. Prendre $x \mapsto \{x^2 \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0, 0 \text{ si } x = 0$. Alors f est continue, dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}^*$ et dérivable en 0 puisque $\frac{f(x) - 0}{x - 0}$ converge en 0. Mais la dérivée sur $\mathbb{R}^*$ ne converge pas en 0.

Indication pour l'exercice 12.2 :

Il s'agit d'appliquer le théorème de Rolle jusqu'à obtenir affirmation du style $e^x = 0$. (en dérivant des polynômes, on va finir par obtenir 0).

Indication pour l'exercice 12.3 :

Il s'agit de montrer par récurrence que la dérivée n -ième de f est une exponentielle contre un polynôme.

L'exponentielle, gagnant, va faire tendre f vers 0 dans x tend vers 0. La fonction est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{\pm*}$, donc le théorème de raccord itéré conclut.

Indication pour l'exercice 12.4 :

Une autre manière sera vu après avoir vu la formule de Taylor-Young. Par commodité, notons (a, b) l'intervalle $[a, b]$ ou $[b, a]$ (on évite les discussions du style "si $a \leq b$, alors $(a, b) = [a, b]$ ", etc. Introduisons deux fonctions

$$\begin{aligned} \varphi : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} & \psi : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} & x &\mapsto \begin{cases} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases} \end{aligned}$$

Fixons $y \in (f'(a), f'(b))$. φ est clairement continue sur $]a, b]$ et elle est continue en a . Elle est donc continue sur $[a, b]$, donc par le TVI, pour tout $y \in (\varphi(a), \varphi(b))$, il existe $c \in [a, b]$, $\varphi(c) = y$. De fait, on a

$$\left(f'(a), \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) =_{Oui} (\varphi(a), \varphi(b)) \subset_{TVI} \varphi([a, b]).$$

De même,

$$\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}, f'(b)\right) =_{Oui} (\psi(a), \psi(b)) \subset_{TVI} \psi([a, b]).$$

Ainsi, on a

$$(f'(a), f'(b)) \subset \left(\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}, f'(b)\right) \cup \left(f'(a), \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)\right) \subset (\varphi([a, b]) \cup \psi([a, b])).$$

Si $y \in \varphi([a, b])$, alors

- Ou bien $y = f'(a)$ et c'est gagné.
- Ou bien j'ai un $x \in]a, b]$ tel que $y = \varphi(x)$ et par le TAF ($\varphi(x)$ est un accroissement), il existe un c tel que $f'(c) = \varphi(x) = y$. CQFD.

Idem si $y \in \psi([a, b])$.

Correction de l'exercice 12.5 :

Si f est constante, c'est gagné. Supposons donc f non constante. Soit donc α un réel strictement positif tel que $f(\alpha) \neq f(0)$, quitte à remplacer par $-f$, supposons $f(\alpha) > f(0)$. Si α est extremum local, alors $f'(a) = 0$ par le cours. Sinon, soit a tel que $f(a) > f(\alpha)$ et soit A un réel tel que pour $x \geq A$ on ait $f(a) > f(x) > f(0)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel b dans $]a, A[$ (f est continue sur $[a, A]$) tel que $f(b) = f(a) \in [f(A), f(\alpha)]$. Par le théorème de Rolle sur $[a, b]$, il existe $c \in]a, b[\subset \mathbb{R}^+$ tel que $f'(c) = 0$.

Correction de l'exercice 12.6 :

1. Soit $g : x \in [a, b] \mapsto f(x) - x$. Alors $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, g étant continue sur $[a, b]$, il existe c dans $[a, b]$ tel que $g(c) = 0$ donc $f(c) = c$.
2. Soit c, c' deux points fixes. Par l'inégalité des accroissements finis, f étant continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$, $|f(c) - f(c')| \leq k|c - c'|$ mais alors $|c - c'| \leq k|c - c'|$ et $k \geq 1$. En contraposant, on a l'unicité voulue.
3. Encore par l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - c| = |f(u_n) - f(c)| \leq k|u_n - c| \leq_{Rec} k^{n+1}|u_0 - c|.$$

De fait, puisque $0 \leq k < 1$, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$.

Chapitre 13

Convexité

13.1 Exercices

Exercice 13.1.

Soit f , une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment, disons $[a, b]$. Montrer que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Exercice 13.2.

Soit f , une fonction convexe sur $\mathbb{R}^+$, croissante. Montrer que f est constante ou tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 13.3. [Inégalité pour le sin]

Montrer que $\forall x \in [0, \pi/2], 2x/\pi \leq \sin(x) \leq x$.

Exercice 13.4.

Soit $u_0 \in [0, 2]$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$. Après avoir réalisé un dessin pertinent, étudier la suite $(u_n)_n$.

Exercice 13.5.

Soit f , une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto xf(x)$ est convexe si, et seulement si, la fonction $x \mapsto f(1/x)$ l'est aussi.

Exercice 13.6.

Soit $f \in \mathcal{D}^1([0, 1], \mathbb{R})$, convexe sur $[0, 1]$. Montrer que

$$0 \leq \frac{f(0) + f(1)}{2} - \int_0^1 f \leq \frac{f'(1) - f'(0)}{8}.$$

Exercice 13.7.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.

Exercice 13.8. [Méthode de Newton]

Soit f , une fonction dérivable sur un intervalle I , de dérivée strictement positive sur I . On suppose que f est concave sur I . On suppose qu'il existe $a \in I, f(a) = 0$. On cherche à calculer a de manière algorithmique. On définit alors une suite :

$$u_0 \in I, u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

Pour se simplifier la vie, mais pas les enjeux, supposons $u_0 \leq a$.

1. Posons $g = x - f(x)/f'(x)$. Montrer que g est bien définie sur I .
2. Montrer que $\forall n, a \geq u_{n+1} \geq u_n$.
3. Conclure.

Exercice 13.9. [Young]

Soit p, q , deux réels supérieurs strictement à 1 et conjugués, c'est-à-dire que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer l'inégalité de Young :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}, ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Exercice 13.10. [Hölder/Minkowski]

Soit p, q , deux réels supérieurs strictement à 1 et conjugués. Soit $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)$ des réels positifs. Montrer l'inégalité de Hölder

$$\sum_{k=1}^n (a_k b_k) \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}.$$

En déduire l'inégalité de Minkowski : $\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}.$$

13.2 Éléments de corrections

Indication pour l'exercice 13.1 :

Le réel $(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$ représente l'aire d'un trapèze au-dessus de la courbe. Démontrons-le. Soit φ , la fonction affine telle que $\varphi(a) = f(a)$, $\varphi(b) = f(b)$. f étant convexe, $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq \varphi(x)$. En intégrant, on a l'inégalité de droite voulue.

Pour l'inégalité de gauche, le réel $(b-a)f(\frac{a+b}{2})$ représente l'aire du rectangle sous la courbe. Soit $\psi : x \mapsto f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x - \frac{a+b}{2})$. En intégrant, on obtient l'inégalité de gauche voulue.

Indication pour l'exercice 13.2 :

Supposons qu'elle n'est pas constante. Soit $\varphi : x \mapsto \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. Il existe un réel a tel que $f(a) \neq f(1)$ puisque f n'est pas constante. Puisque $\forall x > a$, $\varphi(x) \geq \varphi(a) > 0$, on a

$$\forall x > \max(a, 1), f(x) \geq f(1) + \varphi(a)(x - 1).$$

D'où la limite égale à $+\infty$.

Indication pour l'exercice 13.3 :

On considère la fonction $\sin$ sur $[0, \pi/2]$. Alors $\sin y$ est concave, donc en-dessous de sa tangente en 0 qui est $y = x$, et au-dessus de sa corde de 0 à $\pi/2$ qui est $y = 2x/\pi$.

Indication pour l'exercice 13.4 :

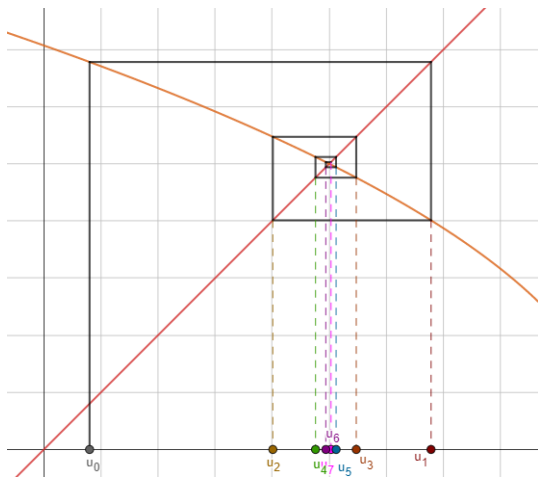


FIGURE 13.1 – Pour $u_0 < 1$

Puisque $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$ stabilise l'intervalle $[0, 2]$, la suite $(u_n)_n$ est bien définie par une récurrence immédiate. Puisque l'équation $f(x) = x$ n'a que deux solutions (qui sont 1 et -2), si la suite $(u_n)_n$ converge, l'égalité $f(u_n) = u_{n+1}$ passe à la limite, grâce à la continuité de f sur $[0, 2]$, en $f(l) = l$ donc $l = 1$. Donc si $(u_n)_n$ converge, elle va converger vers 1.

Il est aisé de montrer qu'à partir d'un certain rang (le deuxième certainement), la suite $(u_n)_n$ est majorée par $\sqrt{2}$. Puisque f est dérivable sur $[0, \sqrt{2}]$, j'ai $\forall x \in [0, \sqrt{2}]$, $|f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} =: k < 1$. Par le

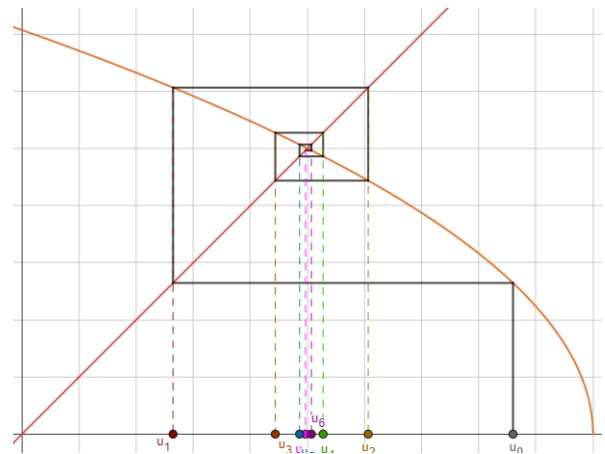


FIGURE 13.2 – Pour $u_0 > 1$

théorème des accroissements finis, on en déduit donc que

$$|f(u_n) - 1| \leq k|u_n - 1|,$$

car $f(1) = 1$. Ainsi, par une récurrence immédiate, on a $|u_n - 1| \leq k^n |u_0 - 1| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Indication pour l'exercice 13.5 :

On note $g : x \mapsto xf(x)$ et $h : x \mapsto f(1/x)$, définies sur $\mathbb{R}^{+*}$. Supposons g convexe. Soit $x, y > 0$ et $\lambda \in [0, 1]$. Calculons.

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)y) = f\left(\frac{1}{\lambda x + (1 - \lambda)y}\right) = (\lambda x + (1 - \lambda)y)g\left(\frac{1}{\lambda x + (1 - \lambda)y}\right).$$

Mais puisque $\left(\frac{1}{\lambda x + (1 - \lambda)y}\right) \in [1/a, 1/b]$, il existe un réel $\mu \in [0, 1]$ tel que

$$\frac{1}{\lambda x + (1 - \lambda)y} = \frac{\mu}{x} + \frac{1 - \mu}{y}.$$

Par la convexité de g , on a donc

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq (\lambda x + (1 - \lambda)y)(\mu g(1/x) + (1 - \mu)g(1/y)) = (\lambda x + (1 - \lambda)y) \left(\frac{\mu}{x} h(x) + \frac{1 - \mu}{y} h(y) \right).$$

Puisque μ s'écrit $\frac{\lambda x}{\lambda x + (1 - \lambda)y}$, on en déduit que

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y).$$

Donc h est convexe.

Réciproquement, supposons que h est convexe. Soit $u(x) = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$. La fonction $v : x \mapsto xu(x)$ vaut exactement h donc est convexe. Par la première implication, on en déduit que la fonction $w : x \mapsto u(1/x)$ est aussi convexe, mais cette dernière vaut exactement g .

Indication pour l'exercice 13.6 :

f étant convexe, elle est en-dessous de sa corde entre 0 et 1, donc l'aire sous la courbe de f entre 0 et 1 (l'intégrale) est inférieure à l'aire sous la corde (un trapèze). D'où la première inégalité.

Puisque f est dérivable, elle est en-dessous de ses tangentes, en particulier celles en 0 et en 1.

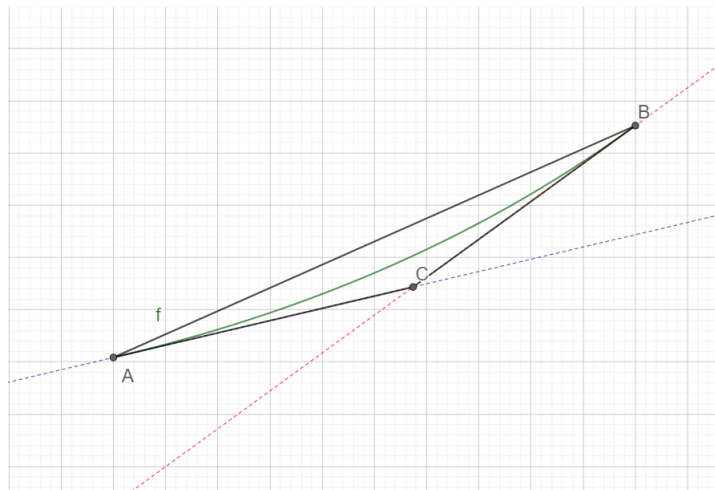


FIGURE 13.3 – La majoration

Le triangle ABC est formé par la corde $[AB]$, par C , point d'intersection entre les tangentes en 0 et en 1. Il est clair que l'aire entre la courbe et la corde est majorée par l'aire du triangle, qui n'est pas facile à calculer. On considère alors la fonction $g : t \mapsto f(t) - f(0) - f'(0)t$. Cherchons à calculer l'aire du triangle $A'B'C'$ ci-dessous

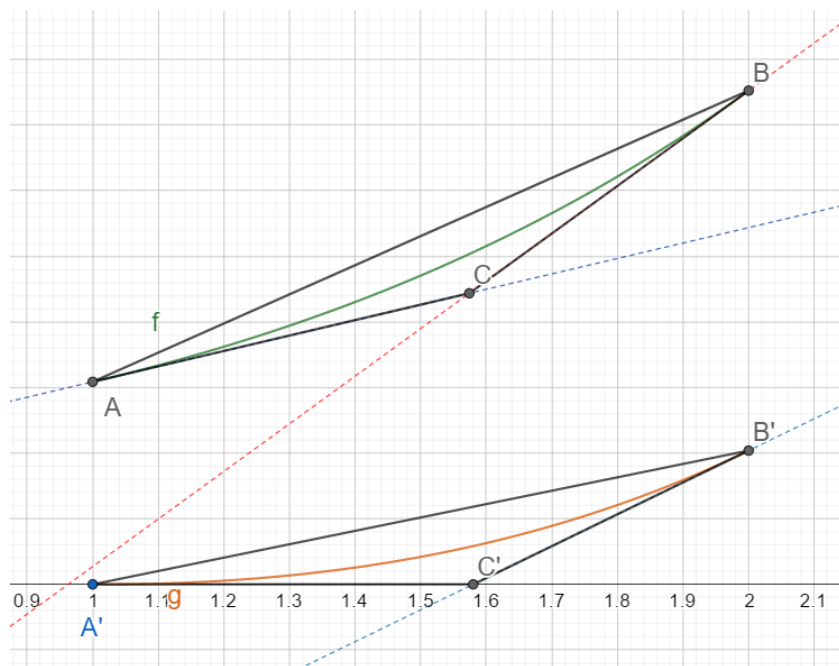


FIGURE 13.4 – La transformation avec g au niveau de l'axe des abscisses

$$\frac{A'C' \times y_{B'}}{2} = \frac{1}{2}A'C'(1 - A'C')f'(A) \leq \frac{1}{8}f'(1).$$

En repassant dans le monde initial, on obtient bien une majoration par $\frac{1}{8}(f'(1) - f'(0))$.

Indication pour l'exercice 13.7 :

On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n : (\forall (x, y) \in \mathbb{R}, \forall p \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket, f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y).$$

Pour $n = 1$, c'est immédiat. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n . Quitte à échanger x et y , on suppose $p \leq 2^n$. Alors

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{p}{2^{n+1}}\right)y\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^n}x + \frac{2^n - p}{2^n}y\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2^n y}{2^n}\right)\right) \\ &\stackrel{H_1}{\leq} \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{p}{2^n}x + \frac{2^n - p}{2^n}y\right) + f(y)\right) \\ &\stackrel{H_n}{\leq} \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y) + f(y)\right) \\ &\leq \frac{p}{2^{n+1}}f(x) + \frac{2^{n+1} - p}{2^{n+1}}f(y). \end{aligned}$$

Soit maintenant $\lambda \in [0, 1]$. Alors $\lfloor \lambda 2^n \rfloor \leq 2^n$ et $\frac{\lfloor \lambda 2^n \rfloor}{2^n}$ converge vers λ quand $n \rightarrow +\infty$. Ainsi, l'inégalité

$$f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y)$$

passe à la limite en

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

par continuité de f sur $\mathbb{R}$ dans le membre de gauche. Cette inégalité étant vraie pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on en déduit la convexité de f .

Indication pour l'exercice 13.8 :

1. g est bien définie puisque f' ne s'annule pas sur I .
2. Soit $b \geq a$. Puisque f' est positive, f est croissante, donc en particulier, $f(b) \leq f(a) = 0$. Donc $f(b) \leq 0$. Donc $-f(b)/f'(b) \geq 0$. Donc $b - f(b)/f'(b) \geq 0$. Par concavité, f est en dessous de ses tangentes, donc $f(a) \leq f'(b)(a - b) + f(b)$ i.e. $b - f(b)/f'(b) \leq a$. Il suffit de remplacer b par u_0 pour avoir que $a \geq u_1 \geq u_0$. Par une récurrence immédiate (puisque $a \geq u_1$), la conclusion s'en suit.
3. $(u_n)_n$ est majorée et croissante. Donc elle converge. Notons l , sa limite. J'ai

$$u_n - u_{n+1} = \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leq \frac{f(u_n)}{f'(u_0)} \leq 0$$

car $u_n \leq a$. L'inégalité passe donc à la limite en

$$0 \leq \frac{\lim f(u_n)}{f'(u_0)} \leq 0.$$

Donc $f(u_n)$ tend vers 0. Par continuité, $f(l) = 0$. Puisque f' est strictement positive, f est strictement croissante, donc injective. Donc $f(l) = f(a)$ implique $l = a$. Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Indication pour l'exercice 13.9 :

Remarquons que $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Alors par concavité du logarithme,

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{\ln(a^p)}{p} + \frac{\ln(b^q)}{q} = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

Par croissance de $\exp$, on a le résultat souhaité.

Indication pour l'exercice 13.10 :

Pour cela, supposons que

$$\sum_{k=1}^n a_k^p = 1 ; \sum_{k=1}^n b_k^q = 1.$$

On dira dans la suite que $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ vérifient la condition (C). Par l'inégalité de Young, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, j'ai

$$a_k b_k \leq \frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q}.$$

En sommant, j'ai donc :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n a_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n b_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

car les sommes valent 1. Je note alors :

$$\alpha_k = \frac{a_k}{(\sum_{k=1}^n a_k^p)^{1/p}} \text{ et } \beta_k = \frac{b_k}{(\sum_{k=1}^n b_k^q)^{1/q}}.$$

Alors

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^p = \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{(\sum_{k=1}^n a_k^p)^{1/p}} \right)^p = \sum_{k=1}^n \frac{a_k^p}{\sum_{k=1}^n a_k^p} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^p} \sum_{k=1}^n a_k^p = 1.$$

Idem pour les β_k . Ainsi, $(\alpha_k)_k$ et $(\beta_k)_k$ vérifient la condition (C) ce qui me permet de dire :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \leq 1.$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(\sum_{k=1}^n a_k^p)^{1/p}} \frac{b_k}{(\sum_{k=1}^n b_k^q)^{1/q}} \leq 1$$

i.e.

$$\frac{1}{(\sum_{k=1}^n a_k^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^n b_k^q)^{1/q}} \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq 1.$$

Reste à passer de l'autre côté la fraction pour conclure.

Montrons donc Minkowski. On a, par l'inégalité triangulaire que $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$. De fait,

$$|a_k + b_k|^p \leq (|a_k| + |b_k|)|a_k + b_k|^{p-1} = |a_k||a_k + b_k|^{p-1} + |b_k||a_k + b_k|^{p-1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \leq \sum_{k=1}^n |a_k||a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |b_k||a_k + b_k|^{p-1}.$$

J'applique deux fois Hölder. Une fois sur $|a_k|$ et $|a_k||a_k + b_k|^{p-1}$ qui sont bien positifs (et oui!), une fois sur $|b_k|$ et $|a_k||a_k + b_k|^{p-1}$. J'obtiens donc

$$\sum_{k=1}^n |a_k||a_k + b_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{(p-1) \times q} \right)^{1/q},$$

et

$$\sum_{k=1}^n |b_k||a_k + b_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{(p-1) \times q} \right)^{1/q}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{(p-1) \times q} \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{(p-1) \times q} \right)^{1/q}.$$

Je regroupe convenablement les sommes en factorisant : cela me donne

$$\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \leq \left(\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q} \right) \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{(p-1) \times q} \right)^{1/q}$$

Mais par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on en déduit $q(p-1) = p$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \leq \left(\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q} \right) \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/q}.$$

J'ai deux fois le même terme, à des puissances certes différentes. Je les mets ensemble. J'ai donc

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right) \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{-1/q} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}.$$

J'ai donc quelque chose de la forme $a \times a^{-1/q} = a^{1-\frac{1}{q}} = a^{1/p}$ puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. J'ai donc

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}.$$

CQFD.

Deuxième partie

Semestre 2

Chapitre 14

Matrices

14.1 Exercices

Exercice 14.1. $[\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}), \mathcal{D}_n(\mathbb{R})]$

Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $AA^T = A^T A$ si, et seulement si A est diagonale.

Exercice 14.2. [Un mélange]

Pour $a \in \mathbb{R}^*$, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les puissances de A .

Exercice 14.3. [Un mélange 2]

1. Soit θ , un réel. On note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Montrer que $\text{SO}_2(\mathbb{R}) := \{R_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. On dit qu'une suite de matrice converge lorsque chaque élément de la matrice converge. On a alors $\lim_n A_n = (\lim_n a_{ij})_{i,j}$. Déterminer, pour a un réel quelconque, la limite de $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha/n \\ \alpha/n & 1 \end{pmatrix}^n$.

Exercice 14.4. [Du complexe]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{2i\pi/n}$. Déterminer $\left((\omega^{(i-1)(j-1)})_{i,j}\right)^{-1}$.

Exercice 14.5. [Trace]

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\text{tr}(AC) = \text{tr}(BC)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 14.6. [Centre]

Déterminer $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 14.7. [Equation matricielle]

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'équation $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14.8.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que $AB = BA$.

14.2 Eléments de corrections

Indication pour l'exercice 14.1 :

Le sens réciproque est immédiat.

On note $A = (a_{i,j})_{i,j}$, et $A^T = (b_{i,j})_{i,j}$ (on a $b_{i,j} = a_{i,j}$). Ecrit ainsi, on a

$$[AA^T]_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{j,k}.$$

De même,

$$[A^T A]_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}.$$

J'ai donc

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{j,k} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}.$$

Utilisons maintenant la condition $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$. Cela se traduit par $\forall i > j, a_{i,j} = 0$.

Supposons $i \geq j$. Alors

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{j-1} a_{i,k} \underbrace{a_{j,k}}_{=0} + \sum_{k=j}^{i-1} \underbrace{a_{i,k}}_{=0} a_{j,k} + \sum_{k=i}^n a_{i,k} a_{j,k} = \sum_{k=i}^n a_{i,k} a_{j,k},$$

et

$$\sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = \sum_{k=1}^j a_{k,i} a_{k,j} + \sum_{k=j+1}^i a_{k,i} \underbrace{a_{k,j}}_{=0} + \sum_{k=i+1}^n \underbrace{a_{k,i}}_{=0} a_{k,j} = \sum_{k=1}^j a_{k,i} a_{k,j}.$$

Pour $i = j = 1$, j'ai

$$\sum_{k=1}^n a_{1,k} a_{1,k} = \sum_{k=1}^n a_{1,k}^2 = \sum_{k=1}^1 a_{1,k}^2.$$

Je simplifie à gauche et à droite en soustrayant $a_{1,1}^2$. J'ai donc

$$\sum_{k=2}^n a_{1,k}^2 = 0,$$

donc $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, a_{1,k} = 0$.

Pour $i = j = 2$, j'ai

$$\sum_{k=2}^n a_{2,k} a_{2,k} = \sum_{k=2}^n a_{2,k}^2 = \sum_{k=1}^2 a_{2,k}^2 = \underbrace{a_{1,2}^2}_{=0 \text{ par avant}} + a_{2,2}^2.$$

En soustrayant par $a_{2,2}^2$, et etc, etc. De proche en proche, on en déduit que $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \forall k \in \llbracket i+1, n \rrbracket, a_{i,k} = 0$. Donc A est triangulaire inférieure. Le même raisonnement s'applique pour $B = A^T$. Donc $B = A^T$ est triangulaire inférieure, donc A est triangulaire supérieure. Donc A est diagonale.

Indication pour l'exercice 14.2 :

On remarque en calculant les premières puissances de A que A s'écrit comme combinaison de A et I_3 . Supposons que A^n s'écrit $a_n A + b_n I_3$. Alors $A^{n+1} = A(a_n A + b_n I_3) = a_n A^2 + b_n A = a_n (A + 2I_3) + b_n A = (a_n + b_n)A + 2a_n I_3$. Soit donc les suites $(a_n)_n, (b_n)_n$ deux suites vérifiant $a_0 = 0, a_1 = 1, b_0 = 1, b_1 = 0$ et $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$. On montre donc aisément que $A^n = a_n A + b_n I_3$. Reste à déterminer a_n et b_n . J'écris $a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$. L'équation caractéristique s'écrit $r^2 - r - 2$, de racines 2 et -1. Alors a_n s'écrit $\lambda(-1)^n + \mu 2^n$. Avec $a_0 = 0, a_1 = 1$, on a $\lambda = \frac{-1}{3}, \mu = \frac{1}{3}$.

Ainsi,

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3},$$

et donc

$$b_n = 2a_{n-1} = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3},$$

ici, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 0$, la formule coïncide. J'ai donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3} A + \frac{2(-1)^n + 2^n}{3} B.$$

Indication pour l'exercice 14.3 :

1. Le déterminant de R_θ pour tout θ vaut 1. Donc $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ est inclus dans $\text{GL}_2(\mathbb{R})$, qui est un groupe. Il suffit alors de montrer que $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ est stable par produit ($R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$ par les formules d'additions), et stable par inverse ($R_\theta R_{-\theta} = I_2$).
2. Notons A_n , la matrice sous la puissance. Alors

$$A_n = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}} & \frac{-\alpha/n}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}} \\ \frac{\alpha/n}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}} \end{pmatrix}$$

Puisque $\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}}\right)^2 + \left(\frac{\alpha/n}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}}\right)^2 = 1$, il existe un unique θ_n dans $] -\pi/2, \pi/2[$ tel que $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}} =:$

$\cos(\theta_n)$; $\frac{\alpha/n}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}} =: \sin(\theta_n)$. De fait, $A_n = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}} R_{\theta_n}$.

Donc $A_n^n = \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{n/2} R_{n\theta_n}$, puisque $R_{\theta_n}^2 = R_{2\theta_n}$, et en itérant.

En faisant un DL comme pour $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, on montre aisément que $\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{n/2}$ tend vers 1 quand $n \rightarrow +\infty$. Puisque $\tan = \sin / \cos$, j'ai $\tan(\theta_n) = \alpha/n$ et puisque $\theta_n \in] -\pi/2, \pi/2[$, $\theta_n = \arctan(\alpha/n) \sim \frac{\alpha}{n}$. Donc $n\theta_n$ tend vers α en $+\infty$. D'où

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha/n \\ \alpha/n & 1 \end{pmatrix}^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Indication pour l'exercice 14.4 :

Je note M , la matrice en question. Je cherche alors à montrer que $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), MX = Y$. Autrement dit, pour tout $(y_0, \dots, y_{n-1})$, il existe $(x_0, \dots, x_{n-1})$ tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

En développant le produit matriciel, on a donc

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = y_0 \\ x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 + \cdots + \omega^{n-1} x_{n-1} = y_1 \\ x_0 + \omega^2 x_1 + \omega^4 x_2 + \cdots + \omega^{2(n-1)} x_{n-1} = y_2 \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots = \vdots \\ x_0 + \omega^{n-1} x_1 + \omega^{2(n-1)} x_2 + \cdots + \omega^{(n-1)(n-1)} x_{n-1} = y_{n-1} \end{cases}$$

Je somme toutes les lignes du système. J'obtiens alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{kl} x_l = \sum_{k=0}^{n-1} y_k.$$

Or, $\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{kl} = n \mathbb{1}_{\omega^k=1}$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{kl} x_l = nx_0,$$

On souhaite adopter la même stratégie. En effet, ceci fonctionne car il n'y a rien devant x_0 . Faisons de même pour les x_j pour j fixé. On multiplie la ligne i par le coefficient $\omega^{-(i-1)(j-1)}$ et ce, pour chaque ligne. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-(k-1)(j-1)} \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{kp} x_p = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-kj} y_k.$$

On simplifie :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-kj} \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{kp} x_p &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{k(p-j)} x_p \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} x_p \sum_{k=0}^{n-1} (\underbrace{\omega^{p-j}}_{=1 \text{ ssi } p=j})^k \\ &= nx_j + \sum_{p=0, p \neq j}^{n-1} x_p \frac{1 - \overbrace{\omega^{n(p-j)}}^{=1}}{1 - \omega^{p-j}} \\ &= nx_j. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-kj} y_k = nx_j.$$

Ainsi, chaque x_k est entièrement déterminé, ce qui montre l'existence et l'unicité des x_k solutions. Donc la matrice sous-jacente est inversible. En remarquant que la combinaison de nx_k est en fait le produit matriciel de $\overline{M}$ par Y , on a donc

$$X = \frac{1}{n} \overline{M} Y.$$

Alors $M^{-1} = \frac{1}{n} \overline{M}$.

Indication pour l'exercice 14.5 :

$$\begin{aligned} \text{tr}((A - B)(A - B)^T) &= \text{tr}(AA^T - AB^T - BA^T + BB^T) \\ &= \text{tr}(AA^T) - \text{tr}(AB^T) - \text{tr}(BA^T) + \text{tr}(BB^T) \\ &= \text{tr}(AA^T) - \text{tr}(BA^T) + \text{tr}(BB^T) - \text{tr}(AB^T) \underset{\star}{=} 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

avec $\star$ ayant lieu en prenant $C = A^T$ et $C = B^T$. Or, on sait que $\text{tr}(MM^T) = 0 \iff M = 0$. Ainsi, $A - B = 0$ donc $A = B$.

Ceci est un peu astucieux, et l'idée provient de M. Etifier. Dans la plupart des cas, (et ce à quoi je pensais), était de regarder pour C égal à une matrice élémentaire $E_{i,j}$ pour conclure.

Indication pour l'exercice 14.6 :

On rappelle que $Z(G) = \{x \in G : \forall y \in G, xy = yx\}$. Ici, on va montrer que $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}I_n$. Si M est une matrice de la forme $\mathbb{R}I_n$ (i.e. M s'écrit λI_n pour λ , un réel), alors il est clair que M commute avec tout le monde.

Dans l'autre sens, si M est une matrice qui commute avec tout le monde, elle commute avec les $E_{i,j}$. La conclusion est assez immédiate.

Indication pour l'exercice 14.7 :

Notons A , la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si M est solution, alors $MA = MM^3 = M^4 = M^3M = AM$. Donc A et M commutent. Soit maintenant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $MA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$ et $AM = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$. De fait, $b = -b$ et $c = -c$ par l'égalité $MA = AM$. Donc $b = c = 0$ et M est diagonale. Donc $M^3 = \text{diag}(a^3, d^3) = \text{diag}(1, -1)$. Donc a est racine 3-ème de l'unité, et d est racine 3-ième de -1 . Cela fait 9 matrices possibles.

La synthèse est immédiate.

Indication pour l'exercice 14.8 :

On écrit $I_n - A - B + AB = I_n$. Donc $(I_n - A)(I_n - B) = I_n$. Donc $I_n - A$ est inversible, d'inverse $I_n - B$. Elles commutent donc entre elles, et on a $(I_n - B)(I_n - A) = I_n - A - B + BA = I_n$. Donc $BA = A + B = AB$ donc $BA = AB$. CQFD.

Chapitre 15

Développements limités

15.1 Exercices

Exercice 15.1. [$\mathcal{C}^n$]

Déterminer la classe la plus précise des fonctions définies par un raccord entre f (définie à gauche de 0) et g (définie à droite de 0) en 0 suivantes :

a) $f = \sin, g = \sinh$.

b) $f = \ln \circ (1 + \sin), g = \sin(\ln(1 + \cdot))$

Exercice 15.2. [Calcul de limites]

Déterminer les limites suivantes (un équivalent si la limite est nulle) :

1. $u_n = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) \right)^n$

2. $v_n = \left(e^2 - \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \right)^{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}}$

3. $x \mapsto \frac{x^{x^x} \ln(x)}{x^x - 1}$ en 0

4. $x \mapsto \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$

Exercice 15.3. [Un petit système dynamique]. On définit la suite suivante :

$$u_n : \begin{cases} u_0 \in]0, \pi[\\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ est bien définie.
2. Résoudre l'équation $\sin(x) = x$ sur $[0, \pi]$. En déduire la limite de $(u_n)_n$.
3. Trouver un équivalent de :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}.$$

4. Rappeler puis démontrer le lemme de Cesàro.
5. Montrer alors que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Exercice 15.4. 1. Calcul explicite : soit $\alpha > 0$. Je note alors :

$$(E_\alpha) : x^2 - \alpha x - 1 = 0.$$

- (a) Montrer que pour α au voisinage de 0, l'équation (E_α) admet une unique solution strictement positive. Montrer alors que :

$$x(\alpha) = \frac{\alpha + \sqrt{4 + \alpha^2}}{2}$$

(b) En déduire un DL_2 en $\alpha = 0$ de $x(\alpha)$.

2. Pas de calcul explicite : soit $\alpha > 0$. Je note alors :

$$\forall \alpha > 0, f_\alpha = x^7 - \alpha x - 1.$$

Soit (H_α) , l'équation $f_\alpha(x) = 0$.

(a) Etudier les variations de f_α . En déduire l'existence et l'unicité d'une solution strictement positive.

On la note dans la suite $x(\alpha)$. **Dans toute la suite, on remarquera que $0 = f_\alpha(x(\alpha))$.**

(b) Montrer que $\alpha \mapsto x(\alpha)$ est minorée par 1.

(c) Déterminer les variations de $\alpha \mapsto x(\alpha)$.

(d) Montrer que $x(\alpha)$ admet une limite lorsque $\alpha \rightarrow 0^+$. On note l , la limite.

(e) Calculer l .

3. On cherche à pousser le DL de $x(\alpha)$. De manière générale, lorsque l'on veut un DL_1 d'une fonction f en 0, on étudie la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(0)$. Je pose donc $\xi(\alpha) = x(\alpha) - 1$.

(a) Etablir l'équation vérifiée par $\xi(\alpha)$.

(b) En montrant que $\xi(\alpha) = o_{\alpha \rightarrow 0}(1)$, montrer que :

$$\xi(\alpha) + o_{\alpha \rightarrow 0}(\xi(\alpha)) = \frac{\alpha}{7}$$

(c) En déduire un DL_1 de $x(\alpha)$.

(d) On pose maintenant : $\zeta(\alpha) = x(\alpha) - 1 - \frac{\alpha}{7}$. Reprendre les questions 3a,3b pour déterminer un DL_2 de $x(\alpha)$.

Exercice 15.5. On note l'équation, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(E_n) : x + \ln(x) = n.$$

1. Fixons n . Montrer que cette équation admet qu'une seule solution, notée u_n .

2. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante et tend vers $+\infty$.

3. Déterminer un équivalent de $(u_n)_n$, puis un développement asymptotique jusqu'à un $o(\ln(n)/n)$.

15.2 Eléments de corrections

Indication pour l'exercice 15.1 :

Puisque les fonctions à gauche, et à droite du raccord sont localement de classe $\mathcal{C}^\infty$, il suffit de regarder jusqu'à quel ordre, on a un élément non nul d'après le théorème de raccord $\mathcal{C}^\infty$.

1. On remarque que $\sin(x) = 0 + x + 0x^2 - x^3/3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ et $\sinh(x) = 0 + x + 0x^2 + x^3/3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ donc $f^{(i)}(0) = g^{(i)}(0)$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$. Ainsi, la fonction raccordée est de classe $\mathcal{C}^2$.

2. On va pousser à l'ordre 4. $1 + \sin(x) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$ donc $\ln(1 + \sin(x)) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)\right) -$

$$\frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)\right)^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o_{x \rightarrow 0}(x^4). \text{ Ensuite, } \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^4). \text{ Ainsi,}$$

$$\begin{aligned} \sin(\ln(1 + x)) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) - \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)\right)^3 + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{6} \times \frac{-3}{2}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^4). \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction raccordée est de classe $\mathcal{C}^3$.

Indication pour l'exercice 15.2 :

1. On écrit

$$u_n = \exp \left(n \ln \left(\sin \left(\frac{n\pi}{6n+1} \right) + \cos \left(\frac{n\pi}{3n+1} \right) \right) \right).$$

On s'attend à ce que dans l'exponentielle, on ait un développement limité de la forme $an + b + o(1)$. Si $a = 0$, la limite est e^b sinon, c'est 0 ou $+\infty$ selon le signe de a . Ainsi, pour obtenir un tel développement limité, il suffit que le logarithme donne de l'ordre 1 donc que son argument donne de l'ordre 1.

On considère n au voisinage de $+\infty$. Alors

$$\frac{n\pi}{6n+1} = \frac{\pi/6}{1 + \frac{1}{6n}} = \frac{\pi}{6} \left(1 - \frac{1}{6n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n) \right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{36n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n)$$

donc

$$\sin \left(\frac{n\pi}{6n+1} \right) = \sin(\pi/6) + \left(-\frac{\pi}{36n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n) \right) \cos(\pi/6) + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{36n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n).$$

par la formule de Taylor-Young sin étant $\mathcal{C}^\infty$.

Aussi,

$$\frac{n\pi}{3n+1} = \frac{\pi/3}{1 + \frac{1}{3n}} = \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{3n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n) \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n)$$

donc

$$\cos \left(\frac{n\pi}{3n+1} \right) = \cos(\pi/3) + \left(-\frac{\pi}{9n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n) \right) (-\sin(\pi/3)) + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{36n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n).$$

Ainsi, en sommant,

$$\sin \left(\frac{n\pi}{6n+1} \right) + \cos \left(\frac{n\pi}{3n+1} \right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{12n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n).$$

Ainsi,

$$\ln \left(\sin \left(\frac{n\pi}{6n+1} \right) + \cos \left(\frac{n\pi}{3n+1} \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{12n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n).$$

donc

$$\left(\sin \left(\frac{n\pi}{6n+1} \right) + \cos \left(\frac{n\pi}{3n+1} \right) \right)^n = \exp \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{12} + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(\sqrt{3}\pi/24)$$

par continuité de l'exponentielle.

2. On remarque que dans la parenthèse, le terme tend vers 0 (on a la limite classique $(1+x/n)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$).

On va donc pousser à l'ordre 2.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n &= \exp(n \ln(1 + 2/n)) \\ &= \exp \left(n \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right) \\ &= e^2 \exp \left(-\frac{2}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n) \right) \\ &= e^2 \left(1 - \frac{2}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n) \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$e^2 - \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \frac{2e^2}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n).$$

Puisque

$$\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

par croissances comparées,

$$(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}) \ln \left(\frac{2e^2}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1/n) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc par continuité de $\exp$, la limite cherchée est 1.

3. Pour x au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} x^{x^x} &= \exp(x^x \ln(x)) \\ &= \exp(\underbrace{\exp(x \ln(x)) \ln(x)}_{\underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0}) \\ &= \exp((1 + x \ln(x) + o_{x \rightarrow 0}(x \ln(x))) \ln(x)) \\ &= \exp(\ln(x) + x \ln^2(x) + o_{x \rightarrow 0}(x \ln^2(x))) \\ &= \exp(\ln(x)) \exp(\underbrace{x \ln^2(x) + o_{x \rightarrow 0}(x \ln^2(x))}_{\underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$x^{x^x} \ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(x)$$

et

$$x^x - 1 = \exp(x \ln(x)) - 1 = 1 + x \ln(x) - 1 + o_{x \rightarrow 0}(x \ln(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(x).$$

Par quotient d'équivalents, la limite cherchée est 1.

4. Etablissons une meilleure expression du numérateur. On pose $y = \arccos(1 - x)$. Alors $x = 1 - \cos(y) = 2 \sin^2(y/2)$. Donc $y = 2 \arcsin(\sqrt{x}/2)$. Or, $\forall x \in]-1, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$. Ainsi,

$$\arcsin'(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

En intégrant,

$$\arcsin(x) = 0 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Mais tout ceci n'est pas utile. Il suffit d'obtenir $\arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. De fait,

$$2 \arcsin(\sqrt{x}/2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{2x}.$$

Par quotient d'équivalents, la limite cherchée est $\sqrt{2}$.

Indication pour l'exercice 15.3 :

Dans toute la suite, je pose $f : x \mapsto \sin(x) - x$ sur $[0, \pi]$.

1. f est dérivable, de dérivée $x \mapsto \cos(x) - 1$, qui est tout le temps négative. Autrement dit, f est décroissante. Mais $f(0) = 0$. Donc f est négative, puis $\sin(x) \leq x$, pour tout x dans $[0, \pi]$.
2. Un développement limité en 0 de la fonction $\sin$ me dit que $f(x) = -x^3/6 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$. Autrement dit, au voisinage de 0^+ , f est strictement négative. On sait par ailleurs que f décroît. Donc f est strictement négative sur $]0, \pi]$. Mais $f(0) = 0$. Donc la seule solution de l'équation est 0.
Soit u_n fixé. Alors j'ai immédiatement

$$0 \leq \sin u_n = u_{n+1} \leq u_n.$$

Il reste à montrer qu'elle est minorée par 0. Immédiat par récurrence par exemple. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge par le théorème de la limite monotone. On note l , la limite. Alors dans l'égalité $u_{n+1} = \sin(u_n)$, l'égalité passe à la limite en $l = \sin(l)$. Ainsi, on a que $l = 0$.

3. Calculons :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\sin(u_n)^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - \sin(u_n)^2}{u_n^2 \sin(u_n)^2}$$

Il s'agit maintenant de faire un développement limité de cette horreur :

$$\frac{u_n^2 - \sin(u_n)^2}{u_n^2 \sin(u_n)^2} = \frac{u_n^2 - \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^3)\right)^2}{u_n^2 \times (u_n^2 + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^2))} = \frac{u_n^2 - u_n^2 + 2 \times \frac{u_n^4}{6} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^4)}{u_n^2 \times (u_n^2 + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^2))} = \frac{1}{3} + o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

Donc :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3}$$

A terme, il faudra être plus efficace.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} &= (\sin(u_n))^{-2} - u_n^{-2} = \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^3)\right)^{-2} - u_n^{-2} \\ &= u_n^{-2} \left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^2)\right) - 1 \right) \\ &= u_n^{-2} \left(1 + 2\frac{u_n^2}{6} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^2) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{3} + o_{n \rightarrow +\infty}(1). \end{aligned}$$

4. Voir l'exercice 8.1.
5. Déjà,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right).$$

Mais je sais que le terme de gauche converge vers $\frac{1}{3}$ d'après le théorème de Cesaro, puisque la limite du terme général est $\frac{1}{3}$. Autrement dit, l'égalité passe à la limite en :

$$\frac{1}{3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_0^2} \right)$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n^2} = \frac{1}{3}$$

Et donc :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Indication pour l'exercice 15.4 :

1. Calcul explicite :

(a) Il s'agit tout bêtement d'un polynôme de degré deux. Ses solutions sont :

$$\frac{\alpha \pm \sqrt{4 + \alpha^2}}{2}$$

Comme $\alpha > 0$, la seule solution strictement positive est :

$$\frac{\alpha + \sqrt{4 + \alpha^2}}{2} := x(\alpha).$$

(b) Faisons le DL :

$$x(\alpha) = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha}{2} + 1 + \frac{\alpha^2}{4} o_{\alpha \rightarrow 0}(\alpha^2) = 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{8} + o_{\alpha \rightarrow 0}(\alpha^2).$$

2. Pas de calcul explicite :

(a) f_α est évidemment dérivable de dérivée $x \mapsto 7x^6 - \alpha$. Cette fonction ne s'annule qu'en $x = \frac{\alpha}{7}^{1/6}$. Mais $f'_\alpha(0) < 0$! Donc f est négative sur l'intervalle $[0, \frac{\alpha}{7}^{1/6}]$, positive sur $[\frac{\alpha}{7}^{1/6}, +\infty[$. D'où les variations de f_α .

On remarque par ailleurs que $f_\alpha(0) < 0$. Autrement dit, f est strictement négative sur l'intervalle $[0, \frac{\alpha}{7}^{1/6}]$. Toutefois, f_α tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et est strictement croissante sur $[\frac{\alpha}{7}^{1/6}, +\infty[$. Ainsi, par le TVI, elle ne s'annule qu'une seule et unique fois. CQFD.

(b) On calcule $f_\alpha(1) = -\alpha < 0$. Or, $f_\alpha(x(\alpha)) = 0$. Donc :

$$f_\alpha(1) < 0 = f_\alpha(x(\alpha)).$$

Par croissance de f_α , j'ai donc $1 \leq x(\alpha)$.

(c)

$$f_{\alpha_1}(x(\alpha_2)) = x(\alpha_2)^7 - \alpha_1 x(\alpha_2) - 1 = \alpha_2 x(\alpha_2) + 1 - \alpha_1 x(\alpha_2) - 1 = (\alpha_2 - \alpha_1)(x(\alpha_2))$$

Ainsi, le signe de $f_{\alpha_1}(x(\alpha_2))$ est le signe de $\alpha_2 - \alpha_1$. Supposons que $\alpha_2 > \alpha_1$. Alors $f_{\alpha_1}(x(\alpha_2)) > 0 = f_{\alpha_1}(x(\alpha_1))$. Donc par croissance de f_{α_1} , $x(\alpha_2) > x(\alpha_1)$. D'où la croissance de $\alpha \mapsto x(\alpha)$.

(d) $\alpha \mapsto x(\alpha)$ est minorée et croissante. Le théorème de convergence monotone nous indique donc que $\alpha \mapsto x(\alpha)$ admet une limite en 0^+ .

(e) Ainsi, dans l'égalité suivante :

$$x(\alpha)^7 - \alpha x(\alpha) - 1 = 0.$$

on peut la passer à la limite quand $\alpha \rightarrow 0$ en :

$$l^7 = 1$$

Comme l est positive, $l = 1$.

3. Passons à un équivalent plus précis.

(a)

$$(1 + \xi(\alpha))^7 - \alpha(1 + \xi(\alpha)) - 1 = 0.$$

- (b) $\xi(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$. Ainsi, $\xi(\alpha) \in o_{\alpha \rightarrow 0}(1)$, et en multipliant par α , $\alpha\xi(\alpha) \in o_{\alpha \rightarrow 0}(\alpha)$. Ainsi, au voisinage de 0, si je reprends l'égalité vérifiée par $\xi(\alpha)$, j'ai :

$$1 + 7\xi(\alpha) - \alpha\xi(\alpha) - \alpha - 1 + o(\xi(\alpha)) = 0$$

i.e.

$$7\xi(\alpha) - \alpha + o(\xi(\alpha)) = 0$$

CQFD.

- (c) J'en déduis donc que :

$$\xi(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \frac{\alpha}{7}.$$

Donc :

$$x(\alpha) - 1 \sim \frac{\alpha}{7}.$$

non nul Ainsi :

$$x(\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{7} + o_{\alpha \rightarrow 0}(\alpha)$$

- (d) Je reprends les questions : le raisonnement est le même :

$$\left(1 + \frac{\alpha}{7} + \zeta(\alpha)\right)^7 - \alpha \left(1 + \frac{\alpha}{7} + \zeta(\alpha)\right) - 1 = 0.$$

Donc en posant $X = \frac{\alpha}{7} + \zeta(\alpha)$, j'ai :

$$1 + 7X + \frac{7 \times (7-1)}{2!} X^2 - \alpha X - 1 + o_{\alpha \rightarrow 0}(\alpha^2) = 0$$

i.e.

$$7\zeta(\alpha) + \left(\frac{7 \times 3}{49} - \frac{1}{7}\right) \alpha^2 + o_{\alpha \rightarrow 0}(\alpha^2) = 0$$

Donc :

$$\zeta(\alpha) = \frac{-2}{49} \alpha^2 + o_{\alpha \rightarrow 0}(\alpha^2).$$

Remarque : il n'est pas étonnant de ne trouver de terme d'ordre 1 ou 0 ! Sinon, on n'a pas unicité d'un DL!!!

D'où :

$$x(\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{7} - \frac{2}{49} \alpha^2 + o_{\alpha \rightarrow 0}(\alpha^2).$$

Indication pour l'exercice 15.5 :

1. Je pose :

$$f_n : x \mapsto x + \ln(x) - n.$$

C'est une fonction strictement croissante, qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$, $-\infty$ en $-\infty$. Par le TVI, le résultat tombe.

- 2.

$$f_{n+1}(u_n) = u_n + \ln(u_n) - (n+1) = f_n(u_n) - 1 = -1 < 0 = f_{n+1}(u_{n+1}).$$

D'où la croissance. Si u_n convergerait, je peux noter l , sa limite et dire que dans :

$$f_n(u_n) + n = u_n + \ln(u_n)$$

le terme de droite converge, mais le terme de gauche ne converge pas. Absurde. (*Remarque : on peut se passer de l'absurde.*)

3. Comme u_n est non nul à partir d'un certain rang, j'ai :

$$1 + \underbrace{\frac{\ln(u_n)}{u_n}}_0 = \frac{n}{u_n}.$$

$n \rightarrow +\infty$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{u_n} = 1.$$

J'ai donc $u_n \sim n$. Alors :

$$u_n = n + o(n) = u_n = n(1 + o(1)).$$

D'où :

$$u_n = n - \ln(u_n) = n - \ln(n(1 + o(1))) = n - \ln(n) - o(1).$$

D'où :

$$u_n = n - \ln \left(n \left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right).$$

i.e., comme $o(1/n) + o(\ln(n)/n) = o(\ln(n)/n)$,

$$u_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Chapitre 16

Polynômes

16.1 Exercices

Exercice 16.1.

Peut-on trouver un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \bar{z}$?

Exercice 16.2.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P - X \mid P \circ P - X$.

Exercice 16.3.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P \geq 0 \iff \exists A, B \in \mathbb{R}[X], P = A^2 + B^2$.

Exercice 16.4 (Théorème de Gauss-Lucas).

Soit $P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0$. Montrer que $Z(P') \subset \text{Conv}(Z(P))$.

On note $\text{Conv}(\{a_1, \dots, a_n\}) \subset \mathbb{C}$, les $x \in \mathbb{C}$ tel que x s'écrit $\sum \lambda_i a_i$ avec $\sum \lambda_i = 1$, et $Z(P)$, les racines de P , un polynôme.

Exercice 16.5.

Résoudre l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X] : P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Exercice 16.6.

Résoudre l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X] : (X-16)P(2X) - 16(X-1)P(X) = 0$. On pourra admettre (démontrer ?) que $(\forall x \in \mathbb{R}, P(2x) = P(x)) \implies P$ est constante.

Exercice 16.7.

Déterminer la somme des carrés des 4 racines complexes (comptées avec leur multiplicité) du polynôme $X^4 - 9X^3 + 12X^2 - X - 1$?

Exercice 16.8.

Déterminer l'ensemble des polynômes P tel que P stabilise $\mathbb{Q}$.

Exercice 16.9.

1. Déterminer $\text{pgcd}(P, P')$ (dans $\mathbb{C}$).
2. Déterminer $\text{pgcd}(X^p - 1, X^q - 1)$ avec $q \leq p$, des entiers naturels.

Exercice 16.10.

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

1. Déterminer $\prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2 \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) X + 1 \right)$.
2. Montrer que

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) + 1 \right).$$

Exercice 16.11.

Soit P un polynôme réel scindé de degré au moins 2. Montrer que P' est scindé.

Exercice 16.12.

A un polynôme A , on note $R(A)$, l'ensemble de ses racines. Soit P, Q , deux polynômes complexes non constants tel que $R(P) = R(Q)$ et $R(P - 1) = R(Q - 1)$. Montrer que $P = Q$.

16.2 Eléments de corrections

Indication pour l'exercice 16.1 :

Soit P , un tel polynôme. Alors en particulier, $\forall r \in \mathbb{R}, P(r) = \bar{r} = r$. Donc $P = X$. Absurde en évaluant en i par exemple.

Indication pour l'exercice 16.2 :

J'écris $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors $P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=0}^n a_k P(X)^k - a_k X^k = \sum_{k=1}^n a_k P(X)^k - a_k X^k$. Or, la règle de Bernoulli donne, dès que $k \geq 1$,

$$P(X) - X \mid P(X)^k - X^k.$$

Ainsi, $P(X) - X \mid P(P(X)) - P(X)$. Clairement, $P(X) - X \mid P(X) - X$. Donc $P(X) - X \mid P(P(X)) - P(X) + P(X) - X = P(P(X)) - X$.

Indication pour l'exercice 16.3 :

L'implication réciproque est immédiate. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$, des réels $x_1, \dots, x_r, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_s$ et des entiers $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_s$ tel que

$$P(X) = C \prod_{i=1}^r (X - x_i)^{\lambda_i} \prod_{j=1}^s (X^2 + b_j X + c_j)^{\mu_j},$$

avec $X^2 + b_j X + c_j$ irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ pour $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$.

P étant de signe constant, $X^2 + b_j X + c_j$ étant strictement positif par hypothèse, nécessairement, $\prod (X - x_i)^{\lambda_i}$ est de signe constant. On a envie de dire que tous les λ_i sont pairs. Supposons que l'un est impair, disons λ_k . Alors au voisinage de x_k , P va changer de signe. En contraposant, on a bien que tous les λ_i sont pairs. Enfin, $P \geq 0$, donc nécessairement $C \geq 0$. Ainsi,

$$P(X) = \sqrt{C}^2 \left(\prod_{i=1}^r (X - x_i)^{\lambda_i/2} \right)^2 \underbrace{\prod_{j=1}^s (X^2 + b_j X + c_j)^{\mu_j}}_{\star}.$$

Il suffit donc de montrer que $\star$ est la somme de deux carrés pour conclure. Soit z_j , une racine complexe de $X^2 + b_j X + c_j$. Alors

$$\prod_{j=1}^s (X^2 + b_j X + c_j)^{\mu_j} = \prod_{j=1}^s (X - z_j)(X - \bar{z}_j)^{\mu_j} = \prod_{j=1}^s (X - z_j) \overline{\prod_{j=1}^s (X - z_j)} = \prod_{j=1}^s (X - z_j) \prod_{j=1}^s \overline{(X - z_j)} = \underbrace{\prod_{j=1}^s (X - z_j)}_{=:K} \overline{\prod_{j=1}^s (X - z_j)}$$

Donc

$$\prod_{j=1}^s (X^2 + b_j X + c_j)^{\mu_j} = K \bar{K} = \Re(K)^2 + \Im(K)^2.$$

Il est clair que la partie réelle d'un polynôme complexe est dans $\mathbb{R}[X]$, donc pour

$$A = \sqrt{C} \prod_{i=1}^r (X - x_i)^{\lambda_i/2} \Re(K), \quad B = \sqrt{C} \prod_{i=1}^r (X - x_i)^{\lambda_i/2} \Im(K),$$

on a le résultat voulu.

Indication pour l'exercice 16.4 :

Puisqu'on est dans $\mathbb{C}$, on a, en notant $P = C \prod_{k=1}^r (X - z_k)^{n_k}$,

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^r \frac{n_k}{X - z_k}.$$

Soit z , une racine de P' . Si z est aussi racine de P , z est clairement dans l'enveloppe convexe des racines de P puisqu'il est dedans. Prenons en une qui n'est pas racine de P . Alors

$$0 = \frac{P'}{P}(z) = \sum_{k=1}^r \frac{n_k}{z - z_k}.$$

Ainsi,

$$0 = \sum_{k=1}^r \frac{n_k}{z - z_k} = \sum_{k=1}^r \frac{n_k \overline{(z - z_k)}}{|z - z_k|^2}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^r \frac{n_k \bar{z}}{|z - z_k|^2} = \sum_{k=1}^r \frac{n_k \bar{z}_k}{|z - z_k|^2}.$$

Je passe l'égalité au conjugué :

$$\sum_{k=1}^r \frac{n_k z}{|z - z_k|^2} = z \underbrace{\sum_{k=1}^r \frac{n_k}{|z - z_k|^2}}_{\neq 0} = \sum_{k=1}^r \frac{n_k z_k}{|z - z_k|^2}.$$

D'où

$$z = \frac{\sum_{k=1}^r \frac{n_k z_k}{|z - z_k|^2}}{\sum_{k=1}^r \frac{n_k}{|z - z_k|^2}}.$$

Je pose alors $\lambda_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^r \frac{n_i}{|z - z_i|^2}} \frac{n_k}{|z - z_k|^2}$

Indication pour l'exercice 16.5 :

On considère dans la suite des polynômes P différent du polynôme 1 et 0 – qui sont les seules solutions constantes –.

Analyse : Soit P solution. Soit a une racine de P . Alors $P(a^2) = 0$ donc a^2 est aussi racine. En itérant, a^{2^k} est racine pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque P est de degré fini, il a un nombre fini de racines donc il existe $p, q \in \mathbb{N}, p < q$ tel que $a^{2^p} = a^{2^q}$. Ainsi, si $a \neq 0$, $a^{2^{q-2p}} = 1$ et $a \in \mathbb{U}$. On a donc $a = 0$ ou $a \in \mathbb{U}$.

$(a-1)^2$ aussi est racine de P et en itérant le procédé précédent, $a-1 \in \mathbb{U}$ ou $a-1=0$. Finalement, si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, on impose $|a-1|=|a|=1$. Ainsi, on a $(\Re(a)-1)^2 = \Re(a)^2$ ce qui donne $\Re(a) = \frac{1}{2}$ donc $\Im(a)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ donc $\Im(a) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, $a = -j$ ou $a = -j^2$.

Enfin, P est nécessairement unitaire dès lors qu'il est non nul. On en déduit que P s'écrit $P(X) = X^a(X-1)^b(X^2-X+1)^c$.

Synthèse : Soit a, b, c trois entiers tels que $P(X) = X^a(X-1)^b(X^2-X+1)^c$. Alors

$$P(X^2) = X^{2a}(X-1)^b(X+1)^b(X^4-X^2+1)^c$$

et

$$Q(X) := P(X)P(X+1) = X^a(X-1)^b(X^2-X+1)^c(X+1)^aX^b(X^2+X+1)^c.$$

Supposons que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$. On a écrit $Q(X)$ dans sa décomposition en facteurs irréductibles. Ainsi, si $P(X^2) = Q(X)$, par unicité de cette décomposition, $2a = a+b, b = b, c = a$ dans un premier temps et comme $X^4-X^2+1 = (X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$, ces facteurs irréductibles étant distinct de X^2-X+1 et X^2+X+1 , nécessairement $c=0$.

Ainsi, P est de la forme $X^a(X-1)^a$ avec $a \in \mathbb{N}$ ou $P=0$.

Indication pour l'exercice 16.6 :

Remarquons que si j'ai un polynôme satisfaisant les conditions de l'énoncé, alors $P(2)=0$ et $P(16)=0$. P est donc de la forme $(X-2)(X-16) \times Q$. Ré-injections :

$$(X-16)(2X-2)(2X-16)Q(2X) = 16(X-1)(X-2)(X-16)Q(X)$$

i.e.

$$(X-16)(X-1)(X-8)Q(2X) = 4(X-1)(X-2)(X-16)Q(X).$$

Cela implique par intégrité de l'anneau des polynômes réels que $(X-8)Q(2X) = 4(X-2)Q(X)$.

Rebelote : $Q(4)=0, Q(8)=0$. Q est donc de la forme $(X-4)(X-8)S(X)$. Ré-injections :

$$(X-8)(2X-4)(2X-8)S(2X) = 4(X-2)(X-4)(X-8)S(X)$$

i.e.

$$(X-8)(X-2)(X-4)S(2X) = (X-2)(X-4)(X-8)S(X).$$

Cela implique par intégrité de l'anneau des polynômes réels que $S(2X) = S(X)$. Passons dans la version fonction polynomiale. J'ai donc une fonction S continue en 0 qui vérifie $S(2x) = S(x)$ pour tout x réel. C'est une équation fonctionnelle qui mène alors à S est constante. Voir Exercice 10.3.

Donc $P(0) = 32Q(0) = 64S(0)$. Donc tout polynôme de la forme $P = a(X-2)(X-16)(X-4)(X-8)$ devrait convenir, avec a , un réel quelconque. Et en effet, on voit bien que $P(2X) = 16(X-1)P(X)/(X-16)$.

Indication pour l'exercice 16.7 :

On utilise les formules de Viète pour conclure.

Indication pour l'exercice 16.8 :

Clairement, on a envie de dire que c'est équivalent à $P \in \mathbb{Q}[X]$. La réciproque est immédiate. Concernant l'implication, soit P tel que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Je note n , son degré. Soit $a_0, \dots, a_n$ n rationnels, et $b_0, \dots, b_n$ tel que $\forall i, P(a_i) = b_i$. Alors $b_i \in \mathbb{Q}$.

J'interpole via Lagrange. J'ai donc :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n b_k \prod_{j=1, j \neq k}^n \underbrace{\frac{X - a_j}{a_k - a_j}}_{\in \mathbb{Q}[X]}.$$

$\mathbb{Q}[X]$ étant un anneau, il est stable par somme et multiplication interne : j'ai $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Indication pour l'exercice 16.9 :

1. En notant $P = \prod_{k=1}^r (X - z_k)^{n_k}$, on a $\text{pgcd}(P, P') = \prod_{k=1}^r (X - z_k)^{n_k-1}$. (Il suffit de dériver un produit).
2. Déjà fait semble-t-il.

Indication pour l'exercice 16.10 :

1. Remarquons que $X^2 - 2X \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1 = \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \left(X - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right)$. J'ai donc

$$\prod_{k=0}^{n-1} X^2 - 2X \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right).$$

Il suffit alors de remarquer que les produits sont égaux, et que le premier vaut $X^n - 1$ pour conclure.

2. plus, $X^2 - 2X \cos(\theta) + 1$ n'a pas de racine réelle dès que $\theta \neq 0[\pi]$. Ainsi, en notant $Q(X) = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$, on a

$$Q(X) = \underbrace{(X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)}_{=:A} \overbrace{\prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{-ik\pi}{n}}\right)}^{=:B}.$$

Q est donc scindé à racines simples et les racines de Q sont $\left\{e^{\frac{2ik\pi}{2n}} : 0 \leq k \leq 2n-1\right\}$. En effet, le terme A fournit les racines de $k=0$ à $k=n$ et le terme B de $n+1$ à $2n-1$: cela vient de l'identité $e^{\frac{-ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i\pi n}{n}} e^{\frac{-ik\pi}{n}} = e^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}}$ ce qui donne

$$B = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{-ik\pi}{n}}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}}\right) \stackrel{\ell=2n-k}{=} \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{i\ell\pi}{n}}\right).$$

Ainsi, les racines de Q sont exactement $\mathbb{U}_{2n}$. Puisque Q est de degré $2n$, on a donc $Q = X^{2n} - 1$. En particulier, on a le résultat voulu.

Indication pour l'exercice 16.11 :

Comme P est scindé, il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$ et $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$P(X) = \alpha \prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i}$$

où α est le coefficient dominant de P et $\sum_{j=1}^r m_j = \deg(P) =: n$.

Alors

$$\begin{aligned}
 P'(X) &= \alpha \sum_{i=1}^r m_i (X - x_i)^{m_i-1} \prod_{j=1, j \neq i}^r (X - x_j)^{m_j} \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^r m_i (X - x_j)^{m_j-1} \underbrace{\prod_{j=1, j \neq i}^r (X - x_j)^{m_j-1}}_{= \prod_{j=1}^r (X - x_j)^{m_j-1}} \prod_{j=1, j \neq i}^r (X - x_j) \\
 &= \prod_{j=1}^r (X - x_j)^{m_j-1} Q(X)
 \end{aligned}$$

où $Q(X) = \alpha \sum_{i=1}^r m_i \prod_{j=1, j \neq i}^r (X - x_j) \cdot \prod_{j=1}^r (X - x_j)^{m_j-1}$ est un produit de monômes : il y en a $\sum_{j=1}^r (m_j - 1) = \sum_{j=1}^r m_j - r = n - r$

Pour conclure que P est scindé, il suffit donc de montrer que Q est scindé. Comme $\deg(P') = n - 1$, Q est de degré $r - 1$: il suffit d'exhiber $r - 1$ racines de Q .

Soit $i \in \llbracket 1, r - 1 \rrbracket$. Alors $P(x_i) = P(x_{i+1})$ et P est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: en particulier, on peut appliquer le théorème de Rolle. Il existe alors $\xi_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(\xi_i) = 0$. Ceci étant vrai pour tout i , on dispose de $r - 1$ racines de P' distinctes des $x_1, \dots, x_r$ donc ce sont des racines de Q . C'est ce qu'on voulait démontrer.

Indication pour l'exercice 16.12 :

Avant toute chose, comme tout polynôme de $\mathcal{C}[X]$ est scindé (théorème de d'Alembert-Gauss). Ainsi, $\deg(P) \geq \text{Card}(R(P))$. Notons p, q , les degrés de P et Q respectivement. Par hypothèse, ces degrés ne sont pas nuls. Par symétrie, on peut supposer que $p \geq q$. Notons $D = P - Q$. Le degré de D est alors majoré par p .

Puisque $R(P) = R(Q)$, D s'annule sur les racines de $R(P)$. De même, D s'annule sur $R(P - 1)$. Comme on ne peut être racine de P et de $P - 1$, ces ensembles sont disjoints. Ainsi, $R(D)$ contient plus que $\text{Card}(R(P)) + \text{Card}(P - 1)$ racines.

On utilise la formule suivante

$$\text{Card}(R(P)) = \deg(P) - \deg(P \wedge P')$$

qui est vrai dès que P est scindé (ce qui est le cas puisque $P \in \mathcal{C}[X]$, $\deg(P) \geq 1$).

Ainsi,

$$\text{Card}(R(P - 1)) = \deg(P - 1) - \deg((P - 1) \wedge (P - 1)') = \deg(P) - \deg((P - 1) \wedge P').$$

Enfin, puisque $P \wedge P - 1 = 1$, $(P \wedge P') \wedge [(P - 1) \wedge P'] = 1$ donc $(P \wedge P')$ et $(P - 1) \wedge P'$ sont deux facteurs premiers entre eux divisant P' : Ainsi, $(P \wedge P') \times [(P - 1) \wedge P'] \mid P'$ par le lemme d'Euclide et en prenant les degrés,

$$\deg((P - 1) \wedge P') + \deg(P \wedge P') \leq p - 1.$$

Ainsi, $\deg(D) \geq \text{Card}(R(D)) \geq \text{Card}(R(P)) + \text{Card}(R(P - 1)) = 2 \deg(P) - \deg((P - 1) \wedge P') + \deg(P \wedge P') = 2p - p + 1 = p + 1 > p$. Cela contredit $\deg(D) \leq p$.

Chapitre 17

Fractions rationnelles

17.1 Exercices

Exercice 17.1 (Théorème de Gauss-Lucas).

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P \neq 0$. Montrer que $Z(P') \subset \text{Conv}(Z(P))$.

On note $\text{Conv}(\{a_1, \dots, a_n\}) \subset \mathbb{C}$, les $x \in \mathbb{C}$ tel que x s'écrit $\sum \lambda_i a_i$ avec $\sum \lambda_i = 1$, et $Z(P)$, les racines de P , un polynôme.

Exercice 17.2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $X^n + \frac{1}{X^n} = P_n\left(X + \frac{1}{X}\right)$.
2. Déterminer les pôles de $F_n = \frac{1}{P_n}$.
3. En déduire la décomposition en éléments simples de F_n .

Exercice 17.3.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer en éléments simples

$$F(X) = \frac{1}{X} + \frac{1}{X(X+1)} + \frac{2}{X(X+1)(X+2)} + \dots + \frac{n!}{X(X+1)\dots(X+n)}.$$

Exercice 17.4.

Donner une primitive de $\sqrt{\tan}$ sur $[0, \pi/2[$. On pourra faire une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de $\frac{2X^2}{1+X^4}$.

Exercice 17.5.

Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2 \tan^2(x)} dx.$$

Exercice 17.6.

Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1-\omega}$.

Exercice 17.7.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que $P'^2 - P''P$ n'a pas de racines réelles.

17.2 Eléments de corrections

Indication pour l'exercice 17.1 :

Puisqu'on est dans $\mathbb{C}$, on a, en notant $P = C \prod_{k=1}^r (X - z_k)^{n_k}$,

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^r \frac{n_k}{X - z_k}.$$

Soit z , une racine de P' . Si z est aussi racine de P , z est clairement dans l'enveloppe convexe des racines de P : il suffit de considérer $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $z = z_j$ et de choisir la combinaison $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ où le 1 est en position j . Prenons-en une qui n'est pas racine de P . Alors

$$0 = \frac{P'}{P}(z) = \sum_{k=1}^r \frac{n_k}{z - z_k}.$$

Ainsi,

$$0 = \sum_{k=1}^r \frac{n_k}{z - z_k} = \sum_{k=1}^r \frac{n_k \overline{(z - z_k)}}{|z - z_k|^2}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^r \frac{n_k \bar{z}}{|z - z_k|^2} = \sum_{k=1}^r \frac{n_k \bar{z}_k}{|z - z_k|^2}.$$

Je passe l'égalité au conjugué :

$$\sum_{k=1}^r \frac{n_k z}{|z - z_k|^2} = z \underbrace{\sum_{k=1}^r \frac{n_k}{|z - z_k|^2}}_{\neq 0} = \sum_{k=1}^r \frac{n_k z_k}{|z - z_k|^2}.$$

D'où

$$z = \frac{\sum_{k=1}^r \frac{n_k z_k}{|z - z_k|^2}}{\sum_{k=1}^r \frac{n_k}{|z - z_k|^2}}.$$

Je pose alors $\lambda_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^r \frac{n_i}{|z - z_i|^2}} \frac{n_k}{|z - z_k|^2}$

Indication pour l'exercice 17.2 :

1. Par récurrence sur n . Pour $n = 1$, c'est immédiat, $P_1 = X$. Supposons acquis le résultat au rang $n - 1$. Alors

$$\left(X + \frac{1}{X}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^{n-k} X^{-k} = X^n + \frac{1}{X^n} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{i} (X^{n-2i} + X^{2i-n}) + \mathbb{1}_{n \equiv 0[2]} \binom{n}{n/2}.$$

Par hypothèse de récurrence, on a $X^{n-2i} + X^{2i-n}$ égal à un certain polynôme (qui existe de fait) P_{n-2i} évalué en $(X + 1/X)$. Il suffit alors de poser

$$P_n = X^n - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{i} P_{n-2i}(X) - \mathbb{1}_{n \equiv 0[2]} \binom{n}{n/2}.$$

2. J'écris

$$P_n \left(X + \frac{1}{X} \right) = 0 \iff x^n + \frac{1}{x^n} = 0 \iff x^{2n} = -1 \iff x = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{2n}} =: \omega_k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, $\omega_k + \frac{1}{\omega_k} = 2 \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) =: x_k$ est solution de P . Il y en a n différentes. Donc P_n est scindé à racines simples, de racines x_k pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

3. J'écris

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{P'_n(x_k)} \frac{1}{X - x_k},$$

puisque P_n est S.R.S. En dérivant la relation vérifiée par P_n , j'ai

$$\left(1 - \frac{1}{X^2} \right) P'_n \left(X + \frac{1}{X} \right) = nX^{n-1} - \frac{n}{X^{n+1}}.$$

Évalué en ω_k , j'ai

$$\left(1 - \frac{1}{\omega_k^2} \right) P'_n \left(\omega_k + \frac{1}{\omega_k} \right) = n\omega_k^{n-1} - \frac{n}{\omega_k^{n+1}} = \frac{n}{\omega_k} (\omega_k^n - \omega_k^{-n}).$$

Donc

$$P'_n(x_k) = n \frac{\omega_k^n - \omega_k^{-n}}{\omega_k - \omega_k^{-1}} = n \frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{\sin((2k+1)\pi/2n)} = (-1)^k \frac{n}{\sin((2k+1)\pi/2n)}.$$

Indication pour l'exercice 17.3 :

Je note $F_k = \frac{k!}{\prod_{i=0}^k (X+i)}$. Les pôles de F_k sont simples. J'ai donc

$$F_k = \sum_{i=0}^k \frac{a_{i,k}}{X+i},$$

avec $a_{i,k} = \frac{(-1)^i k!}{i!(k-i)!} = (-1)^i \binom{k}{i}$. J'ai donc

$$F(X) = \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{X+i},$$

avec

$$b_i = \sum_{k=i}^n a_{i,k} = \sum_{k=i}^n (-1)^i \binom{k}{i} =_{\text{exo 2.6}} (-1)^i \binom{n+1}{i+1}.$$

Indication pour l'exercice 17.4 :

Considérons l'intégrale :

$$I_\varepsilon = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sqrt{\tan(t)} dt.$$

On pose d'abord le changement de variable $u = \tan(t)$. Alors $du = (1 + \tan^2(t))dt$, et pour $t = 0$, $u = 0$, et pour $t = \pi/2 - \varepsilon$, on va poser $u = \tan(t) =: m_\varepsilon$. Ainsi :

$$I_\varepsilon = \int_0^{m_\varepsilon} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2} du.$$

Posons le changement de variable $x^2 = u$. Alors $2xdx = du$ et lorsque $u = 0, x = 0$ et lorsque $u = M_\varepsilon, x = \sqrt{m_\varepsilon} =: M_\varepsilon$. Et donc :

$$I_\varepsilon = \int_0^{\sqrt{m_\varepsilon}} \frac{2x^2}{1+x^4} dx.$$

On a :

$$\begin{aligned} x^4 + 1 = 0 &\iff x^4 = -1 = e^{i\pi} \\ &\iff \left(\frac{x}{e^{i\frac{\pi}{4}}} \right)^4 = 1 \\ &\iff \frac{x}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{ik\pi/2}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \\ &\iff x = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}, k \in \{0, 1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

On note les racines $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$. Il existe donc $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tel que :

$$\frac{2x^2}{1+x^4} = \frac{\alpha}{x-\omega_0} + \frac{\beta}{x-\omega_1} + \frac{\gamma}{x-\omega_2} + \frac{\gamma}{x-\omega_3}.$$

A partir de maintenant, il y a plusieurs voies pour continuer. On peut calculer la D.E.S. dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$.

Calculons dans $\mathbb{R}$. Comme

$$(X - \omega_0)(X - \omega_1)(X - \omega_2)(X - \omega_3) = \underbrace{(X - \omega_0)(X - \omega_3)}_{=X^2 - \sqrt{2}X + 1} \underbrace{(X - \omega_1)(X - \omega_2)}_{=X^2 + \sqrt{2}X + 1}$$

on en déduit

$$\frac{2x^2}{1+x^4} = \frac{ax+b}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{cx+d}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

et trouver les constantes a, b, c, d . Cela me donne :

$$\frac{2x^2}{1+x^4} = \frac{(ax+b)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (cx+d)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}{1+x^4}$$

d'où :

$$\frac{2x^2}{1+x^4} = \frac{(a+c)x^3 + (b+a\sqrt{2}+d-c\sqrt{2})x^2 + (a+b\sqrt{2}+c-d\sqrt{2})x + b+d}{1+x^4}.$$

Par identification des coefficients, $a = -c, b = -d, b+d+(a-c)\sqrt{2} = 2, a+c+(b-d)\sqrt{2} = 0$. Donc $b = d = -d = 0$ et $a = -c = \sqrt{2}/2$ d'où :

$$\frac{2x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

On calcule la D.E.S. dans $\mathbb{C}$.

1. Méthode 1 : longue et systématique. Comme notre fraction rationnelle était initialement dans $\mathbb{K}(X)$, on sait que les coefficients devant les éléments simples associées à des pôles qui sont conjugués le sont aussi. Ainsi, $\alpha = \bar{\delta}$ et $\beta = \bar{\gamma}$. Il reste donc à trouver α et β . Pour cela, la méthode systématique est de multiplier par $x - \omega_0$. En effet :

$$\frac{2x^2(x - \omega_0)}{1 + x^4} = \frac{2x^2}{(x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3)} = \alpha + \frac{\beta(x - \omega_0)}{(x - \omega_1)} + \frac{\gamma(x - \omega_0)}{(x - \omega_2)} + \frac{\delta(x - \omega_0)}{(x - \omega_3)}.$$

J'évalue cette égalité en ω_0 . Cela me donne donc :

$$\alpha = \frac{2\omega_0^2}{(\omega_0 - \omega_1)(\omega_0 - \omega_2)(\omega_0 - \omega_3)} = \frac{2i}{\sqrt{2}\sqrt{2}(1+i)\sqrt{2}i} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)} = \frac{1}{2e^{i\pi/4}} = \frac{e^{-i\pi/4}}{2}.$$

J'ai donc

$$\delta = \frac{e^{i\pi/4}}{2}.$$

On fait la même chose pour β .

$$\frac{2x^2(x - \omega_1)}{1 + x^4} = \frac{2x^2}{(x - \omega_0)(x - \omega_2)(x - \omega_3)} = \frac{\alpha(x - \omega_1)}{(x - \omega_0)} + \beta + \frac{\gamma(x - \omega_1)}{(x - \omega_2)} + \frac{\delta(x - \omega_1)}{(x - \omega_3)}.$$

J'évalue cette égalité en ω_1 . Cela me donne donc :

$$\beta = \frac{2\omega_1^2}{(\omega_1 - \omega_0)(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)} = \frac{-2i}{-\sqrt{2}\sqrt{2}i\sqrt{2}(-1-i)\sqrt{2}i} = \frac{1}{-\sqrt{2}(1+i)} = \frac{1}{2e^{5i\pi/4}} = \frac{e^{3i\pi/4}}{2}.$$

J'ai donc :

$$\gamma = \frac{e^{5i\pi/4}}{2}.$$

2. Méthode 2 : très efficace mais ne marche pas tout le temps. On rappelle que si α est pôle simple de $\frac{P}{Q}$, alors le coefficient devant $\frac{1}{X - \alpha}$ dans la D.E.S. dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est $\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$. Ici, on en déduit que

$$\alpha = \frac{2\omega_0^2}{4\omega_0^3} = \frac{1}{2}\bar{\omega}_0 = \frac{1}{2}\omega_3.$$

(rappel : $\omega_3 = \bar{\omega}_0$ car $|\omega_0|^2 = 1$). On obtient de la même façon $\beta = \frac{1}{2}\omega_2$, $\gamma = \frac{1}{2}\omega_1$ et $\delta = \frac{1}{2}\omega_0$.

Ensuite, on veut écrire celle dans $\mathbb{R}$. Pour cela, on rassemble les éléments simples associées aux pôles deux à deux conjugués. On écrit donc

$$\frac{\alpha}{X - \omega_0} + \frac{\delta}{X - \omega_3} = \frac{1}{(X - \omega_0)(X - \omega_3)} \left(\frac{1}{2}\omega_3(X - \omega_3) + \frac{1}{2}\omega_0(X - \omega_0) \right) = \frac{1}{2} \frac{X(\omega_0 + \bar{\omega}_0) - (\omega_0^2 + \bar{\omega}_0^2)}{X^2 - 2\sqrt{X} + 1}.$$

On conclut en remarquant que $z^2 + \bar{z}^2 = 2(\Re(z)^2 - \Im(z)^2)$ et que $\Re(\omega_p)^2 = \Im(\omega_q)^2$ pour tout $1 \leq p, q \leq 4$. On a donc

$$\frac{\alpha}{X - \omega_0} + \frac{\delta}{X - \omega_3} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}X}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} ; \quad \frac{\beta}{X - \omega_1} + \frac{\gamma}{X - \omega_2} = \frac{-1}{2} \frac{\sqrt{2}X}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}$$

On a envie de reconnaître une dérivée du dénominateur au numérateur. Faisons en sorte que.

$$\frac{2x^2}{1 + x^4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{2x - \sqrt{2} + \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{2x + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Et donc :

$$\frac{2x^2}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{2}{4} \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{2}{4} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

J'ai déjà deux primitives facile. La 1 et la 3. Pour les deux autres, il faut un peu travailler. A base de forme canonique ...

$$x^2 - \sqrt{2}x + 1 = x^2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

On connaît la primitive de $1/x^2 + 1$ (en fait, on connaît aussi la primitive de $1/x^2 + a^2$ mais elle n'est pas « exigible »). Ici, j'ai $1/2$. Donc j'ai :

$$\frac{1}{2} \left(\left(\sqrt{2}x - 1 \right)^2 + 1 \right).$$

et

$$x^2 + \sqrt{2}x + 1 = x^2 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\left(\sqrt{2}x + 1 \right)^2 + 1 \right).$$

D'où en faisant apparaître les dérivées des dénominateurs au numérateur

$$\frac{2x^2}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x - 1\right)^2 + 1} - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x + 1\right)^2 + 1}.$$

Et je sais intégrer ça.

$$I_\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \right]_0^{M_\varepsilon} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\arctan(\sqrt{2}x - 1) \right]_0^{M_\varepsilon} - \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \right]_0^{M_\varepsilon} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\arctan(\sqrt{2}x + 1) \right]_0^{M_\varepsilon}$$

Ce qui veut dire (en rentrant les changements de variables), en utilisant le fait que $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$ et que $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ si $ab < 1$ et $+\pi$ si $ab > 1$, mais on s'en fiche de la constante car dans un crochet, les constantes, on s'en fiche !, j'ai donc :

$$I_\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\ln \left(\frac{\tan(t) - \sqrt{2 \tan(t)} + 1}{\tan(t) + \sqrt{2 \tan(t)} + 1} \right) \right]_0^{\pi/2-\varepsilon} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\arctan \left(\frac{2\sqrt{2 \tan(t)}}{2 - 2 \tan(t)} \right) \right]_0^{\pi/2-\varepsilon}$$

On pose alors la fonction T définie par :

$$T : t \mapsto \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\ln \left(\frac{\tan(t) - \sqrt{2 \tan(t)} + 1}{\tan(t) + \sqrt{2 \tan(t)} + 1} \right) + 2 \arctan \left(\frac{2\sqrt{2 \tan(t)}}{2 - 2 \tan(t)} \right) \right)$$

Alors le logiciel de calcul formel WolframAlpha[®], on arrive à lui faire dire que :

$$\frac{d}{dt} T = \sqrt{\tan}.$$

Remarque 1. On peut être plus astucieux : la suite n'est que formelle : on ne met pas les bornes, etc. On remarque que :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2.$$

Donc je calcule :

$$\int \frac{2x^2}{1+x^4} dx = \int \frac{2}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} dx + \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} dx.$$

On pose le changement de variable $v = x + \frac{1}{x}$, $w = x - \frac{1}{x}$. Alors :

$$dv = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx ; \quad dw = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

Ce qui donne :

$$\int \frac{1}{v^2 - 2} dv + \int \frac{1}{w^2 + 2} dw.$$

Soit on connaît la primitive de $x \mapsto 1/x^2 - 1$ sans faire de D.E.S., a.k.a. *argth*, soit on fait une D.E.S.. Concernant la remarque de tout à l'heure sur les primitives de $1/x^2 + a^2$, je vais la donner là :

$$\left(x \mapsto \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}.$$

et

$$\left(x \mapsto \frac{-1}{a} \operatorname{argth}\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = x \mapsto \frac{1}{x^2 - a^2}.$$

et il peut être utile de savoir que :

$$\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

ce qui permet de retrouver les résultats selon l'une ou l'autre méthode. Bref, mon intégrale vaut finalement :

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} \operatorname{argth}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right).$$

Cette fonction ne dépend pas explicitement de t . Pour ça, il faut revenir sur les changements de variables réalisés :

$$u = \tan(t), x^2 = \tan(t), v = x + 1/x, w = x - 1/x.$$

Donc :

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} \operatorname{argth}\left(\frac{\frac{\sqrt{\tan(t)} + \frac{1}{\sqrt{\tan(t)}}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{\tan(t)} - \frac{1}{\sqrt{\tan(t)}}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right).$$

Et en remettant tout bien, on retrouve normalement le même résultat.

Indication pour l'exercice 17.5 :

Comme annoncé en khôlle, cet exercice n'est qu'un calcul dans un exercice réalisable en spé. Je vous mets tout de même la correction de spé. Les calculs de l'intégrale et de la DES étant les mêmes.

On cherche à calculer la quantité suivante :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan(x)} dx.$$

Soit $I : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(t \tan(x))}{\tan(x)} dx$. Pourvu que cela soit définie, l'intégrale cherchée vaut donc $I(1)$ car $\arctan \circ \tan$ vaut l'identité sur $[0, \pi/2[$. Intéressons-nous donc à l'ensemble de définition de cette fonction. Déjà, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'intégrande est continue sur $]0, \pi/2[$. Puisque $\arctan(X) \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X$ et que $t \tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} tx$, $\frac{\arctan(t \tan(x))}{\tan(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} t$, donc l'intégrale est bien définie au voisinage de 0.

Concernant $\pi/2$, l'intégrande tend vers 0 lorsque $x \rightarrow \pi/2^-$. Ainsi, $I(t)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$. Le calcul

précédent montre en fait que l'intégrande est prolongeable par continuité en 0 et en $\frac{\pi}{2}$. Je me suis donc ramené à l'intégrale d'une fonction continue sur un compact $[0, \pi/2]$. I est donc dérivable (de la variable t) et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, I'(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\tan(x)} \frac{\tan(x)}{1+t^2 \tan^2(x)} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+t^2 \tan^2(x)} dx.$$

Réalisons le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = \tan(x)$. Alors $du = (1 + \tan^2(x))dx = (1 + u^2)dx$ et pour $x = 0, u = 0$ puis pour $x = \pi/2, u = +\infty$ (puisque $x \leq \frac{\pi}{2}$). J'ai donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, I'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2 u^2} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{t^2-1} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2 u^2} du - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du \right).$$

On sait primitiver les deux intégrandes. J'ai donc (je fais un petit abus avec les crochets)

$$\forall t \in \mathbb{R}, I'(t) = \frac{1}{t^2-1} [t \arctan(tu) - \arctan(u)]_0^{+\infty} = \frac{1}{t^2-1} \left(t \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2(t+1)}.$$

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}, I(t) = \frac{\pi}{2} \ln(t+1) + C$. Pour $t = 0, I(t) = 0$ (car le numérateur devient nul) donc $\frac{\pi}{2} \ln(1) + C = C = 0$. J'ai donc $\forall t \in \mathbb{R}, I(t) = \frac{\pi}{2} \ln(t+1)$. Pour $t = 1$, j'ai donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan(x)} dx = \frac{\pi \ln(2)}{2}.$$

Indication pour l'exercice 17.6 :

Soit $P = \sum_{k=0}^n X^k$. Alors $P = \prod_{k=1}^n (X - \omega_k)$, avec $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. J'ai

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - \omega_k},$$

donc

$$\frac{P'}{P}(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \omega_k} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega}.$$

Or, $P'(1) = \frac{n(n-1)}{2}$ et $P'(1) = n$. Donc

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega} = \frac{n-1}{2}.$$

Indication pour l'exercice 17.7 :

Soit $P = C \prod_{k=1}^r (X - z_k)^{n_k}$, bien sûr z_k deux-à-deux distincts. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^r \frac{n_k}{X - z_k}.$$

Donc

$$\left(\frac{P'}{P}\right)' = \frac{P''P - P'^2}{P^2} = -\sum_{k=1}^r \frac{n_k}{(X - z_k)^2}.$$

Soit α , réel non racine de P . Alors

$$\frac{P''P - P'^2}{P^2}(\alpha) = -\sum_{k=1}^r \frac{n_k}{(\alpha - z_k)^2} < 0.$$

Donc α n'est pas racine de $P'^2 - P''P$. Ainsi, les seules racines réelles de $P'^2 - P''P$ sont nécessairement racines de P . Soit β une telle racine. Alors $P'^2(\beta) - P''(\beta)P(\beta) = 0 = P'^2(\beta)$.

Donc β est racine de P'^2 donc de P' . Mais si β est racine de P , elle est donc racine double de P . β étant réelle, P étant S.R.S. sur $\mathbb{R}$, on a une contradiction. Donc $P'^2 - P''P$ n'a pas de racines réelles.

Chapitre 18

Espaces vectoriels

18.1 Exercices

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel sur un corps, a priori $\mathbb{K}$ quelconque.

Exercice 18.1.

Montrer que dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions paires et impaires sont en somme directe.

Exercice 18.2. [Virage glissant]

Soit F , sous-espace vectoriel de E . Que dire de $\text{Vect}(E \setminus F)$? Et $E \setminus F$?

Exercice 18.3.

Soit $E = \text{Vect}((1, 0, 0), (1, 1, 1))$. Expliciter un $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\ker(f) = E$.

Exercice 18.4.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(f^2) = \ker(f) \iff \text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.

Exercice 18.5.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v - v \circ u = u$. Déterminer $u^k \circ v - v \circ u^k$.

Exercice 18.6.

Soit F, G , deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $F + G = E$. Soit H , un supplémentaire de $F \cap G$ dans F . Montrer que $H \oplus G = E$.

Exercice 18.7.

Soit E , l'ensemble des suites réelles, et F , l'ensemble des suites d'indice pair nul, G , l'ensemble des suites $(u_n)_n \in E$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_{2n+1}$.

Exercice 18.8.

Soit f, g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g \circ f = f, g \circ f \circ g = g$. Montrer que $E = \ker(g) \oplus \text{im}(f)$, puis calculer $f(\text{im}(g))$.

Exercice 18.9. [Liberté de familles de fonctions]

Montrer que dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel, les familles suivantes sont libres :

1. $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ où $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$
2. $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^{++}}$ où $f_\lambda : x \mapsto \cos(\lambda x)$.

Exercice 18.10. 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(x, f(x))$ soit liée pour tout $x \in E$. Montrer que f est une homothétie.

2. En déduire le centre de $\mathcal{L}(E)$ i.e. les endomorphismes qui commutent avec tout autre endomorphisme.
3. Trouver une autre preuve pour l'anneau des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (c'est l'exercice 14.6).

Exercice 18.11.

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ et $(V_k)_{1 \leq k \leq n}$, des sous-espaces vectoriels non triviaux de E . Si $E = \bigcup_{k=1}^n V_k$, montrer que $\mathbb{K}$ est fini, et que $k \geq \text{Card}(\mathbb{K}) + 1$.

Exercice 18.12. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est nilpotent lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $u^n = 0$. Dans la suite, u est nilpotente.

1. Montrer qu'il existe un unique $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. On appelle p l'indice de nilpotence de u . Dans la suite, p est l'indice de nilpotence de u .
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ soit une famille libre.
3. Montrer que la suite $(\ker(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante puis stationne. Déterminer l'instant à partir duquel la suite stationne.
4. Que dire à propos des images itérées?
5. Montrer que $\text{Id} - u$ est inversible.
6. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Id} - uv$ soit inversible. Montrer que $\text{Id} - vu$ l'est aussi. (On pourra traiter le cas où uv est nilpotente dans un premier temps.)

Exercice 18.13. Montrer que :

$$\exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(X) = \sum_{k=1}^n a_k P(X+k).$$

On pourra considérer $\delta : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ et calculer $\deg(\delta(P))$ en fonction de $\deg(P)$ pour P non constant.

Exercice 18.14. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 0, P'(0) \neq 0$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P(f) = 0$. Montrer que

$$E = \text{Im}(f) \oplus \ker(f).$$

On pourra traiter le cas $P = X^2 - X$ et $X^5 - 2X$ pour commencer.

18.2 Eléments de corrections

Indication pour l'exercice 18.1 :

Soit f , une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ est une décomposition de la forme voulue. Et on sait qu'une fonction paire et impaire est nulle.

Indication pour l'exercice 18.2 :

On va montrer que $\text{Vect}(E \setminus F) = E$ si F est un sev différent de E . (Sinon, c'est évident). En effet, l'inclusion de gauche à droite est claire. Soit maintenant $x \in E$. Soit $x \in E \setminus F$ et auquel cas, c'est clair; soit $x \in F$, et avec un $y \notin F$, j'ai $x + y \notin F$. Donc $x = (x + y) - y$ est une différence d'éléments qui ne sont pas dans F , donc $x \in \text{Vect}(E \setminus F)$.

Indication pour l'exercice 18.3 :

Soit $w = (0, 0, 1)$. Alors u, v, w forme une base. Soit f définie par $f(u) = f(v) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $f(w) = (1, 0, 0)$. On a $\ker(f) = E$.

Indication pour l'exercice 18.4 :

On montre par double implication.

$\Rightarrow$ Soit $x \in \operatorname{Im}(f) \cap \ker(f)$. Alors $f(x) = 0$ et il existe $\alpha \in E$ tel que $f(\alpha) = x$ donc $f^2(\alpha) = 0$. Mais $\ker(f^2) = \ker(f)$. Donc $x = f(\alpha) = 0$. L'inclusion réciproque est claire.

$\Leftarrow$ Il est clair que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. Réciproquement, soit $x \in \ker(f^2)$. Alors $f(f(x)) = 0$. Donc $f(x) \in \ker(f)$ mais il est clair que $f(x) \in \operatorname{Im}(f)$. Donc $f(x) = 0$. Ainsi, $x \in \ker(f)$.

Indication pour l'exercice 18.5 :

On réalise une récurrence sur k pour montrer $u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k$. J'écris l'hérédité. L'égalité $u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k$ donne, par composition à gauche,

$$u^{k+1} \circ v - u \circ v \circ u^k = ku^{k+1},$$

et en composant $u \circ v - v \circ u = u$ à droite par u^k , on a

$$u \circ v \circ u^k - v \circ u^{k+1} = u^{k+1}.$$

On additionne et on trouve le résultat.

Indication pour l'exercice 18.6 :

Soit $x \in E$. Alors il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$. Il existe alors $h \in H$ et $f' \in F \cap G$ tel que $f = h + f'$. Alors $x = f' + h + g$. Mais $f' \in G$. Donc $x = h + (f' + g)$. D'où $E = H + G$.

Quid de l'intersection ? Soit $x \in H \cap G$. Alors $x \in H \subset F$. De plus, on a $H \cap (F \cap G) = \{0\}$. Donc $H \cap G = \{0\}$.

Indication pour l'exercice 18.7 :

Il est clair que $F \cap G = \{0\}$. Soit $u \in E$. Si $u_n = v_n + w_n$ avec $v \in F, w \in G$, alors $u_{2n} = w_{2n}$ et $w_{2n+1} = w_{2n}$. Donc w_n est entièrement déterminé.

Soit maintenant $u \in E$. Soit w définie par $w_{2n} = w_{2n+1} = u_{2n}$. Posons $v_n = u_n - w_n$. Alors $v_{2n} = u_{2n} - w_{2n} = 0$ par construction. Donc $v \in F$. Il est clair que $w \in G$. D'où $E = F + G$. D'où la somme directe.

Indication pour l'exercice 18.8 :

On écrit la décomposition $x = x - f(g(x)) + f(g(x))$. On montre ensuite aisément que $f(\operatorname{Im}(g)) = \operatorname{Im}(f)$.

Indication pour l'exercice 18.9 :

1. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, des scalaires rangés dans l'ordre croissant, 2 à 2 distincts. Alors soit une relation de

liaison $\sum_{k=1}^n \mu_k \exp(\lambda_k x) = 0$. L'idée est la suivante : j'ai

$$\mu_n = -\frac{1}{\exp(\lambda_n x)} \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \exp(\lambda_k x).$$

Or, il est clair que la limite en $+\infty$ du membre de droite est nulle car $\lambda_n > \lambda_i$ pour $i < n$. Donc $\mu_n = 0$.

Considérons donc $A = \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : \mu_k \neq 0\}$. Supposons par l'absurde que A est non vide. Alors A est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ donc admet un plus grand élément, disons n_0 . Alors

$$0 = \sum_{k=1}^n \mu_k \exp(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^{n_0} \mu_k \exp(\lambda_k x)$$

ce qui donne

$$\mu_{n_0} = -\frac{1}{\exp(\lambda_{n_0} x)} \sum_{k=1}^{n_0-1} \mu_k \exp(\lambda_k x).$$

On en déduit que $\mu_{n_0} = 0$ ce qui contredit son appartenance à A . Ainsi, A est vide donc la famille $(\exp(\lambda_i \cdot))_{1 \leq i \leq n}$ est libre ce qui conclut.

2. On montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda_1 < \dots < \lambda_n \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}, \underbrace{\left(\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \mu_k \cos(\lambda_k x) = 0 \right)}_{\mathcal{P}_n} \implies \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu_k = 0.$$

Pour $n = 1$, le résultat est clair, la fonction $\cos(\lambda \cdot)$ n'étant jamais identiquement nulle pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Supposons le résultat acquis au rang $n - 1$. Soit $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \in \mathbb{R}^{+*}, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^n \mu_k \cos(\lambda_k x) = 0. \quad (18.1)$$

On dérive deux fois et on obtient

$$-\sum_{k=1}^n \mu_k \lambda_k^2 \cos(\lambda_k x) = 0. \quad (18.2)$$

On réalise alors $\lambda_n^2(18.1) + (18.2)$ et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k (\lambda_n^2 - \lambda_k^2) \cos(\lambda_k x) = 0.$$

Par $\mathcal{P}_{n-1}$, on en déduit que $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \mu_k (\lambda_n^2 - \lambda_k^2) = 0$. Comme les λ_k sont rangés dans l'ordre strictement croissant, $\lambda_n^2 > \lambda_k^2$ (on rappelle que les λ_k sont positifs) donc $\mu_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Cela donne $(\mathcal{P}_n)$.

Ainsi, on a la liberté souhaitée.

Indication pour l'exercice 18.10 :

1. Soit $x \in E$ non nul. Alors il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}, u(x) = \lambda_x x$. On note λ_x car ce scalaire dépend de x à priori. Idée : On peut donc définir une fonction $p : x \mapsto \lambda_x$ (qui à x associe le coefficient λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$). On va p est une fonction constante. Soit $(x, y) \in E^2, x \neq y$, tous deux non nuls. Deux cas :

- (x, y) est liée. Il existe alors k réel, tel que $x = ky$. Alors $u(x) = u(ky) = ku(y)$. Mais la remarque préliminaire me dit que $u(x) = \lambda_x x$, $u(y) = \lambda_y y$ puisque x et y sont non nuls. J'ai donc $\lambda_x x = k\lambda_y y = \lambda_y x$. Donc $(\lambda_x - \lambda_y)x = 0$. Mais comme x n'est pas nul, j'ai $\lambda_x = \lambda_y$.
- (x, y) est libre. Alors $x + y$ est non nul. Donc

$$u(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$$

Mais par linéarité, j'ai :

$$u(x + y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

Donc :

$$\lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y = \lambda_x x + \lambda_y y \text{ i.e. } (\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0.$$

Par liberté de (x, y) , j'ai donc :

$$\lambda_{x+y} - \lambda_x = 0 = \lambda_{x+y} - \lambda_y \text{ i.e. } \lambda_x = \lambda_y.$$

Bilan : dans les deux cas, pour tout $x \neq y$, j'ai $\lambda_x = \lambda_y$. Donc λ ne dépendait pas de x . Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$. Donc f est bien une homothétie.

2. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Soit $D = \text{Vect}(x)$ et p projecteur sur D . Alors f commute avec p . On en déduit que $f(D) \subset D$. En effet, si $x \in D$, alors x s'écrit $p(y)$, $y \in E$ et alors

$$f(x) = f(p(y)) = p(f(y)) \in \text{Im}(p) = D$$

donc f stabilise toute droite vectorielle : c'est l'objet de la question 1 donc f est une homothétie.

3. Ce n'est pas dur, une indication est donnée dans le corrigé de l'exercice 14.6.

Indication pour l'exercice 18.11 :

Quitte à retirer V_1 , supposons que $V_1 \not\subset \bigcup_{k=2}^n V_i$. Je peux donc prendre $x \in V_1 \setminus \bigcup_{k=2}^n V_i$. Puisque $\left(\bigcup_{k=2}^n V_i\right) \not\subset V_1$ car sinon $V_1 = E$ (ce qui est exclu), donc je peux trouver $y \in \left(\bigcup_{k=2}^n V_i\right) \setminus V_1$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $z := y + \lambda x \in E$. Si $z \in V_1$, alors comme $\lambda x \in V_1$, on a $y \in V_1$ ce qui est exclu. Ainsi, $z \in E \setminus V_1$ donc comme E est recouvert par les $(V_k)_{1 \leq k \leq n}$, il existe $k_\lambda \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tel que $y + \lambda x \in V_{k_\lambda}$ et si $y + \lambda x$ appartient à plusieurs $(V_k)_{2 \leq k \leq n}$, on note k_λ le plus petit indice.

On souhaite alors étudier l'application f qui à $\lambda \in \mathbb{K}$ associe $k_\lambda \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

- Elle est bien définie par unicité du plus petit indice k_λ .
- Elle est injective : en effet, si $f(\lambda) = f(\mu)$, alors $y + \lambda x \in V_{k_\mu}$ et $y + \mu x \in V_{k_\mu}$ donc la différence $(\lambda - \mu)x$ est dans V_{k_μ} . Sauf si $\lambda - \mu = 0$, cela induit que $x \in V_{k_\mu}$ ce qui est exclu car $x \in V_1 \setminus \bigcup_{k=2}^n V_i$. Ainsi, $\lambda = \mu$

et f est injective.

Ainsi, f étant injective, on en déduit que $|\mathbb{K}| \leq |\llbracket 2, N \rrbracket| = N - 1$ ce qui donne bien

$$N \geq |\mathbb{K}| + 1.$$

Remarque. Il est bien connu que si $V_1 \cup V_2$ est un sous-espace vectoriel de E , alors $V_1 \subset V_2$ ou $V_2 \subset V_1$. Le résultat précédent n'entre pas en contradiction avec ce résultat puisqu'alors, on demande à ce que $|\mathbb{K}| = 1$.

Une remarque de la remarque. On pourrait rétorquer qu'un corps à 1 élément existe. En fait, il y a des discussions sur ce sujet et je ne compte pas m'étaler sur ce point. En Maths Sup/Spé, on va considérer que pour $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps, le neutre pour $+$ et pour $\times$ doivent différer.

Indication pour l'exercice 18.12 :

1. Soit $A = \{n \in \mathbb{N} : u^n = 0\}$. Alors A contient d (donc est non vide) et est une partie de $\mathbb{N}$: elle admet donc un plus petit élément que je note p . Alors $u^p = 0$ et $p \neq 0$ car $u^0 = \text{Id}$ donc $p \in \mathbb{N}^*$. De plus, $u^{p-1} = 0$ entraîne que $p-1 \in A$ ce qui contredit la minimalité de p . Ainsi, $u^p = 0, u^{p-1} \neq 0$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $x \in E \setminus \ker(f^{p-1})$ qui est non vide car $g^{n-1} \neq 0$. Soit $\mathcal{B} = \{g^i(x) : 0 \leq i \leq n-1\}$. Montrons que c'est une famille libre.

Soit donc $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ des réels tels que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0.$$

Soit $A = \{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : \lambda_i \neq 0\}$. Supposons par l'absurde que A est non vide. Alors A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément i_0 . On a donc $\lambda_i = 0$ si $i < i_0$ donc

$$\sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0.$$

On compose par f^{p-i_0-1} . On a alors

$$0 = \sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i f^{n-i_0+i-1}(x) = \lambda_{i_0} f^{n-i_0+i_0-1}(x) + \sum_{i=i_0+1}^{p-1} \lambda_i \underbrace{f^{n-i_0+i-1}(x)}_{=0} = \lambda_{i_0} f^{p-1}(x).$$

(cela donne 0 car $n - i_0 + i - 1 \geq n$). Comme $f^{p-1}(x) \neq 0$, nécessairement, $\lambda_{i_0} = 0$ donc $i_0 \notin A$. Contradiction. Ainsi, A est vide donc $\mathcal{B}$ est libre.

3. Il est évident que

$$\{0\} = \ker(u^0) = \ker(\text{Id}) \subset \ker(u) \subset \ker(u^2) \subset \dots \subset \ker(u^{p-1}) \subset \ker(u^p) = E.$$

Supposons un instant qu'il existe $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $\ker(u^i) = \ker(u^{i+1})$. Déjà, $i \neq p-1$ par minimalité de p . Ensuite, montrons que $\forall n \geq i, \ker(u^i) = \ker(u^n)$. On fait ça par récurrence sur $\mathbb{N}_{\geq i}$.

(a) Pour $n = i$, c'est évident.

(b) Supposons le résultat acquis au rang $n > i$. Alors on a déjà $\ker(u^n) \subset \ker(u^{n+1})$. Soit maintenant $x \in \ker(u^{n+1})$. Alors $u^{n+1}(x) = 0$ donc $u^n(u(x)) = 0$. Ainsi, $u(x) \in \ker(u^n) = \ker(u^i)$ donc $u^i(u(x)) = u^{i+1}(x) = 0$. Puisque $n > i$, on en déduit que $u^n(x) = 0$ donc $x \in \ker(u^n)$. Ainsi, $\ker(u^i) = \ker(u^n) = \ker(u^{n+1})$.

Ainsi, on est strictement croissant jusqu'à p , puis on stationne.

4. Pour les images, l'inclusion est dans l'autre sens.
5. La formule de Bernoulli s'applique puisque Id et u commutent : on a

$$\text{Id} = \text{Id} - u^p = (\text{Id} - u) \left(\sum_{i=0}^{p-1} u^i \right) = \left(\sum_{i=0}^{p-1} u^i \right) (\text{Id} - u).$$

Ainsi, $\text{Id} - u$ est inversible et son inverse est $\sum_{i=0}^{p-1} u^i$.

6. Traitons le cas nilpotent. Comme uv est nilpotente, disons d'indice p , alors vu l'est aussi d'indice au plus $p+1$: en effet,

$$(vu)^{p+1} = v(uv)^p u = 0.$$

Ainsi, $\text{Id} - vu$ est inversible et son inverse est, par la question précédente,

$$\sum_{i=0}^p (vu)^i = \text{Id} + \sum_{i=1}^p (vu)^i = \text{Id} + \sum_{i=0}^{p-1} (vu)^{i+1} = \text{Id} + \sum_{i=0}^{p-1} v(uv)^i u = \text{Id} + v \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{p-1} uv \right)}_{=(\text{Id}-uv)^{-1}} u.$$

Considérons maintenant le cas général et posons $w = \text{Id} + v(\text{Id} - uv)^{-1}u$. Montrons que $w(\text{Id} - vu) = (\text{Id} - vu)w = \text{Id}$. Je rédige la preuve pour les matrices et je ne fais qu'un sens. Pour les matrices, un seul sens suffit, pour les endomorphismes de dimension infinie, il faudrait faire les deux...

$$\begin{aligned} (I_n + B(I_n - AB)^{-1}A)(I_n - BA) &= I_n - BA + B(I_n - AB)^{-1}A - B(I_n - AB)^{-1}ABA \\ &= I_n + B(-I_n + (I_n - AB)^{-1} - (I_n - AB)^{-1}AB)A. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $-I_n + (I_n - AB)^{-1} - (I_n - AB)^{-1}AB = 0_n$. Montrons-le. Pour ce faire, mieux vaut multiplier par $I_n - AB$ pour ôter les -1 et puisque elle est inversible, cette opération induit une équivalence. On écrit

$$(I_n - AB)(-I_n + (I_n - AB)^{-1} - (I_n - AB)^{-1}AB) = -I_n + AB + I_n - AB = 0_n.$$

Ainsi, $-I_n + (I_n - AB)^{-1} - (I_n - AB)^{-1}AB = 0_n$ donc $(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A)(I_n - BA) = I_n$ et $I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$ est un inverse de $I_n - BA$. Ainsi, $I_n - BA$ est inversible d'inverse $I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$.

Indication pour l'exercice 18.13 :

Si P est constant, alors $\delta(P) = 0$. Sinon, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n . P s'écrit

$$\sum_{k=0}^n a_k X^k$$

donc

$$\delta(P) = P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i - a_k X^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=i+1}^n a_k \binom{k}{i} \right) X^i.$$

Le terme devant X^n est nul et le terme devant X^{n-1} est na_n qui est non nul par hypothèse donc le degré de $\delta(P)$ est $\deg(P) - 1$. On en déduit par récurrence immédiate que si P est de degré k , $\delta^{k+1}(P) = 0$ et $\forall p \leq k, \deg(\delta^p(P)) = \deg(P) - p$. Ainsi, $\deg(\delta^n(P)) = 0$ pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Pour conclure, on considère $\tau : P \mapsto P(X+1)$. Alors $\tau^k : P \mapsto P(X+k)$ et $\delta = \tau - \text{Id}$. τ et Id commutent donc par la formule du binôme,

$$\delta^n = (\tau - \text{Id})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tau^k$$

donc

$$0 = \delta^n(P) = P(X) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P(X+k).$$

Indication pour l'exercice 18.13 :

Je traite directement le cas général. Ne pas hésiter à écrire les sommes avec des $\dots$, ce n'est pas évident de manipuler $P(f)$. Je rédige comme en Maths Spé. Par hypothèse, P s'écrit

$$\sum_{k=1}^n a_k X^k$$

avec $a_1, \dots, a_n$ des scalaires. L'hypothèse $P'(0) \neq 0$ entraîne $a_1 \neq 0$. Soit $Q(X) = P(X) - a_1 X$. $Q(X)$ s'écrit alors $X^2 R(X)$.

- Déjà, l'intersection est réduite à $\{0\}$. En effet, si x est un vecteur dans l'intersection, alors il existe y tel que $f(y) = x$ et $f(x) = 0$ donc $f^2(y) = 0$. Ainsi,

$$0 = P(f)(y) = Q(f)(y) + a_1 f(y) = [R(f) \circ f^2](y) + a_1 f(y) = R(f)[f^2(y)] + a_1 f(y) = a_1 f(y).$$

Comme $a_1 \neq 0$, $f(y) = 0$ donc $x = 0$.

- Ensuite, comme pour les projecteurs, on remarque que $\frac{-1}{a_1}Q(f) = f$. On considère alors le polynôme $S(X) = \frac{-1}{a_1}XR(X)$. Alors pour tout $x \in E$, on écrit $x = x - S(f(x)) + S(f(x))$. Comme $S(f)(x) = f\left(-\frac{1}{a_1}R(f)[x]\right)$, $S(f(x)) \in \text{Im}(f)$. Ensuite,

$$f(x - S(f(x))) = f(x) - f(S(f(x))) = f(x) - [XS(X)]f(x) = f(x) - \frac{-1}{a_1}Q(f)(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

On a la décomposition souhaitée.

Chapitre 19

Autour des projecteurs

Dans toute la suite, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

19.1 Exercices

Exercice 19.1.

Soit p, q , deux projecteurs de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$. Montrer que si $p + q$ est un projecteur, alors $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$ et $\ker(p + q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

Exercice 19.2.

Soit p, q , deux projecteurs de $\mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im}(p) \subset \ker(q)$. Soit $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est un projecteur. Calculer son noyau et son image.

Exercice 19.3. [Projecteurs associées]

Soit E un espace vectoriel. Deux éléments p, q de $\mathcal{L}(E)$ sont des projecteurs associées s'il existe dans E deux sous-espaces supplémentaires F et G tels que $\forall x \in E, x = p(x) + q(x), p(x) \in F, q(x) \in G$. On dira que deux endomorphismes vérifient (a) lorsque $f \circ g = 0, f + g = \text{Id}$.

1. Soit p, q deux projecteurs associées. Déterminer le noyau et l'image de p puis de q . Calculer $p + q$ puis $p \circ q, q \circ p, p \circ p, q \circ q$.
2. Montrer que si p, q vérifient (a), alors p et q sont des projecteurs.
3. Montrer que si p est un projecteur, il existe q projecteur en fonction de p tel que p, q vérifient (a).
4. Montrer que p et q sont des projecteurs associées si, et seulement si, ils vérifient (a).

Exercice 19.4. 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur. Montrer que $\ker(u \circ p) = \ker(p) \oplus (\ker(u) \cap \text{Im}(p))$ puis que $\text{Im}(p \circ u) = \text{Im}(p) \cap (\ker(p) + \text{Im}(u))$.

2. Soit p, q , deux projecteurs de E . Montrer que $p \circ q$ en est un si, et seulement si, $\text{Im}(p) \cap (\ker(p) + \text{Im}(q)) \subset \text{Im}(q) \oplus (\ker(p) \cap \ker(q))$.

Exercice 19.5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E), p$ projecteur de E . Montrer que p et u commutent si, et seulement si $\text{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont stables par u .

Exercice 19.6.

Soit E , un espace vectoriel et F, G , deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que si F et G admettent un supplémentaire commun dans E , alors il existe un isomorphisme entre F et G . Réciproque ?

19.2 Eléments de corrections

Correction de l'exercice 19.1 :

Supposons que $p + q$ est un projecteur. Alors $(p + q)(p + q) = p + pq + qp + q = p + q$. Donc $pq + qp = 0$. J'ai donc $pq + pqp = 0$ en composant par p à gauche et $pqp + qp = 0$ en composant p à droite. Donc $pq + qp = 0$ et $pq = qp$. Ainsi, $pq = qp = 0$.

Réciproquement, $(p + q)(p + q) = p + pq + qp + q = p + q$ car $pq = qp = 0$. Donc $p + q$ est un projecteur.

$\boxed{\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)}$? Soit $y \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$. Soit x, x' tel que $p(x) = y, q(x') = y$. Alors $0 = q(p(x)) = q(y) = q(q(x')) = q(x') = y$. Donc $y = 0$ d'où l'intersection réduite à $\{0\}$. Ensuite, puisqu'il est clair que $\text{Im}(p + q) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$, soit $y \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$. Alors il existe x, x' tel que $p(x) + q(x') = y$. Donc $(p + q)(y) = p(x) + 0 + 0 + q(x') = y$. Donc $y \in \text{Im}(p + q)$.

$\boxed{\ker(p + q) = \ker(p) \cap \ker(q)}$? L'inclusion $\ker(p) \cap \ker(q) \subset \ker(p + q)$ est claire. Soit $x \in \ker(p + q)$. Alors $p(x) + q(x) = 0$. Donc $p(p(x) + q(x)) = 0$ donc $p(x) + 0 = 0$. Donc $p(x) = 0$ et $x \in \ker(p)$. On fait la même chose pour q .

Indication pour l'exercice 19.2 :

Puisque $\text{Im}(p) \subset \ker(q)$, alors $\forall x \in E, q(p(x)) = 0$, donc $q \circ p = 0$. J'ai donc

$$r^2 = (p + q - pq)(p + q - pq) = p^2 + pq - p^2q + qp + q^2 - qpq - pqp - pq^2 + pqpq = p + pq - pq + 0 + q - 0 - 0 - pq + 0 = p + q - pq = r.$$

On va montrer que $\ker(r) = \ker(p) \cap \ker(q)$ et $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.

Pour le noyau, le sens réciproque est clair. Pour l'autre, on a $pr = p^2 = p$ donc $\ker(r) \subset \ker(p)$. De même $qr = q^2 = q$ et $\ker(r) \subset \ker(q)$. OK.

Pour l'image, le sens direct est clair. Pour l'autre, soit $x \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$, et donc $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Im}(p), x_2 \in \text{Im}(q)$. Alors $q(x) = q(x_1) + q(x_2) = 0 + x_2 = x_2$. Ainsi, $r(x) = p(x) + q(x) - pq(x) = x_1 + p(x_2) + x_2 - p(x_2) = x_1 + x_2 = x$. Donc $x \in \text{Im}(r)$. Ainsi, on a le caractère somme. Pour avoir le caractère directe, on cherche à avoir l'intersection nulle, et c'est clair car $qp = 0$.

Indication pour l'exercice 19.3 :

1. On montre facilement que $\ker(p) = \text{Im}(q) = G, \ker(q) = \text{Im}(p) = F$. On a $p + q = \text{Id}, pq = 0, qp = 0, p^2 = p, q^2 = q$.
2. On a $p = p(p + q) = p^2 + pq = p^2$ et $q = (p + q)q = pq + q^2 = q$ car $p + q = \text{Id}$.
3. Il suffit de prendre $q = p - \text{Id}$.
4. Si on suppose que p, q vérifient (a), alors $p_{\text{Im}(p)} = \text{Id}$. De plus, p vérifient $E = \ker(p) \oplus \text{Im}(p)$. Par la relation obtenue précédemment, on a $\text{Im}(q) = \ker(p)$ et inversement. D'où le sens réciproque. Le sens direct est clair.

Indication pour l'exercice 19.4 :

1. Soit $x \in \ker(p)$. Clairement, $x \in \ker(u \circ p)$. Soit $x \in \ker(u) \cap \text{Im}(p)$. J'ai donc un a dans E tel que $p(a) = x$ et $u(x) = 0$. Donc $u(p(x)) = u(p^2(a)) = u(p(a)) = 0$ donc $x \in \ker(u \circ p)$. D'où l'inclusion réciproque.
Pour l'inclusion directe, soit $x \in \ker(u \circ p)$. Alors $x = x - p(x) + p(x)$. Puisque $u(p(x)) = 0$, on a

$p(x) \in \text{Im}(p) \cap \ker(u)$. Et $x - p(x)$ est dans $\ker(p)$. D'où l'égalité. Il ne reste que le caractère somme directe : on a $\ker(p) \cap \text{Im}(p) = \{0\}$ et puisque $\ker(u)\text{Im}(p) \subset \text{Im}(p)$, le résultat en découle.

Pour l'autre égalité, soit $y \in \text{Im}(p \circ u)$. Il existe un x tel que $p(u(x)) = y$ donc $y \in \text{Im}(p)$. De plus, l'écriture $y = y - u(x) + u(x)$ nous donne que $y \in \ker(p) + \text{Im}(u)$ puisque $p(y - u(x)) = p(u(x)) - p(u(x)) = 0$.

Pour l'autre inclusion, soit $y \in \text{Im}(p) \cap (\ker(p) + \text{Im}(u))$. Il existe alors $x \in E$ tel que $f(x) = y$ et $(a, b) \in \ker(p) \times \text{Im}(u)$ tel que $y = a + b$. b étant dans $\text{Im}(u)$, il existe c tel que $b = u(c)$. J'ai donc

$$p(y) = p(a + b) = p(a) + p(b) = p(b) = p(u(c)); p(y) = p(p(x)) = p(x) = y.$$

Donc $y \in \text{Im}(p \circ u)$.

2. $p, q, \text{Id} - q$ sont des projecteurs. J'ai donc

$$\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p) \cap (\ker(p) + \text{Im}(q))$$

et

$$\ker(p \circ (\text{Id} - q)) = \ker(\text{Id} - q) \oplus \ker(p) + \text{Im}(\text{Id} - q) = \text{Im}(q) \oplus (\ker(p) \cap \ker(q)).$$

Notons alors A , la proposition $\text{Im}(p) \cap (\ker(p) + \text{Im}(q)) \subset \text{Im}(q) \oplus (\ker(p) \cap \ker(q))$. Alors

$$\begin{aligned} A &\iff \text{Im}(p \circ q) \subset \ker(f \circ (\text{Id} - g)) \\ &\iff (p \circ (\text{Id} - q)) \circ (p \circ q) = 0 \\ &\iff (p - p \circ q) \circ (p \circ q) = 0 \\ &\iff p^2q - pqpq = 0 \\ &\iff pq - (pq)^2 = 0 \\ &\iff (pq)^2 = pq. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Indication pour l'exercice 19.5 :

Le sens direct est clair. Pour le sens réciproque, j'écris $E = \ker(p) \oplus \text{Im}(p)$. Soit $x \in E$. Il existe alors $(y, z) \in \ker(p) \times \text{Im}(p)$ tel que $x = y + z$. Soit alors a tel que $p(a) = z$.

Clairement, $u(p(y)) = 0$. Puisque $y \in \ker(p)$ et que u stabilise $\ker(p)$, alors $u(y) \in \ker(p)$ donc $p(u(y)) = 0$. Ainsi, $u(p(y)) = u(p(y))$.

Puisque p est un projecteur, $p^2 = p$, donc $p(z) = p^2(a) = p(a) = z$. Donc $u(p(z)) = u(z)$.

Pareillement, puisque u stabilise $\text{Im}(p)$, alors $u(z) \in \text{Im}(p)$. Donc $p(u(z)) = u(z)$. Ainsi, $u(p(z)) = p(u(z))$.

J'ai donc $p(u(x)) = p(u(y + z)) = p(u(y)) + p(u(z)) = u(p(y)) + u(p(z)) = u(p(y + z)) = u(p(x))$. Donc $u \circ p = p \circ u$.

Indication pour l'exercice 19.6 :

Soit H tel que $F \oplus H = E$ et $G \oplus H = E$. Soit p , un projecteur sur F parallèlement à H . Je note $\varphi = p_G$. Alors φ est un isomorphisme de F vers G .

Soit $x \in F$. Alors $\varphi(x) \in G$. De plus, φ est clairement linéaire car c'est un induit. Donc $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

Reste à montrer le côté bijection. Soit $x \in F$ tel que $\varphi(x) = 0$. J'écris $x = g + h$ avec $g \in G, h \in H$. Alors $\varphi(x) = p(x) = p(g + h) = p(g) + p(h) = g + 0 = g$. Donc $g = 0$ et $x = h$ donc $x \in H$ et donc $x \in F \cap H = \{0\}$. Donc $x = 0$.

Ensuite, soit $y \in G$. Alors il existe $(a, b) \in F \times H$ tel que $y = a + b$. Donc $\varphi(a) = p(a) = p(a) + p(b) = p(a + b) = p(y) = y$.

Ainsi, φ est bijective.

La réciproque est vraie en dimension finie (voir l'exercice 20.3). En dimension infinie, soit $\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto XP(X) \in X\mathbb{R}[X]$. Alors φ est clairement bijective et linéaire. Pour autant, le seul supplémentaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ est $\{0\}$, qui n'est pas supplémentaire de $X\mathbb{R}[X]$.

Chapitre 20

Dimension finie

Dans toute la suite, les espaces vectoriels seront de dimension finie.

20.1 Exercices

Exercice 20.1.

Soit E , un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\dim(E) = n$. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u + v = \text{Id}$ et $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$. Montrer que u, v sont des projecteurs tels que $u \circ v = v \circ u = 0$.

Exercice 20.2. [Fitting]

Soit E , un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\dim(E) = n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, f supposée nilpotente.

1. Montrer que $f^n = 0$.
2. Soit $r = \dim(\ker(f))$. Montrer que $r \neq 0$ et $n/r \leq q \leq n - r + 1$. On pourra prendre S , un supplémentaire de $\ker(f) \cap \text{Im}(f^p)$ dans $\text{Im}(f^p)$.
3. On ne suppose plus que f est nilpotente. Montrer qu'il existe un unique couple F, G sous-espaces vectoriels de E , stables par f , tel que $F \oplus G = E$, f_F nilpotente et f_G inversible.

Exercice 20.3. [Supplémentaire commun]

Soit E de dimension n , et F, G , deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $p < n$. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.

Exercice 20.4. [Rang 1]

Soit E, F deux espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que f est la somme d'application linéaire de rang 1.

Exercice 20.5.

Soit E , un espace vectoriel et F, G , deux sous-espaces vectoriels de E .

1. Montrer que $\dim(G) \leq \dim(F) \iff \exists f \in \mathcal{L}(E), f(F) = G$.
2. Que faut-il rajouter pour que F soit bijective?

Exercice 20.6.

Soit E , $\dim(E) = n$ et $F_1, \dots, F_k$, des sous-espaces vectoriels de E . Montrer que si $\sum_{i=1}^k \dim(F_i) > n(k-1)$,

alors $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \{0\}$.

Exercice 20.7.

Soit E, F de dimension strictement positive, $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $\text{rg}(g) \leq \text{rg}(f) \iff \exists h \in \text{GL}(F), k \in \mathcal{L}(E), h \circ g = f \circ k$.

Exercice 20.8.

Soit E de dimension n , $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{L}(E)$, nilpotents, qui commutent 2 à 2. Calculer $u_1 \circ \dots \circ u_n$.

Exercice 20.9. [Sylvester]

Soit E de dimension n , $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.
2. Montrer que

$$\operatorname{rg}(u + v) = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \iff (\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v) = \{0\} \text{ et } \ker(u) + \ker(v) = E).$$

3. Montrer que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - n \leq \operatorname{rg}(u \circ v) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$.

20.2 Éléments de corrections

Correction pour l'exercice 20.1 :

Clairement, $\operatorname{Im}(u + v) \subset \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$. Puisque $u + v = \operatorname{Id}$, j'ai donc $E = \operatorname{Im}(u + v) \subset \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v) \subset E$, donc $\operatorname{Im}(u + v) = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$. Par Grassmann, puisque $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leq n$, j'ai $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v) = \{0\}$. J'ai donc $E = \operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Im}(v)$.

Soit $x \in \operatorname{Im}(u)$. Alors $x = x + 0 = (u + v)(x) = u(x) + v(x)$. Puisque $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v) = \{0\}$, on en déduit que $u(x) = x, v(x) = 0$. De même pour $x \in \operatorname{Im}(v)$.

Soit p , le projecteur sur $\operatorname{Im}(u)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(v)$. u et p coïncident sur $\operatorname{Im}(u)$ et sur $\mathbb{I}_{>}(v)$ donc $u = p$. $v = \operatorname{Id} - u$ est le projecteur associé, donc $u \circ v = v \circ u = 0$.

Indication pour l'exercice 20.2 :

1. Classique. On considère la suite $\ker(f^k)$. Cette suite est croissante pour l'inclusion. Si $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$, alors la suite devient stationnaire. Puisque f est nilpotente, il existe p tel que $f^p = 0$, donc $\ker(f^k)$ est stationnaire. Soit donc le plus petit rang pour lequel $\ker(f^k)$ est stationnaire. Je le note q . Alors $\ker(f) \subsetneq \ker(f^2) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(f^q) = E$, donc $\dim(\ker(f)) \leq \dim(\ker(f^2)) - 1$, etc, jusqu'à $\dim(\ker(f)) \leq \dim(\ker(f^p)) - p = n - p$. Donc $p \leq n$, donc $f^p = f^n = 0$.
2. On a $0 = \operatorname{rg} f^q \leq \operatorname{rg}(f) - q - 1$ donc $q \leq n - \operatorname{rg}(f) + 1$. Soit S , un sev de E tel que $(\operatorname{Im}(f^p) \cap \ker(f)) \oplus S = \operatorname{Im}(f^p)$. On a $S \cap \ker(f) \subset (\operatorname{Im}(f^p) \cap \ker(f)) \cap S = \{0\}$, donc $S \cap \ker(f) = \{0\}$. Ainsi, f_S est injective, donc $\dim(f(S)) = \dim(S)$. Or, $\operatorname{Im}(f^{p+1}) = f(\operatorname{Im}(f^p)) = f((\operatorname{Im}(f^p) \cap \ker(f)) \oplus S) = f(S)$, donc $\operatorname{rg}(f^{p+1}) = \dim(f(S)) = \dim(S) = \operatorname{rg}(f^p) - \dim((\operatorname{Im}(f^p) \cap \ker(f)))$. Donc $\forall p \in \mathbb{N}, \operatorname{rg}(f^{p+1}) = \operatorname{rg}(f^p) - \dim((\operatorname{Im}(f^p) \cap \ker(f)))$, donc $\operatorname{rg}(f^{p+1}) \geq \operatorname{rg}(f^p) - r$. Donc $0 = \operatorname{rg}(f^q) \geq \operatorname{rg}(f^0) - qr = n - qr$. Donc $q \geq n/r$.
3. C'est la partie la plus difficile. Contactez-moi si vous voulez de l'aide.

Indication pour l'exercice 20.3 :

On procède par récurrence sur p . Initialisation : pour $p = n - 1$, puisque $F \cup G \neq E$ (on utilise le fait qu'une union est un ev. lorsque l'un est inclus dans l'autre). Il existe alors $a \in E$ tel que $a \notin F, a \notin G$. Alors $\operatorname{Vect}(a)$ est un supplémentaire commun par Grassmann. (le caractère direct est clair).

Supposons acquis le résultat au rang $p + 1$. Je prends un a comme précédemment. Soit $F_1 = F \oplus \operatorname{Vect}(a)$ et $G_1 = G \oplus \operatorname{Vect}(a)$. Alors par hypothèse de récurrence, il existe H tel que $F_1 \oplus H = E, G_1 \oplus H = E$. Ainsi, F

et $\text{Vect}(a) \oplus H$ sont en somme directe (c'est facile à montrer), et de même avec G . D'où l'hérédité, et donc la récurrence.

Indication pour l'exercice 20.4 :

Soit $f_1, \dots, f_p$, une base de $\text{Im}(f)$. On la complète en une base $f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_r$ de E . Notons π_i , la projection sur $\text{Vect}(f_i)$ parallèlement à $\text{Vect}(f_j, i \neq j)$ pour $1 \leq i \leq r$. Puisque $\text{Im}(\pi_i \circ f) \subset \text{Vect}(f_i)$, l'application $\pi_i \circ f$ est de rang 1 (oui, elle n'est pas nulle car, pour x_i tel que $f(x_i) = f_i$, on a $\pi_i(f(x_i)) = f_i$. Enfin, pour tout $x \in E$, si j'écris

$$f(x) = \sum_{i=1}^r a_i f_i,$$

alors $\pi_i(f(x)) = a_i f_i$. D'où le résultat.

Indication pour l'exercice 20.5 :

1. On suppose le sens réciproque. Soit $g = f_F$. Alors $\text{Im}(g) = G$ et on a le résultat par le théorème du rang.
Pour le sens direct, je note $q = \dim(G)$, $p = \dim(F)$. Alors soit $f_1, \dots, f_p$, une base de F . Je la complète en une base dans E , noté $f_1, \dots, f_n$, avec n , la dimension de E . Soit maintenant $g_1, \dots, g_q$, une base de G . Je définie f par $f(f_i) = g_i$ si $i \leq q$, 0 sinon.
Le résultat en découle.
2. Il faut donc que $\dim(F) = \dim(G)$. Et le raisonnement est très proche.

Indication pour l'exercice 20.6 :

Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned} f : F_1 \times \dots \times F_k &\rightarrow E^{k-1} \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto (x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1). \end{aligned}$$

Alors $f(x_1, \dots, x_k) = 0$ si, et seulement si $(x_1, \dots, x_k) = (x, \dots, x)$ pour $x \in \bigcap_{i=1}^k F_i$. Le théorème du rang nous donne donc

$$\dim(F_1 \times \dots \times F_k) = \sum \dim(F_i) = \text{rg}(f) + \dim\left(\bigcap_{i=1}^k F_i\right).$$

Puisque $\text{rg}(f) \leq \dim(E^{k-1}) = n(k-1)$, on a bien $\dim\left(\bigcap_{i=1}^k F_i\right) > 0$.

Indication pour l'exercice 20.7 :

L'implication réciproque est facile. Soit $h \in \text{GL}(F)$ et $k \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h \circ g = f \circ k$. Alors $g = h^{-1}fk$ donc $\text{Im}(g) \subset h^{-1}(\text{Im}(f))$. h étant inversible, $\text{rg}(g) \leq \dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f)$. D'où le résultat.

Maintenant, regardons le sens direct. Soit $p = \text{rg}(f)$, $q = \text{rg}(g)$. On suppose $q \leq p$. Soit $(e_{p+1}, \dots, e_n)$, une base de $\ker(f)$. Je la complète en une base de E , $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $(\varepsilon_{q+1}, \dots, \varepsilon_n)$, une base de $\ker(g)$. Je la complète en une base de E , $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. La famille $(g(\varepsilon_1), \dots, g(\varepsilon_q))$ est une base de $\text{Im}(g)$, que je complète en une base de F via $g_{q+1}, \dots, g_m$. Pareillement, je construis une base de F $(f(e_1), \dots, f(e_p), f_{p+1}, \dots, f_m)$.

Soit k définie par $k(\varepsilon_1) = e_1, \dots, k(\varepsilon_q) = e_q, k(\varepsilon_{q+1}) = \dots = k(\varepsilon_n) = 0$.
 Soit h , l'automorphisme qui transforme la base des g en la base des f .
 Le résultat en découle.

Indication pour l'exercice 20.8 :

On va montrer que ça fait 0. Déjà, il est clair que

$$\{0\} \subset \ker(u_1) \subset \ker(u_2 \circ u_1) \subset \dots \subset \ker(u_n \circ \dots \circ u_1) \subset E.$$

Supposons qu'une des inclusions est une égalité, disons $\ker(u_k \circ \dots \circ u_1) = \ker(u_{k+1} \circ u_k \circ \dots \circ u_1)$ pour un certain k . Alors

$$\ker(u_k \circ \dots \circ u_1) = \ker(u_{k+1} \circ u_k \circ \dots \circ u_1) = \ker(u_{k+1}^2 \circ u_k \circ \dots \circ u_1).$$

En effet, déjà,

$$\ker(u_{k+1} \circ u_k \circ \dots \circ u_1) \subset \ker(u_{k+1}^2 \circ u_k \circ \dots \circ u_1).$$

Soit $x \in \ker(u_{k+1}^2 \circ u_k \circ \dots \circ u_1)$. Alors $u_{k+1} \circ (u_{k+1} \circ u_k \circ \dots \circ u_1)(x) = 0$. Puisque les endomorphismes commutent 2 à 2, on a $(u_{k+1} \circ u_k \circ \dots \circ u_1) \circ u_{k+1}(x) = 0$ ce qui signifie que $u_{k+1}(x) \in \ker(u_{k+1} \circ u_k \circ \dots \circ u_1) = \ker(u_k \circ \dots \circ u_1)$ donc

$$u_k \circ \dots \circ u_1(u_{k+1}(x)) = 0$$

et en utilisant la commutation encore une fois,

$$u_{k+1} \circ u_k \circ \dots \circ u_1(x) = 0$$

et $x \in \ker(u_{k+1} \circ u_k \circ \dots \circ u_1)$ d'où l'autre inclusion.

Ainsi, par récurrence immédiate,

$$\ker(u_k \circ \dots \circ u_1) = \ker(u_{k+1}^p \circ u_k \circ \dots \circ u_1)$$

et pour p égal à l'indice de nilpotence de u_{k+1} , on a

$$\ker(u_k \circ \dots \circ u_1) = \ker(u_{k+1}^p \circ u_k \circ \dots \circ u_1) = \ker(0 \circ u_k \circ \dots \circ u_1) = \ker(0) = E.$$

Ainsi, $u_k \circ \dots \circ u_1 = 0$ et donc $u_n \circ \dots \circ u_1 = 0$ ce qui conclut.

Ainsi, il reste à traiter le cas où toutes les inclusions sont strictes. Puisque u_1 est nilpotente, $\ker(u_1) \neq \{0\}$ ¹. De fait, si on note d_k la dimension de $\ker(u_k \circ \dots \circ u_1)$, on a

$$1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_n \leq n$$

mais par stricte croissance des $(d_k)_{1 \leq k \leq n}$, on a $d_n \geq n$ donc $d_n = n$ et $\ker(u_n \circ \dots \circ u_1) = E$ par dimension : on a bien $u_n \circ \dots \circ u_1 = 0$.

Indication pour l'exercice 20.9 :

Je laisse cet exercice de côté pour l'instant.

¹. un endomorphisme nilpotent ne saurait être injectif. En effet, en notant q indice de nilpotence de u nilpotent, on a $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$ donc $\{0\} \subsetneq \text{Im}(u^{q-1}) \subset \ker(u)$

Chapitre 21

Dénombrement

21.1 Exercices

Dans les exercices, on pourra utiliser librement la formule d'inversion de Pascal :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \left(\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \right) \implies \left(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k \right).$$

Exercice 21.1. Soit n, p deux entiers naturels et on note $E_n := \llbracket 1, n \rrbracket$. Dénombrer :

1. les applications de E_p dans E_n .
2. les applications injectives de E_p dans E_n .
3. les applications surjectives de E_p dans E_n . *On pourra exprimer le cardinal obtenu en 1 en fonction du cardinal des applications surjectives de E_p dans E_k pour k variant de 0 à n . On pourra ensuite utiliser la formule d'inversion de Pascal.*

Exercice 21.2. Soit n, p deux entiers naturels et on note $E_n := \llbracket 1, n \rrbracket$. Dénombrer :

1. les applications strictement croissantes de E_p dans E_n .
2. les applications croissantes de E_p dans E_n .

Exercice 21.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les deux questions sont indépendantes.

1. Déterminer le nombre de p -cycles dans $\mathfrak{S}_n$ lorsque $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
2. Exprimer le cardinal de $\mathfrak{S}_n$ en fonction du nombre de dérangement dans $\mathfrak{S}_k$ pour k variant de 0 à n . En déduire une expression du nombre de dérangement sous forme d'une somme. *On peut montrer que le nombre de dérangement est la partie entière de $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$.*

Exercice 21.4. Pour tout ensemble E de cardinal n , on définit B_n le nombre de partitions possibles de E . Exprimer B_n en fonction de B_k pour k variant de 0 à $n-1$.

21.2 Eléments de corrections

Indication pour l'exercice 21.1 :

1. C'est du cours. C'est n^p .
2. C'est aussi du cours. Si $p > n$, il n'existe pas d'applications injectives de E_p dans E_n . En effet, par le principe des tiroirs, il existe un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel qui admet deux antécédent par l'application en question. Soit donc $p \leq n$. Pour déterminer une application injective,

- (a) on fixe la valeur de $f(1)$: il y a n choix.
- (b) On fixe la valeur de $f(2)$: il y a $n - 1$ choix.
- (c) On itère le procédé.

Si, au cours de la construction, le nombre de choix tombe à zéro, cela signifie que $p > n$ ce qui est exclu :

on a $\frac{n!}{(n-p)!}$ applications injectives de E_p dans E_n .

3. Avant toute chose, si $p < n$, il n'existe pas d'applications surjectives de E_p dans E_n . En effet, par le principe des tiroirs, vu que chaque élément de E_n admet un antécédent, il existerait un élément de E_p qui aurait deux images : cela est exclu par la définition d'une application.

Soit donc $p \geq n$. Pour construire une application f de E_p dans E_n ,

- (a) on fixe un $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et
- (b) on fixe k valeurs parmi n de E_n qui vont admettre des antécédents par f et les autres n'en auront pas.
- (c) On construit alors une application surjective de E_p dans E_k qui coïncide avec f sur E_p .

Ce procédé permet de construire de manière unique une application : on a donc

$$n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(p, k)$$

où $S(p, k)$ désigne le nombre d'applications surjectives de E_p dans E_k . Il suffit d'appliquer la formule d'inversion de Pascal pour obtenir

$$S(p, n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p.$$

Indication pour l'exercice 21.2 :

1. Puisqu'une application strictement croissante est injective, il n'en existera pas dès lors que $p > n$. Construire une application strictement croissante de E_p dans E_n , on peut par exemple construire une application injective – ce qui fait $\frac{n!}{(n-p)!}$ choix – puis sélectionner la seule qui est strictement croissante (à savoir trier dans l'ordre croissant les images) ce qui revient à diviser par $p!$. Ainsi, on a $\binom{n}{p}$ choix.
2. On peut construire intelligemment une bijection entre les applications croissantes et strictement croissantes à condition de changer les ensembles de départs et d'arrivées.

On note $C(p, n)$ les applications croissantes de E_p dans E_n et $C^+(p, n)$, celles qui sont strictement croissantes

Soit f une application croissante. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_f : E_p &\rightarrow E_{n+p-1} \\ k &\mapsto f(k) + k - 1 \end{aligned}$$

Alors φ est strictement croissante par croissance de f . De plus, l'application $f \in C(p, n) \mapsto \varphi_f \in C^+(p, n+p-1)$ est bijective. Ainsi,

$$|C(p, n)| = |C^+(p, n)| = \binom{n+p-1}{p}.$$

Indication pour l'exercice 21.3 :

1. On considère $p \geq 2$. Pour obtenir un p -cycle, on choisit $n - p$ éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à fixer. Il nous reste p éléments. Pour le premier élément, il doit s'envoyer sur l'un des $p - 1$ restants. Pour le deuxième, sur les $p - 2$ restants, etc. Le dernier doit obligatoirement s'envoyer sur le premier élément ! Il n'y a donc pas de choix pour le dernier. Ainsi, il y a $(p - 1)!$ choix pour le p -cycles. Finalement, le nombre de p -cycles est

$$\binom{n}{p} (p - 1)!.$$

2. Pour construire une permutation, on fixe $n - k$ valeurs qui sont fixées par cette permutation puis on regarde le nombre de permutations à k éléments sans point fixe. Par définition, on a

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} D_k.$$

Indication pour l'exercice 21.4 :

Pour construire une partition

1. on choisit un élément x de E quelconque.
2. On regarde combien d'éléments constitue l'élément de la partition qui contient x . C'est k pour k allant de 1 à n . On regarde les éléments qui sont dans le même ensemble que x : il y a $\binom{n-1}{k-1}$ choix possibles pour construire cet ensemble.
3. On construit une partition avec les éléments restants, à savoir $n - k$ éléments.

Ainsi, on a

$$B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}.$$

Chapitre 22

Probabilités

22.1 Exercices

Exercice 22.1.

Soit $p, q \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq p \leq q$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d., à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$. Déterminer la valeur de

$$\mathbb{E} \left(\frac{\sum_{k=1}^p X_k}{\sum_{k=1}^q X_k} \right).$$

Exercice 22.2.

On considère X , une variable aléatoire qui à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ associe son nombre de points fixes. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 22.3 (Equitable?).

On lance n fois une pièce non pipée. Quelle est la probabilité d'avoir strictement plus de faces que de piles?

Exercice 22.4 (Somme de variables aléatoires).

Soit X, Y , deux variables aléatoires indépendantes suivant $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Déterminer

1. $\mathbb{P}(X = Y)$.
2. $\mathbb{P}(X \geq Y)$.
3. $\forall k \in \llbracket m, M \rrbracket, \mathbb{P}(X + Y = k)$, avec m, M que l'on déterminera.

Exercice 22.5 (Tirage avec remise).

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On réalise n tirages avec remise. On note X (resp. Y), le plus petit (resp. le plus grand) nombre obtenu. Déterminer la loi de X et Y .

Exercice 22.6 (Minimum, maximum).

On lance deux dés équilibrés. On associe à chacun d'eux une variable aléatoire notée D_1 (resp. D_2) donnée par le résultat affiché par le dé. On note alors $X = \max(D_1, D_2), Y = \min(D_1, D_2)$. Déterminer la loi de X . Exprimer $X + Y$ en fonction de D_1 et D_2 et en déduire l'espérance de Y .

Exercice 22.7 (Un résultat sympa).

Soit X , une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Démontrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k).$$

Exercice 22.8 (Erreur de transmission).

Soit n , un entier naturel non nul. On considère une chaîne de n entités qui doivent transmettre un booléen à son voisin de derrière. Chaque entité a une probabilité p de transmettre le booléen, $(1 - p)$ de transmettre le contraire. On suppose que la première entité va transmettre True. Quelle est la probabilité que la dernière entité reçoive True?

Exercice 22.9.

On prend un jeu de 32 cartes bien mélangé. On retourne les cartes de ce jeu jusqu'à obtenir un as. On note X , le nombre de cartes retournés.

1. Soit C , une carte qui n'est pas un as. Quelle est la probabilité que la carte C soit retournée au cours de l'expérience ?
2. Soit X_C , la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si la carte C est retournée au cours de l'expérience, 0 sinon. Quelle est l'espérance de X_C ? En déduire celle de X .

Exercice 22.10 (Inégalité de Cantelli).

Soit X , une variable aléatoire réelle. Soit $\alpha > 0$.

1. Soit $\lambda \geq 0$. Montrer que

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X] + \lambda)^2] = \text{Var}(X) + \lambda^2.$$

2. Montrer que $\forall \lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] \geq \alpha) \leq \frac{\text{Var}(X) + \lambda^2}{(\alpha + \lambda)^2}.$$

3. En déduire que

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \alpha) \leq \frac{2\text{Var}(X)}{\alpha^2 + \text{Var}(X)},$$

et comparer avec Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 22.11 (Inégalité de Paley-Zygmund).

Soit $\lambda \in]0, 1[$, X variable aléatoire réelle strictement positive. Montrer que

$$(1 - \lambda)^2 \mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{P}(X \geq \lambda \mathbb{E}[X]) \mathbb{E}[X^2].$$

Exercice 22.12 (Premier moment, deuxième moment).

Soit X , une variable aléatoire à valeurs de $\llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que

$$1 - \frac{\text{Var}(X)}{(\mathbb{E}[X])^2} \leq \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]} \leq \mathbb{P}(X \neq 0) \leq \mathbb{E}[X].$$

Exercice 22.13 (Inégalité de Bernstein).

Soit S_n variable aléatoire tel que $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $x > 0$, $q = 1 - p$.

1. Soit $\lambda > 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}(S_n - np \geq nx) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda(S_n - np)}]}{e^{n\lambda x}}.$$

2. Montrer que $\mathbb{E}[e^{\lambda(S_n - np)}] = (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n$.

3. Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t^2} + t - e^t$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) = (4t^2 + 2)e^{t^2} - e^t = e^{t^2}(4t^2 + 2 - e^{-t^2}).$$

4. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, e^t \leq e^{t^2} + t$.

5. En déduire que

$$\mathbb{P}(S_n - np \geq nx) \leq e^{n(\lambda^2 - \lambda x)}.$$

6. Conclure que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right) \leq 2e^{-\frac{nx^2}{4}}.$$

22.2 Éléments de corrections

Indication pour l'exercice 22.1 :

J'ai

$$\mathbb{E} \left(\frac{\sum_{k=1}^p X_k}{\sum_{k=1}^q X_k} \right) = \mathbb{E} \left(\frac{\sum_{k=1}^p X_1}{\sum_{k=1}^q X_k} \right) = p \mathbb{E} \left(\frac{X_1}{\sum_{k=1}^q X_k} \right).$$

De plus,

$$q \mathbb{E} \left(\frac{X_1}{\sum_{k=1}^q X_k} \right) = \sum_{i=1}^q \mathbb{E} \left(\frac{X_i}{\sum_{k=1}^q X_k} \right) = \mathbb{E} \left(\frac{\sum_{i=1}^q X_i}{\sum_{k=1}^q X_k} \right) = \mathbb{E}(1) = 1.$$

D'où $\mathbb{E} \left(\frac{\sum_{k=1}^p X_k}{\sum_{k=1}^q X_k} \right) = \frac{p}{q}.$

Indication pour l'exercice 22.2 :

Déjà fait semble-t-il.

Correction de l'exercice 22.3 :

Notons A , l'événement "obtenir strictement plus de faces que de piles" et B , l'événement "obtenir strictement plus de piles que de faces. Notons X , la variable aléatoire qui compte le nombre de face obtenues. Alors X suit une binomiale de paramètre (n, p) , car on répète n fois la même expérience de Bernoulli de paramètre p , de manière indépendante (bien sûr, $p = 1/2$). Par symétrie, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$. Deux cas se présentent :

- Si n est impair, alors A et B représentent un système complet d'événements. Alors $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$, et avec la condition de symétrie, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$.
- Si n est pair, notons $n = 2r$. Alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X > r)$, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X < r)$. De fait, comme

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(X = r) = 1,$$

j'ai donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathbb{P}(X = r) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \binom{n}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r}.$$

Correction de l'exercice 22.4 :

L'idée est d'écrire l'équivalence suivante :

$$X = Y \iff \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X = k \text{ et } Y = k.$$

En fait, $X = Y$ est réalisé, si, et seulement si, X et Y prennent la même valeur en un point, i.e. qu'il existe un élément dans $X(\Omega)$ qui est égal a fortiori à $Y(\Omega)$. Ici, le $\exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ désigne en fait qu'il existe $x_\omega \in X(\Omega)$. Mais comme $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$, autant directement l'écrire, et autant renommer x_ω par k , qui ressemble un peu

plus à un entier que x_ω ...

Bref,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k \cap Y = k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Je rappelle que par indépendance de A et B , $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Pour l'inégalité, on peut suivre une méthode similaire en étudiant tous les cas pour lesquels $X \geq Y$. (ça fait un triangle si on réalise un tableau n lignes, n colonnes. Ici, il y a une symétrie qui simplifie le problème :

$$\mathbb{P}(X \geq Y) = \mathbb{P}(Y \geq X).$$

De fait,

$$1 = \mathbb{P}((X \geq Y) \cup (Y \geq X)) = \mathbb{P}(X \geq Y) + \mathbb{P}(Y \geq X) - \mathbb{P}((X \geq Y) \cap (Y \geq X)) = 2\mathbb{P}(X \geq Y) - \mathbb{P}(X = Y).$$

Donc

$$1 = 2\mathbb{P}(X \geq Y) - \frac{1}{n},$$

$$\text{i.e. } \mathbb{P}(X \geq Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{n+1}{2n}.$$

Enfin, le cas le plus intéressant. Déjà, déterminons m, M . Pour cela, il suffit de regarder la plus petite et la plus grande valeur prise par $X + Y$. Etant donné qu'ils sont indépendants, il suffit de minimiser X et Y pour obtenir le minimum de $X + Y$, maximiser X et Y pour maximiser $X + Y$. Ici, j'ai donc $1 + 1$ pour le minimum, $n + n$ pour le maximum, i.e. $m = 2, M = 2n$. Pour la suite, il faut écrire l'équivalence suivante :

$$X + Y = k \iff \exists i \in ([n - k, k - 1] \cap [1, n]), X = i \text{ et } Y = k - i.$$

En fait, $X + Y = k$ est réalisé, si, et seulement si, X et $-(Y - k)$ prennent la même valeur en un point, i.e. qu'il existe un élément dans $X(\Omega) \cap (Y - k)(\Omega)$ en considérant $Y - k$ comme une nouvelle variable aléatoire (que vous pouvez remplacer par Z si vous le souhaitez). Oui, on prend bien une intersection, puisqu'il faut qu'il existe un élément en commun. Tout à l'heure, je n'ai pas écrit d'intersection, tout simplement car les deux ensembles étaient égaux. Ici, ce n'est pas le cas.

Mais du coup, il faut que je trouve un i (a priori, dans $[2, 2n]$) tel que $X = i$ et $Y - k = -i$ (en sommant, j'ai bien $X + Y - k = 0$!).

L'égalité $Y - k = -i$ revient à $Y = k - i$ donc que $1 \leq k - i \leq n$, i.e. $k - n \leq i \leq k - 1$.

L'égalité $X = i$ impose que i soit non nul. Ainsi, $i \in [1, k - 1]$. D'où l'équivalence ci-dessus ! Calculons : j'ai deux cas qui se présentent :

- Si $k \leq n$, alors $k - n \leq 0$ donc $([n - k, k - 1] \cap [1, n]) = [1, k - 1]$. J'ai donc :

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = k - i)) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) = \frac{k-1}{n^2}.$$

- Si $k > n$, alors $k - n > 0$ donc $([n - k, k - 1] \cap [1, n]) = [k - n, n]$. J'ai donc :

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=k-n}^n \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = k - i)) = \sum_{i=k-n}^n \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) = \frac{n - (k - n) + 1}{n^2} = \frac{2n + 1 - k}{n^2}.$$

Correction de l'exercice 22.5 :

Quand on cherche la loi d'une variable aléatoire, très souvent, on va chercher à calculer une probabilité. Déjà, $X(\Omega) = [1, n]$ (idem pour Y). Je vais donc chercher à calculer $\mathbb{P}(X = k)$, avec $k \in [1, n]$. Toutefois, il est très difficile de calculer directement cette probabilité.

Ruse 22.1.

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k + 1).$$

En fait, cela vient du fait que

$$X \geq k = (X = k) \sqcup (X = k + 1) \sqcup (X = k + 2) \sqcup \dots \sqcup (X = n - 1) \sqcup (X = n).$$

On va jusqu'à n car X ne peut pas valoir plus que n . Ces événements sont disjoints. Donc

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X = k + 1) + \dots + \mathbb{P}(X = n),$$

et qu'on écrit volontiers sous la forme plus usuelle :

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{i=k}^n \mathbb{P}(X = i).$$

Il faut donc retenir que la probabilité d'un événement lié à une inégalité (qu'on ne sait pas faire a priori) est une somme de probabilité d'un événement lié à une égalité (qu'on sait faire a priori).

Ici, c'est donc l'inverse ! On en sait pas $\mathbb{P}(X = k)$ mais on saura $\mathbb{P}(X \geq k)$.

Bref, je peux donc aisément justifier la ruse :

$$\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k + 1) = \sum_{i=k}^n \mathbb{P}(X = i) - \sum_{i=k+1}^n \mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(X = k).$$

en sabrant les bons termes. CQFD !

Mais que vaut $\mathbb{P}(X \geq k)$? L'événement $X \geq k$ est réalisé si, et seulement si, tous les tirages ont amené un nombre supérieur ou égal à k . La probabilité qu'un tirage me donne un nombre supérieur à k est $\frac{N - k + 1}{N}$. Par indépendances des tirages,

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \left(\frac{N - k + 1}{N} \right)^n.$$

Par la ruse, j'ai donc :

$$\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{N - k + 1}{N} \right)^n - \left(\frac{N - k}{N} \right)^n = \frac{(N - k + 1)^n - (N - k)^n}{N^n}.$$

On peut s'amuser à simplifier le numérateur : ça donnerait $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (N - k)^i$.

Pour Y , on réalise un raisonnement similaire, mais on devra calculer $\mathbb{P}(Y \leq k) = \frac{k^n}{N^n}$. Puis on utilise encore une ruse, que je vous invite à démontrer :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \geq k) - \mathbb{P}(Y \geq k + 1).$$

De fait,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{k^n - (k - 1)^n}{N^n} \left(= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (k - 1)^i}{N^n} = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^i (-1)^{n-i+1}}{N^n} \right).$$

Pour résumer, il faut retenir : pour toute loi X à valeurs discrètes,

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k + 1) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1).$$

Correction de l'exercice 22.6 :

Ici, on a un cas explicite, dont on connaît facilement les issues possibles. On sait que

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), \dots, (2, 6), \dots, (6, 5), (6, 6)\},$$

et que toutes les issues sont équiprobables. Faisons un tableau :

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Dans chaque case, je vais inscrire le plus grand élément entre la ligne ou la colonne.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Alors 6 apparaît 11 fois, 5 apparaît 9 fois, 4 apparaît 7 fois, 3 apparaît 5 fois, 2 apparaît 3 fois et 1 une seule fois. Comme toutes les issues sont équiprobables, avoir 6 revient à avoir 11 chances que ça arrive sur $36 = \text{Card}(\Omega)$, etc., etc. D'où la loi de X :

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Il est maintenant aisé de calculer l'espérance : on remarque que $\mathbb{P}(X = i) = \frac{2i-1}{36}$. J'ai donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^6 i \frac{2i-1}{36} = \frac{1}{18} \sum_{i=1}^6 i^2 - \frac{1}{36} \sum_{i=1}^6 i = \frac{1}{18} \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - \frac{1}{36} \frac{6 \times 7}{2} = \frac{2 \times 7 \times 13 - 3 \times 7}{36} = \frac{7(26-3)}{36} = \frac{161}{36} \approx 4,4722$$

J'utilise :

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}, \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

De fait, j'ai

$$X+Y = \min(D_1, D_2) + \max(D_1, D_2) = \frac{D_1 + D_2 - |D_1 - D_2|}{2} + \frac{D_1 + D_2 + |D_1 - D_2|}{2} = \frac{2D_1 + 2D_2}{2} = D_1 + D_2.$$

Donc

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(D_1 + D_2) = \mathbb{E}(D_1) + \mathbb{E}(D_2),$$

la dernière égalité provenant de l'indépendance de D_1 et D_2 . Or, $\mathbb{E}(D_1) = \frac{6+1}{2} = \mathbb{E}(D_2)$, donc $\mathbb{E}(X + Y) = 7$.

$$\text{Donc } \mathbb{E}(Y) = 7 - \mathbb{E}(X) = \frac{91}{36}.$$

Correction de l'exercice 22.7 :

On utilise la ruse de l'exercice 22.6 :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k + 1).$$

Alors, puisque X est finie à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k + 1) \\ &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X \geq k + 1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1) \mathbb{P}(X \geq k + 1) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X \geq k + 1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1) \mathbb{P}(X \geq k + 1) - \sum_{k=0}^{N-1} k \mathbb{P}(X \geq k + 1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1 - k) \mathbb{P}(X \geq k + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k). \end{aligned}$$

où dans l'avant-dernière égalité, les bornes de la deuxième somme sont changées car le terme d'indice 0 est nul (car $0\mathbb{P}(X \geq 1) = 0$, donc je peux artificiellement le rajouter, et le terme d'indice n est nul donc je peux l'enlever (car $n\mathbb{P}(X \geq n + 1) = 0$ car il n'est pas possible que X soit plus grande que $n + 1$, étant donné que X est compris entre 0 et n). CQFD !

Indication pour l'exercice 22.8 :

On note C_k l'événement "la k -ième entité reçoit une information True", et $p_k = \mathbb{P}(C_k)$. On a $p_1 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, j'ai

$$\mathbb{P}(C_k) = \mathbb{P}(C_{k-1})\mathbb{P}(C_k|C_{k-1}) + \mathbb{P}(\overline{C_{k-1}})\mathbb{P}(C_k|\overline{C_{k-1}}) = p_{k-1}p + (1 - p_{k-1})(1 - p) = (2p - 1)p_{k-1} + 1 - p.$$

On résout l'équation de récurrence pour obtenir $p_n = \frac{1}{2} + (2p - 1)^{n-1} \left(p_1 - \frac{1}{2} \right)$.

Indication pour l'exercice 22.9 :

1. On note n_1 le rang de C et n_1, n_2, n_3, n_4 , le rang des 4 as. Si les rangs $n_1, \dots, n_5$ sont fixés, il existe $5!27!$ façons de ranger le paquet, et parmi celles-ci, seul $1 \times 4!27!$ place C au rang n_1 . Donc la probabilité vaut $1/5$, et est indépendante des rangs $n_1, \dots, n_5$ par principe de symétrie.
2. $X_C \hookrightarrow \mathcal{B}(1/5)$ donc $\mathbb{E}[X_C] = 1/5$. Pour tout rangement du paquet de carte ω , on a $X(\omega) = 1 + \sum_{i=1}^{28} X_i(\omega)$. X_i vaut 1 si la carte est retournée. Donc je compte bien toutes les cartes retournées, dont l'as (qui indique qu'on s'arrête d'où le +1). Ainsi, par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(X) = 1 + 28/5 = \frac{33}{5}$.

Indication pour l'exercice 22.10 :

On note $m = \mathbb{E}[X]$, $\sigma^2 = \text{Var}(X)$.

1.

$$\mathbb{E}[(X - m + \lambda)^2] = \mathbb{E}[(X - m)^2] + 2\lambda(\mathbb{E}[X] - m) + \lambda^2 = \sigma^2 + \lambda^2.$$

2. On a

$$\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) = \mathbb{P}(X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda) \leq \mathbb{P}((X - m + \lambda)^2 \geq (\alpha + \lambda)^2) \leq \frac{\mathbb{E}[(X - m + \lambda)^2]}{(\alpha + \lambda)^2} = \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\alpha + \lambda)^2}.$$

3. Soit $\varphi : \lambda \mapsto \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\lambda + \alpha)^2}$. On dérive φ et on montre que $\varphi'(\lambda) = 0$ si, et seulement si, $\lambda = \frac{\sigma^2}{\alpha}$. Mais alors, $\varphi(\sigma^2/\alpha) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}$, d'où le résultat. En remplaçant $X - m$ par $-(X - m)$, le raisonnement ci-dessus en change pas. On a donc

$$\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2},$$

et

$$\mathbb{P}(-X + m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(|X - m| \leq \alpha) = \mathbb{P}(X - m \geq \alpha) + \mathbb{P}(-X + m \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$

(Je laisse la comparaison avec Bienaymé-Tchebychev pour vous).

Indication pour l'exercice 22.11 :

Attention! Ça a été corrigé mais $\lambda \in]0, 1[$ et non quelconque! Soit $a > 0$. Alors $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X < a}] + \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X \geq a}] \leq a + \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X \geq a}]$. Il suffit maintenant de prendre $a = \lambda\mathbb{E}[X]$. J'ai donc

$$\mathbb{E}[X] - \lambda\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \geq \lambda\mathbb{E}[X]}X].$$

Finalement,

$$\begin{aligned} (\mathbb{E}[(1 - \lambda)X])^2 &\leq \left(\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \geq \lambda\mathbb{E}[X]}X]\right)^2 \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \geq \lambda\mathbb{E}[X]}^2]\mathbb{E}[X^2] \text{ par Cauchy-Schwarz} \\ &= \mathbb{P}(X \geq \lambda\mathbb{E}[X])\mathbb{E}[X^2]. \end{aligned}$$

Indication pour l'exercice 22.12 :

Le raisonnement suivant marche pour $\Omega = \mathbb{N}$ (l'année prochaine quoi). On regarde de droite à gauche.

1. $\mathbb{P}(X \neq 0) = \mathbb{P}(X \geq 1) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{1} = \mathbb{E}[X]$.
2. $\mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X \neq 0}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{P}(X \neq 0)$ par Cauchy-Schwarz. D'où le résultat.
3. On a

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]^2} \leq \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]} &\iff -\frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]^2} \leq \frac{\mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X^2]} \\ &\iff \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]^2} \geq \frac{\text{Var}[X]}{\mathbb{E}[X^2]}. \end{aligned}$$

Mais $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X]^2 + \text{Var}(X) \geq \mathbb{E}[X]^2$. D'où le résultat (on rappelle que la variance est positive).

Remarque : on aurait pu avoir l'inégalité entre le premier et le troisième membre directement. On écrit

$$X = 0 \implies |X - \mathbb{E}[X]| \geq \mathbb{E}[X].$$

D'où

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \mathbb{E}[X]) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]^2}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X \neq 0) \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]^2}.$$

Indication pour l'exercice 22.13 :

1. On a

$$\{S_n - np \geq nx\} = \{\lambda(S_n - np) \leq n\lambda x\} = \{e^{\lambda(S_n - np)} \geq e^{n\lambda x}\}.$$

Par Markov, puisque $e^{\lambda(S_n - np)} \geq 0$,

$$\mathbb{P}(S_n - np \geq nx) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda(S_n - np)}]}{e^{n\lambda x}}.$$

2. Par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[e^{\lambda(S_n - np)}] = e^{-n\lambda p} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{\lambda p})^k q^{n-k} = e^{-n\lambda p} (e^{\lambda p} + q)^n = (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n.$$

3. La fonction f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = 2te^{t^2} + 1 - e^t$. On a ensuite

$$\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) = (4t^2 + 2)e^{t^2} - e^t = e^{t^2}(4t^2 + 2 - e^{t-t^2}).$$

4. On distingue deux cas. Si $t \notin [0, 1]$, alors $t^2 \geq t$ donc $e^{t^2} \geq e^t$ puis $f''(t) \geq 0$. Si $t \in [0, 1]$, on utilise l'inégalité classique $t - t^2 \leq \frac{1}{4}$ pour avoir $2 - e^{t-t^2} \geq 0$ donc $f''(t) \geq 0$. Ainsi, $e^t \leq e^{t^2} + t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

5. La fonction f' est donc croissante. Comme $f'(0) = 0$, f' est négative sur $] -\infty, 0]$ positive sur $[0, +\infty[$. Ainsi, f est décroissante sur $] -\infty, 0]$ puis croissante sur $[0, +\infty[$ donc $f \geq f(0) = 0$ donc f est positive. On applique l'inégalité précédente à λq et $-\lambda p$. On a

$$\mathbb{E}[e^{\lambda(S_n - np)}] \leq (p(e^{\lambda^2 q^2} + \lambda q) + q(e^{\lambda^2 p^2} - \lambda p)) \leq ((p + q)e^{\lambda^2})^n \leq e^{n\lambda^2}.$$

Puis,

$$\mathbb{P}(S_n - np \geq nx) \leq e^{n(\lambda^2 - \lambda x)}.$$

6. On minimise à droite. On trouve $\lambda = x/2$. On a donc $\mathbb{P}(S_n - np \geq nx) \leq e^{-nx^2/4}$. On montre de même que $\mathbb{P}(S_n - np \leq -nx) \leq e^{-nx^2/4}$. D'où

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right) = \mathbb{P}(S_n - np \geq nx) + \mathbb{P}(S_n - np \leq -nx) \leq 2e^{-nx^2/4}.$$

Chapitre 23

Matrices d'une application linéaire

23.1 Exercices

Exercice 23.1 (Un grand classique).

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle. En déduire que toute matrice de trace nulle s'écrit $MN - NM$. On pourra montrer que toute matrice de diagonale nulle s'écrit $BD - DB$ avec $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$ et B quelconque.

Exercice 23.2.

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la dimension, puis une base de l'espace des matrices de trace nulle. Montrer que le noyau de la trace s'écrit $\text{Vect}(\{(AB - BA) : (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\})$. En déduire que toute forme linéaire φ vérifiant $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ est colinéaire à la trace.

Exercice 23.3.

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ multiplicative non constante.

1. Déterminer $f(I_n)$ et $f(0)$.
2. Soit A, B de même rang. Montrer que $f(A) = 0$ si, et seulement si $f(B) = 0$.
3. Déterminer $f(A)$ si A n'est pas inversible. On commencera par le cas nilpotent.

Exercice 23.4. [Shift]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X + 1)$. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$, puis son inverse si elle est inversible. En déduire que pour toutes suites $(u_n)_n, (v_n)_n$, on a

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \right) \iff \left(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} v_k \right).$$

(c'est une preuve alternative de l'exercice 2.8).

Exercice 23.5.

Soit A, B , deux matrices carrées telles que $AB - BA$ soient de rang 1. Montrer que $(AB - BA)^2 = 0$.

Exercice 23.6.

Existe-t-il des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 23.7. [Hadamard]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |m_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |m_{i,j}| \right) \implies M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 23.8.

Montrer que toute matrice non inversible est équivalente à une matrice triangulaire supérieure stricte.

Exercice 23.9.

Soit a un réel. Déterminer, en fonction de a le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23.10. [Rang de la transconjugée]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\dagger)$. On note $A^\dagger$ ou A^* , la transconjugée. On a $A^\dagger := \overline{A}^T$, avec $\overline{A}$, la matrice dont les coefficients sont les conjugués des initiaux.

Exercice 23.11. [Matrice dans $\{0, 1\}$]

Soit M , une matrice à coefficient dans $\{0, 1\}$.

1. Montrer que si M est inversible, alors le nombre de 1 est dans $\llbracket n, n^2 - (n - 1) \rrbracket$.
2. Montrer que tous les cas sont possibles.

Exercice 23.12. [Un peu de nilpotence]

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$. Soit A , une matrice nilpotente d'indice n . Montrer que A est semblable à une matrice ne contenant que des 1 dans la sous-diagonale, et des 0 partout ailleurs. Existe-t-il des solutions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'équation $X^2 = A$?

Exercice 23.13 (Idéaux bilatères). Soit A un anneau. On dit que I est un idéal bilatère de A lorsque

- $(I, +)$ est un sous-groupe de A .
- $\forall x \in I, \forall a \in A, ax \in I$ et $xa \in I$.

L'objectif est de montrer que les idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont $\{0_n\}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit donc $I \neq \{0\}$ idéal bilatère de $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si $I_n \in A$, alors $I = A$. En déduire que $I \cap A^\times \neq \emptyset$, alors $I = A$.
2. Soit $M \in I$ de rang r . Soit U une matrice diagonale contenant exactement r fois le coefficient 1. Montrer que $U \in I$.
3. En déduire que $I \cap A^\times \neq \emptyset$.

Exercice 23.14 (Un début de diagonalisation). Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Montrer que

A et B sont semblables.

23.2 Eléments de corrections

Indication pour l'exercice 23.1 :

Soit M la matrice de trace nulle. On procède par récurrence sur n (le même n que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Pour $n = 1$, le résultat est immédiat.

Soit u , l'endomorphisme canoniquement associée à M . Si u est une homothétie, il est clair que u est de diagonale nulle (la trace d'une homothétie étant égale à $n\lambda$ si λ est le coefficient de l'homothétie).

Si u n'est pas une homothétie, alors je peux trouver un x non nul tel que $(x, u(x))$ ne soit pas liée (voir l'exercice

18.10). Notons $\mathcal{B}$, la base obtenue par le principe de la base incomplète appliquée à la famille libre $\{x, u(x)\}$. J'ai donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ u & N \end{pmatrix}$$

avec u le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ composé que de 0 sauf en première ligne, et N une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Puisque M est semblable à $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, elles ont la même trace, donc $\text{Tr}(N) = 0$. Par hypothèse de récurrence, je peux trouver Q inversible tel que QNQ^{-1} soit de diagonale nulle.

Je pose alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

de sorte que $P\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & QNQ^{-1} \end{pmatrix}$ qui est donc de diagonale nulle.

Continuons. Déjà, l'indication. Soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $[DB - BD]_{i,j} = (i - j)[B]_{i,j}$. Il suffit alors de prendre $[B]_{ij} = \frac{1}{i-j}[A]_{ij}$ et n'importe quoi en coefficients diagonaux.

Pour conclure, soit M de trace nulle. Soit C de diagonale nulle et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = PCP^{-1}$. C s'écrit $DB - BD$. Donc $M = PDBP^{-1} - PBDP^{-1} = PDP^{-1}PBP^{-1} - PBP^{-1}PDP^{-1} = MN - NM$ avec $N = PBP^{-1}$ et $M = PDP^{-1}$.

Indication pour l'exercice 23.2 :

1. La trace est une forme linéaire : son noyau est un hyperplan de dimension $n^2 - 1$. Il est aisé de montrer que tous les E_{ij} pour $i \neq j$ sont dans le noyau. Aussi, on peut montrer que les $E_{ii} - E_{11}$ y sont aussi, pour $i \neq 1$ ce qui fait $n^2 - 1$ vecteurs libres. Par dimension, on a bien une base.
2. On procède par double inclusion. L'inclusion de droite à gauche est triviale. Pour la deuxième, on se souvient que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
Pour $i \neq j$, on a alors $E_{ij} = E_{ii}E_{ij} - E_{ij}E_{ii}$.
Pour $i \neq 1$, on a $E_{ii} - E_{11} = E_{i1}E_{1i} - E_{1i}E_{i1}$.
D'où l'inclusion réciproque puisque le Vect contient une base du noyau.
3. Ainsi, on sait que φ et Tr induisent le même hyperplan : le cours assure qu'il existe un λ tel que $\varphi = \lambda \text{Tr}$.

Indication pour l'exercice 23.3 :

1. On rappelle que cela signifie que $f(AB) = f(A)f(B)$. Soit A une matrice telle que $f(A) \neq 0$ (possible car f n'est pas constante). $f(AI_n) = f(A)f(I_n)$ donc $f(A)(1 - f(I_n)) = 0$. Puisque $f(A)$ est non nulle, on en déduit par intégrité de $\mathbb{C}$ que $1 = f(I_n)$ (j'insiste sur le fait que f est une forme linéaire!). Également, soit A une matrice telle que $f(A) \neq 1$ (possible car f n'est pas constante). $f(0) = f(0)f(A)$ donc $f(0)(1 - f(A)) = 0$. Ainsi, $f(0) = 0$.
2. Il faut déterminer $f(A)$ avec A inversible. On a $f(AA^{-1}) = 1 = f(A)f(A^{-1})$. Donc $f(A) \neq 0$ et $f(A)^{-1} = f(A^{-1})$.
Ainsi, puisque A et B ont même rang, elles sont équivalentes, donc A s'écrit PBQ avec P, Q inversible. Donc $f(A) = f(B)f(P)f(Q)$. Puisque $f(P)f(Q)$ est non nul, $f(A) = 0 \iff f(B) = 0$.
3. On a pour tout n $f(A^n) = f(A)^n$. Puisque A est nilpotente, $f(A^n) = f(0) = 0 = f(A)^n$ donc $f(A) = 0$. Maintenant, toute matrice non inversible est équivalente à une matrice nilpotente (voir l'exercice 23.8). Par la question précédente, on a donc $f(A) = 0$ si A n'est pas inversible.

Indication pour l'exercice 23.4 :

On calcule φ sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On a

$$\varphi(X^j) = (X + 1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i.$$

Ainsi, la matrice dans la base canonique de φ est la matrice triangulaire supérieure de coefficients $\left(\binom{j-1}{i-1} \right)_{i,j}$. φ est clairement inversible car $\psi : P \mapsto P(X - 1)$ est sa réciproque. On calcule ψ sur la base canonique :

$$\psi(X^j) = (X - 1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} X^i.$$

Sa matrice est donc $\left(\binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} \right)$.

Application : je prends un vecteur colonne de coefficient $u_0, \dots, u_n$. On note $v_0, \dots, v_n$ les coefficients donnés par le produit matriciel $\text{Mat}(\varphi)(u_0, \dots, u_n)^T$ (c'est juste pour gagner de la place sur L^AT_EX). Alors par précédent, on a donc

$$(u_0, \dots, u_n)^T = \text{Mat}(\psi)(v_0, \dots, v_n)^T$$

En développant les deux produits matriciels, on trouve exactement l'équivalence voulue.

Indication pour l'exercice 23.5 :

Soit u , l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $AB - BA$. Par le théorème du rang, $\dim(\ker(u)) = n - 1$. Soit $e_1, \dots, e_{n-1}$, une base du noyau. On la complète pour en faire une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, la matrice M de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Mais a_n est nulle car la trace de $AB - BA$ est nulle. De fait $M^2 = 0$ donc $(AB - BA)^2 = 0$ (car l'endomorphisme est représenté matriciellement dans toute base par la matrice nulle).

Indication pour l'exercice 23.6 :

Supposons qu'elle existe. Déjà, $\text{rg}(M^2) = 2$. Donc $\text{rg}(M)$ vaut 2 ou 3. Si c'est 3, alors M est inversible, donc M^8 aussi, ce qui n'est pas ($M^8 = 0$). Donc $\text{rg}(M^2) = \text{rg}(M)$.

Astuce : regardons $v_{\text{Im}(u)}$. Appliquons le théorème du rang sur cet endomorphisme. On a

$$\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u) - \dim(\ker(v) \cap \text{Im}(u)).$$

Ici, $u = v$, donc on obtient $\text{rg}(M^2) = \text{rg}(M) - \dim(\ker(M) \cap \text{Im}(M))$. Donc $\ker(M) \cap \text{Im}(M) = \{0\}$. Clairement, $\ker(M) \subset \ker(M^2)$. Soit $X \in \ker(M^2)$. Alors $M(MX) = 0$. Donc $MX \in \ker(M) \cap \text{Im}(M)$ donc $MX = 0$, donc $X \in \ker(M)$. Ainsi $\ker(M^2) = \ker(M)$. Donc $\ker(M^2) \cap \text{Im}(M^2) = \{0\}$. On a donc de même $\ker((M^2)^2) = \ker(M^4) = \ker(M^2) = \ker(M)$. Absurde car M^4 a un rang de 1 qui n'est pas 2. Donc M n'existe pas.

Correction de l'exercice 23.7 :

On va montrer que $\text{rg}(M) = n$. Raisonnons par contraposée. Alors :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n \lambda_j m_{i,j} = 0.$$

Soit j_0 , l'indice tel que $|\lambda_{j_0}| = \sup_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j|$. Par la condition de domination, $\lambda_k = 0$ et :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j m_{j_0,j} \text{ i.e. } m_{j_0,j_0} = - \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_{j_0}} m_{j_0,j} \text{ i.e. } |a_{j_0,j_0}| \leq \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \frac{|\lambda_j|}{|\lambda_{j_0}|} |m_{j_0,j}| \leq \sum_{j=1, j \neq j_0}^n |m_{j_0,j}|.$$

CQFD.

Indication pour l'exercice 23.8 :

Puisque M n'est pas inversible, son rang est différent de n . Notons-le r . Alors la matrice

$$\begin{pmatrix} 0_{n-r} & I_r \\ 0_{r,n-r} & 0_r \end{pmatrix}$$

est nilpotente de rang r . Ainsi, M est équivalente à la matrice précédente, ce qui conclut.

Indication pour l'exercice 23.9 :

On procède par opérations élémentaires sur les colonnes (ou les lignes). En pivotant, on se ramène aisément à

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 - a^4 & a(1 - a^4) & a^2(1 - a^4) \\ 0 & 0 & 1 - a^4 & a(1 - a^4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 \end{pmatrix}.$$

On voit facilement qu'elle est inversible si $a \neq \pm 1$, et que son rang est 1 sinon.

Indication pour l'exercice 23.10 :

• Par le cours, il est clair que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$.

Soit $r = \text{rg}(A)$. Alors il existe $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PJ_rQ$. Il est immédiat que $\overline{AB} = \overline{A} \times \overline{B}$ pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Puisque J_r est réelle, on a donc

$$\overline{A} = \overline{P}J_r\overline{Q}.$$

Clairement, $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ sont inversibles, donc $\text{rg}(\overline{A}) = r$.

Indication pour l'exercice 23.11 :

1. Puisque M est inversible, il y a au moins un 1 dans chaque colonne, ce qui fait au moins $n-1$ dans M . Par contre, au plus une colonne peut être égale à la colonne composée que de 1. Dans les autres colonnes, il y a forcément un 0, ce qui fait $n-1$ 0. Il y a donc au maximum $n^2 - (n-1) 0$.
2. On remarque que

$$(C_1|C_2|\cdots|C_{n-1}|C_n) \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \iff (C_n - C_1|C_n - C_2|\cdots|C_n - C_{n-1}|C_n) \in \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Il suffit d'appliquer cette propriété sur la matrice M qui est triangulaire supérieure, composée que de 1 sur la diagonale et sur la dernière colonne.

Indication pour l'exercice 23.12 :

Soit $x_0 \notin \ker(u^{n-1})$. C'est possible car si $\ker(u^{n-1}) = E$, alors $u^{n-1} = 0$ contredisant l'indice de nilpotence. Alors $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre. En effet, soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0.$$

En composant par u^{n-1} à gauche, on en déduit que λ_0 vaut 0. La somme commence donc à 1 et on compose par A^{n-2} pour avoir $\lambda_1 = 0$, etc. C'est une base car j'ai n vecteurs. Dans cette base, la représentation matricielle de u est clairement celle annoncée.

Il n'y a pas de solution à l'équation : en effet, si $X^2 = A$, alors X serait nilpotente ($X^{2n} = A^n = 0$). Donc $X^n = 0$ car toute matrice nilpotente a son indice de nilpotence inférieur à n . De fait, puisque $A^{n-1} \neq 0$, on a $X^{2n-2} \neq 0$ donc $X^n X^{n-2} \neq 0$. Puisque $n \geq 2$, c'est absurde car $X^n = 0$. Donc je n'ai pas de solution.

Indication pour l'exercice 23.13 :

1. Si $I_n \in I$, alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M = MI_n \in I$ donc I contient $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui contient I puisque I en est un sous-groupe. Donc $I = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.¹ Si $I \cap \text{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$, soit T dans cet ensemble. Alors T^{-1} existe et est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $T \in I$ donne $TT^{-1} \in I$ donc $I_n \in I$. Ainsi, $I = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.²
2. Remarquons que si A est une matrice de I , toute matrice B équivalente à A est aussi dans I . En effet, si A et B sont équivalentes, il existe P, Q inversibles telles que $B = PAQ$ et $AQ \in I$ et $P(AQ)$ est donc dans I . Ainsi, comme toute matrice de rang r est équivalente à J_r , A est équivalente à J_r donc $J_r \in A$.

Considérons donc notre matrice U et $j_1, \dots, j_r$, les indices des colonnes qui contiennent un « 1 ». Soit

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$$

Alors par opérations élémentaires sur les colonnes, on a $J_r M_\sigma = U$.

Rappel : Réaliser une opération élémentaire sur les lignes/colonnes induit une multiplication à gauche/droite par une matrice bien choisie. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$, réaliser $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, c'est multiplier à gauche par $(I_n + \lambda E_{ij})$. Ici, M_σ désigne $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique. En fait, on permute les colonnes de I_n selon σ . AM_σ permute les colonnes de A selon σ . Plus généralement, voilà ce qu'il faut retenir.

¹. Ce fait est général. Si $(A, +, \times)$ est un anneau et I un idéal de A , si I contient le neutre pour $\times$, alors $I = A$. Les idéaux sont au programme seulement en MP, et tombe à 99% seulement à X-ENS aux écrits, et un peu aux oraux de tout concours. Je parle d'idéaux dans la sous-section 11.1.3.

². Ce fait est encore général. Si I est un idéal de A et intersecte $A^\times$, alors $I = A$.

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit T une transformation d'une matrice vers une autre. Alors

si T réalise l'opération	alors on réalise
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$T_{ij}(\lambda)A$
$L_i \leftarrow \mu L_i$	$D_i(\mu)A$
$L_i \leftrightarrow L_j$	$M_{\tau_{ij}}A$

où L_i désigne la i -ème ligne de A , λ, μ deux scalaires et μ non nul, $T_{ij}(\lambda)$ désigne $I_n + \lambda E_{ij}$, $D_i(\lambda)$ désigne $T_{ii}(\mu - 1)$ et $M_{\tau_{ij}}$ matrice identité où l'on a échangé les colonnes i et j . On a le même tableau pour les colonnes, sauf que cette fois-ci, la matrice A est multipliée par la droite mais avec une transposée.^a Ces matrices en questions sont appelées matrices élémentaires, associées aux opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice, respectivement matrice de transvection, dilatation, permutation.

^a. Si l'on réalise une permutation σ sur les lignes, on multiplie par $M_{\sigma^{-1}}$ à gauche. Si l'on réalise une permutation σ sur les colonnes, on multiplie par M_σ à droite.

3. Notons $\tau_i = (r \ i)$ où r est le rang défini précédemment. Alors

$$\forall i \in \llbracket r+1, n \rrbracket, \underbrace{J_r M_{\tau_i}}_{\in I} = \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0_{r-1, n-r+1} \\ 0_{n-r+1, r-1} & 0_{n-r+1} \end{pmatrix} + E_{ii} = J_{r-1} + E_{ii}.$$

Donc $((I, +))$ est un sous-groupe

$$\sum_{\substack{k=r+1 \\ \in I}}^n J_r M_{\tau_i} = (n-r)J_{r-1} + \begin{pmatrix} 0_{r-1} & 0_{r-1, n-r+1} \\ 0_{n-r+1, r-1} & I_{n-r-1} \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Ainsi, I intersecte $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ donc $I = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Indication pour l'exercice 23.14 :

Ceci est une solution et ce n'est peut-être pas celle que préconise M. Laillet. Référez-vous au cours/TD !
Bon, comment se débrouiller ? Par le cours, il existe $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de $\mathbb{R}^3$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) ; B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u).$$

Faisons simple. Prenons $\mathcal{B}_1$ base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u endomorphisme canoniquement associée à A . On note $(e_1, e_2, e_3) = \mathcal{B}_1$. Alors en lisant la matrice A , on a – mais ce n'est pas utile dans la suite –,

$$\begin{aligned} u(e_1) &= 0e_1 + 3e_2 - 2e_3 \\ u(e_2) &= 2e_1 - 2e_2 + 2e_3 \\ u(e_3) &= -1e_1 + 0e_2 + 1e_3 \end{aligned}$$

Bref, si A et B sont semblables, alors il existe $(f_1, f_2, f_3) = \mathcal{B}_2$ base de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$u(f_1) = f_1, u(f_2) = 2f_2, u(f_3) = -4f_3.$$

Que dire de f_1, f_2 et f_3 ? On cherche un vecteur $g \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(g) = g$. Passons sous forme matriciel. Dans la base $\mathcal{B}_1$ canonique, en notant $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(g)$, on cherche à résoudre $AX = X$ ³. Allons-y.

³. $u(g) = g \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(g)$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} AX = X &\iff (A - I_3)X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff x = y, y = z. \end{aligned}$$

Ainsi, $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

On fait de même pour f_2 donc on veut résoudre $AX = 2X$.

$$\begin{aligned} AX = 2X &\iff (A - 2I_3)X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Avec la deuxième équation, j'aimerais bien prendre $x = 4, y = 3$ (pour avoir des entiers) ce qui donne, avec la première équation $z = -2$. Ainsi, $f_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ convient.

On termine par f_3 donc résoudre $AX = -4X$.

$$\begin{aligned} AX = -4X &\iff (A + 4I_3)X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1}{\iff} \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ 18x + 12y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi, $f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ convient.

Synthèse : est-ce que (f_1, f_2, f_3) ainsi construit est une base ? On va faire plus fort : on va calculer l'inverse.

	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow -L_2 + L_1$ $L_3 \leftarrow -L_3 + L_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow 6L_2 + L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow 15L_1 - 10L_2 + L_3$	$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow \frac{1}{15}L_1$ $L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2$ $L_3 \leftarrow \frac{-1}{30}L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, on a P^{-1} qui existe et $P^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. Par construction, on a alors

$$A = PBP^{-1}.$$

Chapitre 24

Séries numériques

24.1 Exercices

Exercice 24.1.

Nature et valeur de $\sum \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 24.2.

Nature et valeur de $\sum \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ en fonction de $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 24.3.

Nature et valeur de $\sum \ln \cos(x/2^n)$ avec $x \in]0, \pi/2[$.

Exercice 24.4.

Nature et valeur de $\sum \ln \left(\frac{\ln^2(n+1)}{\ln(n) \ln(n+2)} \right)$.

Exercice 24.5.

Nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 24.6.

Nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n \ln(n)}$ avec $\alpha > 0$.

Exercice 24.7.

Nature de $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 24.8.

Nature de $\sum \sin(n! \pi e)$. On pourra admettre le théorème de sommation des relations de comparaisons. Il y en a essentiellement 4. On admettra le suivant :

Proposition 24.1.

Soit $a_n \sim b_n$. Si $a_n, b_n \geq 0$ et $\sum b_n$ converge, alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.

Exercice 24.9.

Soit σ , une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_{\sigma(n)}$ aussi.

Exercice 24.10.

Nature de $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ et $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}^*}$. On pourra utiliser l'exercice précédent.

Exercice 24.11.

Equivalent de $u_n = \left(\prod_{k=1}^n k^k \right)^{1/n}$.

Exercice 24.12.

Soit $(u_n)_n$, une suite positive décroissante tel que $\sum u_n$ converge. Montrer que $nu_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Que se passe-t-il si on enlève la décroissance ?

Exercice 24.13 (Autour de e).

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. On pourra manipuler l'inégalité de Taylor-Lagrange.

24.2 Éléments de corrections

Indication pour l'exercice 24.1 :

Si $p = 0$, la série diverge grossièrement. Si $p = 1$, la série est la série harmonique, qui diverge.

Soit donc $p \geq 2$. On a

$$u_n = \frac{p!}{1-p} \frac{(n+1) - (n+p)}{\prod_{i=1}^{p-1} (n+i)} = \frac{p!}{1-p} (v_{n+1} - v_n),$$

avec $v_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^{p-1} (n+i)}$. Clairement, $(a_n)_n$ tend vers 0 (on peut même donner un équivalent), donc la série

cherchée s'écrit comme série télescopique, et on a $\sum u_n = -\frac{p!}{1-p} v_0 = \frac{p}{p-1}$.

Indication pour l'exercice 24.2 :

Soit $n \geq 1$. On écrit

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} + b\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}.$$

Alors en faisant un développement asymptotique, on a

$$u_n = (1+a+b)\sqrt{n} + \left(\frac{1}{2}a+b\right) \frac{1}{\sqrt{n}} + O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right).$$

Si $1+a+b \neq 0$, la série diverge.

Si $1+a+b = 0$ et $\frac{1}{2}a+b \neq 0$, la série diverge.

Si $1+a+b = 0$ et $\frac{1}{2}a+b = 0$, donc $a = -2$ et $b = 1$, la série converge. Dans ce cas, on a

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \sqrt{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k} + \sum_{k=2}^{n+2} \sqrt{k} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1,$$

où la limite est obtenue en multipliant par la quantité conjuguée des racines carrées.

Indication pour l'exercice 24.3 :

Clairement, pour tout n , on a $\sin(x/2^n)$ et $\cos(x/2^n)$ dans $]0, 1[$ et que $u_n = \ln \cos(x/2^n)$ est bien défini. On a

$$u_n \sim \cos(x/2^n) - 1 \sim -\frac{x^2}{2} \frac{1}{4^n}.$$

Donc la série des u_n converge par comparaison de SATN (négatif).

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\ln(\cos(x/2^k)) = \ln(\sin(x/2^{k-1})) - \ln(\sin(x/2^k)) - \ln(2).$$

En sommant, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= u_0 + \sum_{k=1}^n \ln(\sin(x/2^{k-1})) - \ln(\sin(x/2^k)) - \ln(2) \\ &= \ln(\cos(x)) + \ln(\sin(x)) - \ln(\sin(x/2^n)) - n \ln(2) \\ &= \ln(\sin(2x)/2) - \ln(2^n \sin(x/2^n)). \end{aligned}$$

On a $2^n \sin(x/2^n) \sim x$ d'où

$$\sum \ln(\cos(x/2^k)) = \ln(\sin(2x)/(2x)).$$

Indication pour l'exercice 24.4 :

Soit $n \geq 2$. On a

$$u_n = 2 \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(n+2)) \geq 0$$

par concavité de $\ln \circ \ln$. On peut s'inspirer de l'exercice 13.1 pour avoir l'inégalité voulue. Soit $v_n = \exp(u_n)$. On a

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{(\ln(n) + \ln(1 + 1/n))^2}{\ln(n)(\ln(n) + \ln(1 + 2/n))} \\ &= \frac{(\ln(n) + 1/n + O(1/n^2))^2}{\ln(n)(\ln(n) + 2/n + O(1/n^2))} \\ &= \frac{(1 + \frac{1}{n \ln(n)} + O(\frac{1}{n^2 \ln(n)}))^2}{1 + \frac{2}{n \ln(n)} + O(\frac{1}{n^2 \ln(n)})} \\ &= \left(1 + \frac{2}{n \ln(n)} + O\left(\frac{1}{n^2 \ln(n)}\right)\right) \left(1 - \frac{2}{n \ln(n)} + O\left(\frac{1}{n^2 \ln(n)}\right)\right) \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{n^2 \ln(n)}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, $u_n = O(\frac{1}{n^2 \ln(n)})$. Le théorème de comparaison conclut car SATP. Pour conclure quant à la valeur, on fait apparaître un télescopage du même acabit que l'exercice 24.2. On obtient alors

$$S_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) - \ln(\ln(n+2)) + \ln(\ln(3)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2)).$$

Correction de l'exercice 24.5 :

Si $\alpha > 1, \exists \gamma \in]1, \alpha[$. Alors par croissances comparées,

$$n^\gamma u_n = \frac{n^{\gamma-\alpha}}{\ln^\beta(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc :

$$u_n \in o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right).$$

Donc :

$$\sum u_n \text{ converge.}$$

Si $\alpha < 1$, nu_n tend vers l'infini. Donc $\frac{1}{n} \in o(u_n)$. Ainsi

$$\sum u_n \text{ diverge.}$$

Pour $\alpha = 1$, cela dépend de β .

Si β est négative, il est clair que $u_n \geq \frac{1}{n}$. Donc la série diverge.

Si β est strictement positive, je vais pouvoir faire une comparaison série-intégrale.

Pour $k \leq 3$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln^\beta(t)} \leq \frac{1}{k \ln^\beta(k)} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t \ln^\beta(t)}.$$

D'où :

$$\sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln^\beta(t)} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln^\beta(k)} \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t \ln^\beta(t)}.$$

i.e.

$$\int_3^{n+1} \frac{dt}{t \ln^\beta(t)} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln^\beta(k)} \leq \int_2^n \frac{dt}{t \ln^\beta(t)}.$$

Si $\beta = 1$, une primitive des intégrandes considérées est $\ln \circ \ln$. Donc $\sum u_n$ diverge.

Si $\beta \neq 1$, une primitive des intégrandes considérées est

$$t \mapsto \frac{\ln^{1-\beta}(t)}{1-\beta}.$$

Donc l'intégrale diverge ssi $1 - \beta > 0$. Donc si $\beta > 1$, la série converge. Sinon elle diverge.

Bilan :

- $\alpha > 1$, la série converge
- $\alpha < 1$, la série diverge
- $\alpha = 1$
 - $\beta > 1$, la série converge
 - $\beta \leq 1$, la série diverge.

Indication pour l'exercice 24.6 :

On écrit

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \frac{1}{1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha}} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} + o(1/n^{2\alpha}).$$

Soit $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Par le critère spécial des séries alternées, la nature des séries de terme général $(u_n)_n$ ou $(v_n)_n$ sont les mêmes. Clairement, $\sum v_n$ et $\sum (-\ln(n)/n^{2\alpha})$ sont de même nature par comparaison de SATN. On applique les résultats (ou le même raisonnement) que pour les séries de Bertrand, l'exercice 24.5.

Indication pour l'exercice 24.7 :

On note le terme général u_n . En passant par la quantité conjuguée, on a $|u_n| \sim \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ (à vérifier). Clairement, si $\alpha \leq -1/2$, la série diverge grossièrement. Soit donc $\alpha > -1/2$. On a

$$u_n = \frac{2(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}(2 + O(1/n))} = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} + v_n,$$

avec v_n une suite dominée par $\frac{1}{n^{\alpha+\frac{3}{2}}}$. Puisque la série des v_n converge par Riemann (SATP) et qu'on peut appliquer le critère spécial des séries alternées pour l'autre, on a la convergence de $\sum u_n$.

Indication pour l'exercice 24.8 :

Une preuve du théorème admis : on va montrer la proposition suivante.

Proposition 24.2.

Soit $a_n \in o(b_n)$. Si $b_n \geq 0$ et $\sum b_n$ converge, alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \in o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$.

Démonstration 24.1.

Par comparaison de SATP, $\sum |a_n|$ converge. Notons $R_n := \sum_{k \geq n+1} a_k$ et $Q_n := \sum_{k \geq n+1} b_k$. Soit $\varepsilon > 0$ et N

tel que $\forall n \geq N, |a_n| \leq \varepsilon |b_n|$.

Pour $n \geq N, |R_n| \leq \sum_{k \geq n+1} |a_k| \leq \sum_{k \geq n+1} \varepsilon b_k = \varepsilon Q_n$.

J'ai donc bien l'existence d'un N tel que $\forall n \geq N, |R_n| \leq \varepsilon |Q_n|$.

Donc $R_n \in o(Q_n)$.

□

On applique le théorème précédent à $(a_n - b_n) \in o(b_n)$. J'obtiens alors $R_n - Q_n \in o(Q_n)$, R_n étant bien positif par positivité de $(a_n)_n$. □.

On rappelle que

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(Preuve : on peut utiliser Taylor par exemple). Alors

$$n!e = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = n! \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}}_{p_n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{n!}{k!}.$$

Or, $p_n = n! + \dots + n(n-1) + n + 1$ est de même parité que $n+1$. Par ailleurs, pour $k \geq n+3$, on a

$$\frac{n!}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)(k-2)} \sim \frac{1}{k^3}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} \sim \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{k^3},$$

par le théorème de sommation des relations de comparaisons. On sait de plus, par une comparaison série-intégrale que

$$\sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}.$$

On en déduit que

$$n!e = p_n + \frac{1}{n+1} + O(1/n^2).$$

Ainsi,

$$\sin(n!e\pi) = \sin(p_n\pi + \pi/n + O(1/n^2)) = (-1)^{n+1} \sin(\pi/n + O(1/n^2)) = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + O(1/n^2).$$

Ainsi, la série converge par critère spécial des séries alternées.

Indication pour l'exercice 24.9 :

Soit σ , une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^n |u_{\sigma(n)}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| < +\infty,$$

donc $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument donc converge. Il ne reste qu'à montrer l'égalité. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| \leq \varepsilon/3$. Puisque σ est bijective, il existe un entier N' tel que

$$\{0, 1, \dots, N\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(N')\}.$$

De fait, on fait la grand classique : une inégalité "carrée" (c'est juste une inégalité triangulaire : l'idée : pour aller à un point A à un point B, on passe par deux point intermédiaire. La distance parcourue est naturellement supérieure à la distance AB) :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \right| &\leq \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^N u_n \right| + \left| \sum_{n=0}^N u_n - \sum_{n=0}^{N'} u_{\sigma(n)} \right| + \left| \sum_{n=0}^{N'} u_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \right| \\ &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| + \sum_{n=N'+1}^{+\infty} |u_{\sigma(n)}| \\ &\leq 3 \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

ε étant arbitraire, on a bien l'égalité voulue.

Indication pour l'exercice 24.10 :

On utilise Cauchy-Schwarz.

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sigma(k)} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma^2(k)} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sigma^2(k)} (= \frac{\pi^4}{36}).$$

On utilise Cauchy-Schwarz.

$$H_n^2 = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{\sigma(k)}}{k} \frac{1}{\sqrt{\sigma(k)}} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k^2} \sum_{n=1}^n \frac{1}{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(n)}{n^2} H_n.$$

Donc $H_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(n)}{n^2}$ donc la série diverge par comparaison.

Indication pour l'exercice 24.11 :

On pose $v_n = \ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \ln(k)$. Par une comparaison série-intégrale, on montre facilement que

$$\sum_{k=1}^n k \ln(k) \sim \frac{n^2 \ln(n)}{2}.$$

Donc $v_n \sim \frac{n \ln(n)}{2}$. Mais on ne peut rien dire avec ça. Il faut pousser le développement. Pour cela, on retire l'intégrale de notre comparaison série-intégrale. On pose alors

$$w_n = \sum_{k=1}^n k \ln(k) - \int_1^n t \ln(t) dt = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k (k \ln(k) - t \ln(t)) dx.$$

Par le théorème des accroissements finis, pour $t \in [k-1, k]$ avec $k \geq 2$, on a un

$$(1 + \ln(k-1))(k-t) \leq k \ln(k) - t \ln(t) \leq (1 + \ln(k))(k-t),$$

donc en intégrant, on a

$$\frac{1}{2} + \frac{\ln(k-1)}{2} \leq \int_{k-1}^k (k \ln(k) - x \ln(x)) dx \leq \frac{1}{2} + \frac{\ln(k)}{2}.$$

En sommant, on a donc

$$\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \ln(k-1) \leq w_n \leq \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \ln(k).$$

Ainsi, on a

$$\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \ln(n!) - \frac{\ln(n)}{2} + O(1) \leq w_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \ln(n!) + O(1).$$

Par Stirling, on a

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + O(1).$$

Donc

$$\frac{n \ln(n)}{2} + O(\ln(n)) \leq w_n \leq \frac{n \ln(n)}{2} + O(\ln(n)).$$

Finalement, on a $w_n = \frac{n \ln(n)}{2} + o(\ln(n))$ donc

$$\sum_{k=1}^n k \ln(k) \underset{\star}{=} \frac{n^2 \ln(n)}{2} - \frac{n^2}{4} + \frac{n \ln(n)}{2} + O(\ln(n)),$$

($\star$: vient de la comparaison série intégrale)

donc $v_n = \frac{n \ln(n)}{2} - \frac{n}{4} + \frac{\ln(n)}{2} + o(1)$. On peut enfin passer à l'exponentielle, ce qui donne

$$u_n \sim \sqrt{n}^{n+1} e^{-n/4}.$$

Indication pour l'exercice 24.12 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$0 \leq 2nu_{2n} \leq 2(u_{2n} + u_{2n-1} + \cdots + u_{n+1}) = 2(S_{2n} - S_n),$$

avec S_n , la somme partielle. Puisque S_n converge, $S_{2n} - S_n$ tend vers 0 donc $2nu_{2n}$ tend aussi vers 0. On a finalement

$$0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq 2nu_{2n+1} + u_{2n+1} \leq 2nu_{2n} + u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc les termes impairs et pairs convergent, et ce vers la même limite, donc $(nu_n)_n$ converge, et ce vers 0. D'où le résultat.

Si on enlève la décroissance, soit $u_n = \frac{1}{n}$ si $\exists k, n = 2^k$, 0 sinon. Alors clairement,

$$\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Pourtant, $(nu_n)_n$ n'a pas de limite (oscille entre 1 et 0). Normal, $(u_n)_n$ ne décroît pas.

Indication pour l'exercice 24.13 :

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange. Pour f , une fonction $n+1$ fois dérivable sur $[0, x]$, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,x]} |f^{(n+1)}|.$$

L'égalité est vraie pour tout n pour la fonction exponentielle. J'ai donc

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$$

La question est donc de calculer la limite de $x^n/n!$. Fixons x et notons $N = \lfloor x \rfloor$. Alors $\forall n \geq N$,

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x^N}{N!} \prod_{i=N+1}^n \frac{x}{i} \leq \frac{x^N}{N!} \prod_{i=N+1}^n \underbrace{\frac{x}{N+1}}_{<1} \leq \frac{x^N}{N!} \left(\frac{x}{N+1} \right)^{n-N} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où le résultat.

Chapitre 25

Déterminants

25.1 Exercices

Exercice 25.1 ($\text{GL}_n(\mathbb{Z})$).

Donner une CNS pour qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ soit inversible d'inverse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 25.2 (Matrice compagnon).

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme réel unitaire. On note $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Déterminer $\chi_C(X) := \det(XI_n - C)$.

Exercice 25.3 (Similitude et extension de corps).

Soit A, B , deux matrices réelles, tel que $A \underset{\mathbb{C}}{\sim} B$, i.e. $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), B = P^{-1}AP$. Montrer que $A \underset{\mathbb{R}}{\sim} B$.

Exercice 25.4.

Calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 25.5.

Soit $m < n$ deux entiers naturels, $P_1, \dots, P_n$ des polynômes de $\mathbb{R}_m[X]$. Soit $a_1 \cdots a_n$, des réels. Calculer $\det(A)$ avec $[A]_{i,j} = P_i(a_j)$. En déduire la valeur de $\det(B)$ avec $[B]_{i,j} = (i + j - 1)^m$.

Exercice 25.6 (Cauchy).

Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$, des complexes tels que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_i + b_j \neq 0$. Calculer $\det(C_n)$ avec $[C_n]_{i,j} = \frac{1}{a_i + b_j}$.

Exercice 25.7 (Introduction à la réduction).

1. Soit A , une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $AX = 0$ si, et seulement si $\det(A) = 0$.

2. On cherche à déterminer tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe un vecteur non nul $X \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $AX = \lambda X$. Montrer qu'il faut et suffit de chercher les $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_A(\lambda) := \det(\lambda I_n - A) = 0$.
3. On appelle valeur propre, un tel λ , et on appelle vecteur propre associé à la valeur propre λ un vecteur X vérifiant $AX = \lambda X$. On appelle polynôme caractéristique, le polynôme $\chi_A = \det(XI_n - A)$ (l'indéterminée est notée X). Montrer que

$$\chi_A = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

(on ne cherchera pas à déterminer ce qu'il y a dans les $\cdots$. Ce sont des termes de degré 1 à $n - 2$.)

Exercice 25.8.

Calculer

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 25.9 (Vandermonde troué).

Soient $a_1, \dots, a_n$, des complexes. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

25.2 Eléments de corrections

Indication pour l'exercice 25.1 :

La CNS est tout simplement $\det(M) = \pm 1$. L'exercice a déjà été corrigé dans votre cours.

Indication pour l'exercice 25.2 :

On développe par rapport à la dernière ligne. Puisque

$$\det(XI_n - C) = \begin{vmatrix} X & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & & \vdots & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

on a $\det(XI_n - C)$

$$\begin{aligned}
&= (X + a_{n-1}) \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+n} a_{k-1} \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix} \begin{matrix} 0_{n-k} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\
&\quad \begin{matrix} \\ \\ 0_{k-1} \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (X + a_{n-1})X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{2n} a_k X^k \\
&= X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k = P.
\end{aligned}$$

Indication pour l'exercice 25.3 :

Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Notons $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $P = U + iV$. Alors $(U + iV)B = A(U + iV)$. Donc $UB = AU$ et $VB = AV$. Si U ou V sont inversibles, c'est terminé. Sinon, $\forall t \in \mathbb{R}$, on a $(U + tV)B = A(U + tV)$. Soit donc $\pi : t \in \mathbb{C} \mapsto \det(U + tV) \in \mathbb{C}$. Puisque

$$\det(U + tV) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (U + tV)_{i, \sigma(i)},$$

alors π est une fonction polynômiale en t . Puisque $\pi(t)$ est non nul (car P est inversible), π est non nulle. De fait, puisque $\mathbb{R}$ est infini, il existe un réel t_0 tel que $\pi(t_0)$ est non nul. On a alors $U + t_0V$ inversible, donc $B = P_{t_0}^{-1}AP_{t_0}$ avec $P_{t_0} = U + t_0V$ inversible réelle.

Indication pour l'exercice 25.4 :

Soit M la matrice dont il faut calculer le déterminant. Soit C le vecteur colonne plein de 1 et $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\det(M) = \det(M^T) = \det(b_1C + a_1e_1, b_2C + a_2e_2, \dots, b_nC + a_ne_n).$$

Or, dès lors que dans le déterminant, on a deux colonnes de la forme b_iC et b_jC , alors le déterminant est nul. En réalisant le développement par n -linéarité du déterminant, on a au plus un seul terme de la forme b_iC .

Ainsi, on a soit un terme de la forme $b_i C$, soit aucun. Ainsi,

$$\begin{aligned} \det(M) &= \sum_{k=1}^n \det(a_1 e_1, \dots, a_{k-1} e_{k-1}, b_k C, a_{k+1} e_{k+1}, \dots, a_n e_n) + \det(a_1 e_1, \dots, a_n e_n) \\ &= \sum_{k=1}^n b_k \underbrace{\det \left(a_1 e_1, \dots, a_{k-1} e_{k-1}, \sum_{j=1}^n e_j, a_{k+1} e_{k+1}, \dots, a_n e_n \right)}_* + \prod_{i=1}^n a_i \\ &= \sum_{k=1}^n b_k \det(a_1 e_1, \dots, a_{k-1} e_{k-1}, e_k, a_{k+1} e_{k+1}, \dots, a_n e_n) + \prod_{i=1}^n a_i \\ &= \sum_{k=1}^n b_k \prod_{i \neq k} a_i + \prod_{i=1}^n a_i. \end{aligned}$$

On justifie le calcul dans $*$ comme suit :

$$\begin{aligned} \det \left(a_1 e_1, \dots, a_{k-1} e_{k-1}, \sum_{j=1}^n e_j, a_{k+1} e_{k+1}, \dots, a_n e_n \right) &= \sum_{j=1}^n \det(a_1 e_1, \dots, a_{k-1} e_{k-1}, e_j, a_{k+1} e_{k+1}, \dots, a_n e_n) \\ &= \det(a_1 e_1, \dots, a_{k-1} e_{k-1}, e_k, a_{k+1} e_{k+1}, \dots, a_n e_n), \end{aligned}$$

car si $j \neq k$, par le caractère alterné, le déterminant est nul.

Indication pour l'exercice 25.5 :

On écrit $P_i = \sum_{k=1}^n b_{ik} X^k$. Alors on note B , la matrice de coefficient $[B]_{ik} = b_{ik}$. En notant v , la matrice de Vandermonde associée à $a_1, \dots, a_n$, on a $A = Bv$. De fait, $\det(A) = \det(B) \det(v) = \det(P_1, \dots, P_n) \det(V)$. Remarquons que le déterminant est non nul si les a_i sont deux-à-deux distincts, et que les $P_1, \dots, P_n$ sont libres, donc $n = m + 1$. Application : on prend $P_j = (X + j - 1)^m$ et $a_i = i$. Si $n > m + 1$, alors les P_i sont liés et le déterminant est nul. Sinon, on a dans un premier temps

$$V(a_1, \dots, a_n) = V(1, 2, \dots, n) = \prod_{j=2}^n \prod_{i=1}^{j-1} (j - i) = \prod_{j=1}^{n-1} j!$$

. Dans un second temps, en utilisant la formule du binôme, on voit clairement que

$$\det(P_1, \dots, P_n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \right) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2^{n-1} & \dots & (n-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & 2^{n-2} & \dots & (n-1)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 (= 0^0) & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

On a

$$\prod_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} = (n-1)^{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1-i)!} = (n-1)^{n-1} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \right)^2.$$

Enfin, le déterminant est un Vandermonde, à condition qu'on retourne la liste des lignes : or, un renversement d'une liste à n éléments a, pour signature, $(-1)^{n(n-1)/2}$ (transformer $1 - 2 - 3 - 4 - 5$ en $5 - 4 - 3 - 2 - 1$). Ainsi,

$$\det(P_1, \dots, P_n) = (-1)^{n(n-1)/2} (n-1)^{n-1} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \right)^2.$$

Le déterminant cherché vaut donc

$$(-1)^{n(n-1)/2} (n-1)^{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}.$$

Indication pour l'exercice 25.6 :

On multiplie chaque colonne j par $a_n + b_j$ de sorte d'avoir que des 1 en dernière ligne. On a

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a_n+b_1)(a_n+b_2)\cdots(a_n+b_n)} \begin{vmatrix} \frac{a_n+b_1}{a_1+b_1} & \frac{a_n+b_2}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{a_n+b_n}{a_1+b_n} \\ \frac{a_n+b_1}{a_2+b_1} & \frac{a_n+b_2}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{a_n+b_n}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

On utilise maintenant le lemme suivant :

$$\frac{a+b}{\alpha+b} = 1 + \frac{a-\alpha}{\alpha+b}.$$

De fait, en soustrayant chaque ligne par la dernière, j'ai

$$\begin{vmatrix} \frac{a_n+b_1}{a_1+b_1} & \frac{a_n+b_2}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{a_n+b_n}{a_1+b_n} \\ \frac{a_n+b_1}{a_2+b_1} & \frac{a_n+b_2}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{a_n+b_n}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a_n-a_1}{a_1+b_1} & \frac{a_n-a_1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{a_1+b_n} \\ \frac{a_n-a_2}{a_2+b_1} & \frac{a_n-a_2}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{a_n-a_2}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Je peux donc sortir en facteur sur chaque ligne i , un terme $a_n - a_i$. Ainsi,

$$\det(C_n) = \frac{(a_n - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1)(a_n + b_2) \cdots (a_n + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

On a bien envie d'avoir beaucoup de 0 en dernière ligne. On retire à chaque colonne la dernière. En utilisant

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+\beta} = \frac{\beta-b}{(a+b)(a+\beta)},$$

on a

$$\det(C_n) = \frac{(a_n - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1)(a_n + b_2) \cdots (a_n + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{b_n-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la dernière ligne. On obtient alors

$$\det(C_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n + b_i)} \begin{vmatrix} \frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_1+b_n)} \\ \frac{b_n-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_2+b_{n-1})(a_2+b_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b_n-b_1}{(a_{n-1}+b_1)(a_{n-1}+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_{n-1}+b_2)(a_{n-1}+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_{n-1}+b_n)} \end{vmatrix}.$$

Sur chaque ligne i , on sort un facteur $(a_i + b_n)$ et sur chaque colonne j , on sort un facteur $(b_n - b_j)$. Cela donne

$$\det(C_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^n (a_n + b_i) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{n-1}} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2 + b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \frac{1}{a_{n-1} + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Donc

$$\det(C_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^n (a_n + b_i) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n)} \det(C_{n-1}).$$

Pour conclure proprement, on fait une récurrence. Sinon, on écrit

$$\frac{\det(C_n)}{\det(C_{n-1})} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^n (a_n + b_i) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n)}.$$

Donc

$$\det(C_n) = \prod_{j=1}^n \frac{\prod_{i=1}^{j-1} (a_j - a_i) \prod_{i=1}^{j-1} (b_j - b_i)}{\prod_{i=1}^j (a_j + b_i) \prod_{i=1}^{j-1} (a_i + b_j)} = \prod_{j=1}^n \frac{\prod_{i=1}^{j-1} ((a_j - a_i)(b_j - b_i))}{(a_j + b_j) \prod_{i=1}^{j-1} (a_j + b_i)(a_i + b_j)} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{a_j + b_j} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{(a_j + b_i)(a_i + b_j)}.$$

Indication pour l'exercice 25.7 :

1. Sens direct : si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible. Soit X tel que $AX = 0$. A étant inversible, on a $X = 0$. En contraposant, on a l'implication voulue.

Sens réciproque : si $\det(A) = 0$, alors A n'est pas inversible, donc $\dim(\ker(A)) \neq 0$ (par dimension, on a bijectif ssi injectif). Ainsi, $\ker(A)$ contient une droite vectorielle, donc un vecteur X non nul. Ainsi, j'ai un X tel que $AX = 0$.

2. En écrivant $AX = \lambda X \iff (A - \lambda I_n)X = 0$, le résultat est immédiat.

3. Soit $\overline{\mathfrak{S}_n} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \text{Fix}(\sigma) \leq n-2\}$, avec Fix , une fonction qui a une permutation associe son nombre de point fixe. Soit $\sigma \notin \overline{\mathfrak{S}_n}$. Alors σ a n ou $n-1$ points fixes. Si σ a n points fixes, $\sigma = \text{Id}$. Si σ a $n-1$ points fixes, soit n_0 tel que $\sigma(n_0) \neq n_0$. Alors $\sigma(n_0) \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{n_0\}$. Mettons n_1 . Or, on sait que $\sigma(n_1) = n_1$. Donc par injectivité d'une permutation, $n_1 = n_0$. Absurde. Donc toute permutation ayant $n-1$ point fixes dans $\mathfrak{S}_n$ est identité.

Ainsi,

$$\det(A) = \varepsilon(\text{Id}) \prod_{i=1}^n ((XI_n)_{i,i} - (A)_{i,i}) + \sum_{\sigma \in \overline{\mathfrak{S}_n}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n ((XI_n)_{i,\sigma(i)} - A_{i,i}).$$

Clairement, dans la deuxième somme, on voit que les composantes sont clairement de degré au maximum $n-2$. En effet, XI_n n'a de valeurs en $i, \sigma(i)$ que si $i = \sigma(i)$ (sinon, c'est 0). Or, ce cas ne peut arriver

que $n - 2$ fois au maximum dans $\overline{\mathfrak{S}_n}$. Donc la contribution apportée en X^n et X^{n-1} n'est que grâce à Id . Clairement, les coefficients devant X et X^{n-1} seront les mêmes que ceux de $\prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$, et en développant, on a aisément (relation de Viète en $n - 1$) que $\det(A) = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \dots$. Pour le terme constant, on évalue χ en 0 pour obtenir $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

Indication pour l'exercice 25.8 :

c.f. cours.

Indication pour l'exercice 25.9 :

Notons d , le déterminant à chercher. On rajoute une colonne au trou : la colonne des a_i^k pour i allant de 1 à n . Enfin, pour la dernière ligne, on rajoute la ligne des X^j pour j allant de 0 à n . Alors le déterminant voulu est le mineur $\delta_{n+1, k+1}$.

Mais en développant par rapport à la dernière ligne, on obtient exactement un polynôme, dont le coefficient devant X^k est exactement $(-1)^{n+1+k+1}d$. Par ailleurs, le nouveau déterminant est un Vandermonde ! Il vaut

$V(a_1, \dots, a_n, X) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{i=1}^n (X - a_i)$. En utilisant les relations coefficients racines (formule de Viète), il vient

$$(-1)^{n+k}d = (-1)^{n-k}\sigma_{n-k} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i),$$

avec $\sigma_{n-k} = \sum_{J \subset [1, n], |J|=n-k} \prod_{j \in J} a_j$. Ainsi

$$d = \sigma_{n-k} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Chapitre 26

Intégration

26.1 Exercices

Exercice 26.1 (Lemme de Riemann-Lebesgue).

Soit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

lorsque

a) $f \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

b) $f \in \mathcal{E}([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

c) $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

Exercice 26.2 (Egalité de Taylor-Lagrange).

Soit $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , et de classe $\mathcal{D}^{n+1}$ sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 26.3 (Méthode des trapèzes).

On souhaite montrer que la méthode des trapèzes converge quadratiquement pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty.$$

Exercice 26.4.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction concave et continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 1$. Montrer que

$$\int_0^1 xf(x) dx \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^1 f \right)^2.$$

Exercice 26.5.

Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de $\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Exercice 26.6.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On pose u_n , la somme partielle de Riemann associée, c'est-à-dire,

$$u_n = h_n \sum_{k=1}^n f(x_k),$$

avec $h_n = \frac{b-a}{n}$ et $x_k = a + kh_n$. On pourra utiliser l'exercice 26.2.

1. Déterminer la limite de $v_n = n \left(u_n - \int_a^b f \right)$.

2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Déterminer un développement asymptotique de u_n à une précision de $o_{n \rightarrow +\infty}(1/n^2)$.

26.2 Eléments de corrections

Indication pour l'exercice 26.1 :

1. Puisque f est continûment dérivable, on a

$$\left| \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right| = \left| \left[f(t) \frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f'(t) \frac{e^{-int}}{it} dt \right| \leq \left| \left[f(t) \frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{2\pi} \right| + \left| \int_0^{2\pi} f'(t) \frac{e^{-int}}{in} dt \right|.$$

Or,

$$\left[f(t) \frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{2\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et

$$\left| \int_0^{2\pi} f'(t) \frac{e^{-int}}{it} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)| \frac{1}{|in|} dt \leq \int_0^{2\pi} \frac{\|f'\|_\infty}{|in|} dt = \frac{\|f'\|_\infty 2\pi}{|in|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, le lemme de Riemann-Lebesgue tombe.

2. Soit $x_0, \dots, x_p$, une subdivision de $[0, 2\pi]$ adaptée à f . Pour rappel, il existe alors $a_1, \dots, a_p$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ des réels tels que

$$f(x) = \sum_{k=1}^p a_k \mathbb{1}_{]x_{k-1}, x_k[} + \sum_{k=0}^p \alpha_k \mathbb{1}_{\{x_k\}}.$$

Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \sum_{k=1}^p \underbrace{\int_{x_{k-1}}^{x_k} a_k e^{-int} dt}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par } Q1}.$$

Ainsi, le lemme de Riemann-Lebesgue tombe. On peut ne pas utiliser la question 1 puisque l'intégrale se calcule.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit ψ , une fonction en escalier tel que $\|f - \psi\|_\infty \leq \varepsilon$. Soit $x_0, \dots, x_p$, une subdivision de $[0, 2\pi]$ adaptée à ψ . Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right| &= \left| \int_0^{2\pi} (f(t) - \psi(t)) e^{-int} dt + \int_0^{2\pi} \psi(t) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(t) - \psi(t)| e^{-int} dt + \underbrace{\left| \int_0^{2\pi} \psi(t) e^{-int} dt \right|}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par } Q2}. \end{aligned}$$

Mais

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - \psi(t)| e^{-int} dt \leq \int_0^{2\pi} \|f - \psi\|_\infty e^{-int} dt \leq \int_0^{2\pi} \varepsilon e^{-int} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, le lemme de Riemann-Lebesgue tombe.

Correction de l'exercice 26.2 :

Le cas $n = 0$ correspond à l'égalité des accroissements finis. Si $n \geq 1$, considérons

$$\phi_n(t) = f(b) - f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (b-t)^k - \lambda \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!},$$

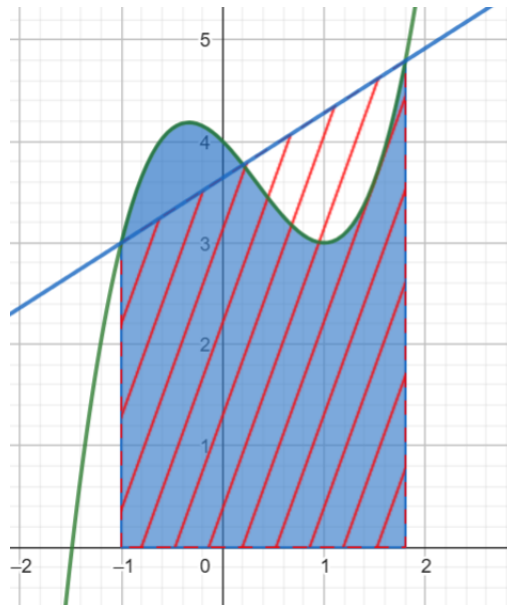
avec λ tel que $\phi_n(a) = 0$, que l'on déterminera plus tard. Puisque $\phi_n(b) = 0$, le théorème de Rolle s'applique. Il existe donc c tel que $\phi'_n(c) = 0$. Or,

$$\begin{aligned}\phi'_n(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (b-t)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (b-t)^{k-1} + \lambda \frac{(b-t)^n}{n!} \\ &= - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (b-t)^{k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (b-t)^{k-1} + \lambda \frac{(b-t)^n}{n!} \\ &= \lambda \frac{(b-t)^n}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(t)(b-t)^n}{n!}\end{aligned}$$

Donc $\phi'_n(c) = 0 \iff \lambda = f^{(n+1)}(t)$ car $b \neq c$. En prenant $\lambda = f^{(n+1)}(t)$, le résultat tombe.

Indication pour l'exercice 26.3 :

Le but de la méthode des trapèzes est d'approximer l'aire sous une courbe par l'aire d'un trapèze associé :



Posons donc $g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right)$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, $g'' = f''$ et $g(a) = g(b) = 0$. Par ailleurs,

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

On fait deux intégrations par parties en intégrant 1 et en dérivant g . Puisque lors d'IPP, on peut choisir à une constante près les primitives, il existe C, D deux réels tels que

$$\int_a^b g = \underbrace{[(t-C)g]_a^b}_{=0} - \int_a^b (t-C)g'$$

et encore une fois

$$\int_a^b g = - \left[\left(\frac{t^2}{2} - Ct + D \right) g'(t) \right]_a^b + \int_a^b \left(\frac{t^2}{2} - Ct + D \right) g''(t) dt.$$

Il s'agit de choisir C et D pour que le crochet s'annule. Pour se faire, il suffit de choisir C et D pour que $\frac{t^2}{2} - Ct + D = \frac{1}{2}(t-a)(t-b)$ pour que le crochet s'annule. C'est possible et on peut même donner les valeurs :

$2D = ab$ et $2C = a + b$. Ainsi, le crochet est nul pour ces valeurs et on a donc

$$\int_a^b g = \frac{1}{2} \int_a^b (t-a)(t-b) \underbrace{g''(t)}_{=f''(t)} dt.$$

f'' étant bornée, $\|f''\|_\infty$ est bien définie. On a donc

$$\left| \int_a^b g \right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2} \overbrace{\int_a^b |(t-a)(t-b)| dt}^{\frac{(b-a)^3}{6}}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=(t-a)(b-t)}$

ce qui donne le résultat voulu. *Remarque : lorsque l'on approxime une méthode réelle avec une méthode numérique, très souvent, on approxime en fait une courbe f régulière, par un polynôme (plus manipulable informatiquement). Pour la méthode des rectangles, on approxime une courbe par une constante. Par la méthode des trapèzes, on approxime une courbe par une fonction affine. Le CŒUR de la théorie des développement limités est justement d'approximer une courbe par un polynôme. Il est donc tout à fait normal d'écrire la formule de Taylor. La preuve de la méthode de Newton, d'Euler, etc., repose aussi sur un développement limité.*

Indication pour l'exercice 26.4 :

Appelons $A = \int_0^1 f$ et $B = \int_0^1 xf(x)dx$. Soit $x \in [0, 1]$ et $F = \int_0^x f(t)dt$. F existe car f est continue sur $[0, x]$ pour tout $x \in [0, 1]$. Le théorème fondamental de l'analyse donne F de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$B = [xF(x)]_0^1 - \int_0^1 F = \int_0^1 f - \int_0^1 \int_0^x f(t)dt dx = A - \int_0^1 \int_0^x f(t)dt dx.$$

f étant concave, pour tout $x > 0, t \in [0, x]$, on a

$$f(t) \geq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}t + f(0) = \frac{f(x) - 1}{x}t + 1.$$

En intégrant,

$$\int_0^x f(t)dt \geq \frac{f(x) - 1}{x} \frac{x^2}{2} + x = \frac{xf(x) + x}{2}.$$

En intégrant,

$$\int_0^1 \int_0^x f(x)dt dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 xf(x)dx + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}.$$

Donc

$$B = A - \int_0^1 \int_0^x f(t)dt dx \leq A - \frac{1}{2}B - \frac{1}{4}$$

donc

$$\frac{3}{2}B \leq A - \frac{1}{4}.$$

Or, $A - \frac{1}{4} \leq A^2$ pour tout réel A donc

$$\frac{3}{2}B \leq A^2,$$

donc

$$B \leq \frac{2}{3}A^2.$$

Indication pour l'exercice 26.5 :

Puisque $\forall k \in \mathbb{N}, \sqrt{k} - 1 \leq \lfloor \sqrt{k} \rfloor \leq \sqrt{k}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - 1) \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$$

i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \right)$$

On reconnaît alors une somme de Riemann de $f : x \in [0, 1] \mapsto \sqrt{x} \in [0, 1]$, qui est bien continue sur $[0, 1]$. Ainsi,

$$\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, par théorème d'encadrement, la limite cherchée existe et vaut $\frac{2}{3}$.

Indication pour l'exercice 26.6 :

1. Soit $F : x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t) dt$. Alors

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^n \left(h_n f(x_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt \right) \\ &= n \sum_{k=1}^n (h_n F'(x_k) - F(x_k) + F(x_{k-1})) \\ &= n \sum_{k=1}^n (F(x_{k-1}) - F(x_k) + h_n F'(x_k)). \end{aligned}$$

Par l'exercice 26.2, l'égalité de Taylor-Lagrange donne l'existence d'un ξ_k tel que $F(x_{k-1}) - F(x_k) + h_n F'(x_k) = \frac{h_n^2}{2} F''(\xi_k)$ où $\xi_k \in]x_{k-1}, x_k[$. (L'égalité s'écrit $F(x_{k-1}) = F(x_k) + F'(x_k)(-h_n) + F''(\xi_k) \frac{(-h_n)^2}{2}$, en utilisant que $x_{k-1} - x_k = -h_n$.) Ainsi, puisque $F'' = f'$,

$$v_n = \frac{(b-a)^2}{2n} \sum_{k=1}^n f'(\xi_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{2} \int_a^b f'(t) dt = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{2},$$

la convergence étant justifiée car f' est continue. (La proposition n'est pas au programme : c'est la proposition 50 de votre cours).

2. On peut donc écrire

$$u_n = \int_a^b f(t) dt + \frac{(f(b) - f(a))(b-a)}{2n} + o(1/n).$$

On veut le terme suivant. f gagnant un cran de régularité, je peux pousser le développement limité dans Taylor-Lagrange. J'ai donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'existence d'un ζ_k dans $]x_{k-1}, x_k[$ vérifiant

$$F(x_{k-1}) = F(x_k) - h_n F'(x_k) + F''(x_k) \frac{h_n^2}{2} - F'''(\zeta_k) \frac{h_n^3}{6},$$

donc

$$h_n f(x_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt + f'(x_k) \frac{h_n^2}{2} - f''(\zeta_k) \frac{h_n^3}{6}.$$

Je n'ai plus qu'à sommer pour $k = 1$ à n . Ainsi,

$$u_n = \int_a^b f + \frac{b-a}{2n} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f'(x_k) \right) - \frac{(b-a)^2}{6n^2} \underbrace{\left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f''(\zeta_k) \right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f''(t) dt}.$$

En utilisant la question 1 mais appliqué à f' (et non à f), on a

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f'(x_k) = \int_a^b f'(t) dt + \frac{(f'(b) - f'(a))(b-a)}{2n} + o(1/n).$$

D'où

$$u_n = \int_a^b f(t) dt + \frac{(f(b) - f(a))(b-a)}{2n} + \frac{(f'(b) - f'(a))(b-a)^2}{4n^2} - \frac{(b-a)^2}{6n^2} \int_a^b f''(t) dt + o(1/n^2),$$

ce qui donne le joli résultat

$$u_n = \int_a^b f(t) dt + \frac{(f(b) - f(a))(b-a)}{2n} + \frac{(f'(b) - f'(a))(b-a)^2}{12n^2} + o(1/n^2).$$

Chapitre 27

Espaces préhilbertiens réels

27.1 Exercices

Exercice 27.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Montrer que

$$(\forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle = 0) \iff (\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle).$$

Exercice 27.2.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_p)$, une famille de vecteurs de E de norme 1 telle que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_p)$ forme une base orthonormée de E .

Exercice 27.3. [Distance]

Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (te^t - (at+b))^2 dt$.

Exercice 27.4.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace préhilbertien réel et $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs unitaires vérifiant

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (i \neq j) \implies \|u_i - u_j\| = 1.$$

Montrer que $(u_1, \dots, u_p)$ forme une famille libre.

Exercice 27.5.

Soit E , un espace préhilbertien réel et F, G , deux sous-espaces de E .

1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Si E était euclidien ?

Exercice 27.6. [Inégalité d'Hadamard]

Soit M , une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C_1, \dots, C_n$, ses colonnes. Montrer que

$$|\det(M)| \leq \|C_1\| \cdots \|C_n\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$ (on identifie $\mathcal{M}_{n,1}$ à $\mathbb{R}^n$). Quel est le cas d'égalité ? (Ce résultat est connu sous le nom d'inégalité d'Hadamard).

Application : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\exists c \in \mathbb{R}^{+*}, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, |[M]_{i,j}| \leq c$. Montrer que $|\det(M)| \leq c^n n^{n/2}$.

Exercice 27.7. [Polynômes orthogonaux]

Soit $a < b$, deux réels, $I = [a, b]$. Soit $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et strictement positive sur I .

1. Montrer que $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ muni de l'application

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \int_a^b fg \omega \end{aligned}$$

est un espace préhilbertien réel.

2. Montrer qu'il existe, dans $\mathbb{R}[X]$, une base orthogonale pour ce produit scalaire de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$ et $\text{cd}(P_n) = 1$. Y a-t-il unicité ?
3. Montrer que les $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont scindés à racines simples, et que ces racines sont dans $]a, b[$.

Remarque : il y a encore tant à dire à propos des polynômes orthogonaux...

Exercice 27.8. [Obtusangle]

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace préhilbertien réel. On dit que $(x_0, \dots, x_p)$ est obtusangle lorsque

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, p \rrbracket^2, i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle < 0.$$

Montrer que $(x_0, \dots, x_p)$ obtusangle implique $(x_1, \dots, x_p)$ libre.

Exercice 27.9. [Norme de Frobenius]

Montrer que la norme de Frobenius, la norme issu du produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est sous-multiplicative, c'est-à-dire, que la norme d'un produit est inférieur ou égal au produit des normes.

27.2 Eléments de corrections

Indication pour l'exercice 27.1 :

On peut raisonner par équivalence mais faisons simple. On suppose que $\forall x, \langle x, u(x) \rangle = 0$. Soit $x, y \in E$. Alors $\langle x+y, u(x+y) \rangle = 0$. En développant, on a $\langle x, u(x) \rangle + \langle x, u(y) \rangle + \langle y, u(x) \rangle + \langle y, u(y) \rangle = 0 + \langle x, u(y) \rangle + \langle y, u(x) \rangle + 0 = 0$. D'où le résultat.

Si maintenant pour tout x, y , on a $\langle x, u(y) \rangle = -\langle y, u(x) \rangle$, il suffit d'appliquer le résultat pour $x = y$ pour obtenir $A = -A$ avec $A = \langle x, u(x) \rangle$. Donc $A = 0$ et le résultat tombe.

Indication pour l'exercice 27.2 :

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Alors pour $x = e_j$, on a

$$1 = \sum_{k=1}^p \langle e_i, e_k \rangle^2 = \sum_{k \neq i} \langle e_i, e_k \rangle^2 + \|e_i\|^2.$$

Donc $\sum_{k \neq i} \langle e_i, e_k \rangle^2$ est nulle, donc e_i est orthogonal à tous les $e_k, k \neq i$. Ainsi, les $(e_1, \dots, e_p)$ forment bien une famille orthogonale. Unitaire, elle est donc orthonormée.

Elle est donc libre. Reste à montrer le caractère générateur. Pour cela, posons $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. On veut montrer que $F^\perp = \{0\}$. Soit $x \in F^\perp$. Alors x est orthogonal à tous les e_k donc la formule donne $\|x\|^2 = 0$. Donc $F^\perp = \{0\}$. Ainsi, $(F^\perp)^\perp = F = \{0\}^\perp = E$. (On a bien que le biorthogonal donne l'espace initial car F est euclidien).

Indication pour l'exercice 27.3 :

Reformulons le problème. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \{t \in [0, 1] \mapsto at + b \in \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}\}$. Notons $f : t \in [0, 1] \mapsto te^t \in \mathbb{R}$. On constate que $F = \text{Vect}(\phi, \psi)$ où

$$\phi : t \in [0, 1] \mapsto 1 \in \mathbb{R} \text{ et } \psi : t \in [0, 1] \mapsto t \in \mathbb{R}.$$

On munit E du produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ défini par

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) : E^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \int_0^1 u(x)v(x)dx \end{aligned}.$$

On a alors

$$\inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (te^t - (at + b))^2 dt = \inf_{g \in F} \|f - g\|^2 = \|f - \pi_F(f)\|^2.$$

Maintenant, pour progresser, il y a deux voies.

Méthode 1 : (ϕ, ψ) est une base de F donc $\pi_F(f)$ s'écrit $a\phi + b\psi$. Comme $f - \pi_F(f) \in F^\perp$, on a

$$0 = (f - \pi_F(f), \phi) = (f, \phi) - (a\phi + b\psi, \phi) = (f, \phi) - a\|\phi\|^2 + b(\psi, \phi)$$

et de même,

$$0 = (f - \pi_F(f), \psi) = (f, \psi) - a(\phi, \psi) - b\|\psi\|^2.$$

On calcule :

- $(f, \phi) = \int_0^1 te^t dt = 1$
- $(f, \psi) = \int_0^1 t^2 e^t dt = e - 2$
- $(\phi, \psi) = \int_0^1 t dt = 1/2$
- $\|\phi\|^2 = 1$
- $\|\psi\|^2 = 1/3$

ce qui donne

$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} = 1 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = e - 2 \end{cases}$$

ce qui donne $a = 16 - 6e, b = 12e - 30$.

Ensuite, il n'y a plus qu'à conclure.

$$\|f - \pi_F(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|\pi_F(f)\|^2 = \int_0^1 t^2 e^{2t} dt - \int_0^1 (a + bt)^2 dt = \frac{e^2 - 1}{4} - \left(\frac{b^2}{3} + ab + a^2 \right)$$

En développant tout, on a

$$\|f - \pi_F(f)\|^2 = -\frac{1}{4}(305 - 240e + 47e^2).$$

(Confirmé par WolframAlpha®).

Méthode 2 :

1. Trouver une famille libre de F .
2. L'orthonormaliser. On note cette famille $(e_1, \dots, e_p)$.

$$3. \text{ Utiliser } d(x, F) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle^2}$$

Ici, j'ai comme famille libre ϕ, ψ (qui correspondent à 1 et X). Il faut l'orthonormaliser pour le produit scalaire choisi. Clairement, ϕ est de norme 1 pour la norme induite par le produit scalaire. Notons alors $e_1 = \phi$. En réalisant Gram-Schmidt, on obtient $f_2 = \psi - \langle \psi, e_1 \rangle e_1$ i.e. $f_2 : t \mapsto t - \int_0^1 t dt = t - \frac{1}{2}$. Il ne reste qu'à normaliser f_2 . On regarde

$$\int_0^1 f_2^2 = \int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Donc $e_2 = \sqrt{12}f_2 = \sqrt{3}(2g - e_1)$.

Il reste à appliquer la formule de la distance. Déjà la norme de f au carré.

$$\|f\|^2 = \int_0^1 f^2 = \int_0^1 t^2 e^{2t} dt \underset{\text{c.f. ex 6.1}}{=} \frac{e^2 - 1}{4}.$$

Ensuite, les produits scalaires au carré :

$$\int_0^1 f \times 1 = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = 1$$

$$\int_0^1 f(t)(\sqrt{3}(2t - 1))dt = 2\sqrt{3} \int_0^1 t^2 e^t dt - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left([t^2 e^t]_0^1 - [2te^t]_0^1 + \int_0^1 2e^t dt \right) - \sqrt{3} = \sqrt{3}(2e - 5).$$

Donc

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (te^t - (at + b))^2 dt = \frac{e^2 - 1}{4} - 1 - 3(2e - 5)^2 = -\frac{1}{4}(305 - 240e + 47e^2).$$

(Confirmé par WolframAlpha®).

Indication pour l'exercice 27.4 :

Soit $i \neq j$. On a $1 = \|u_i - u_j\|^2 = \|u_i\|^2 + \|u_j\|^2 - 2\langle u_i, u_j \rangle$. Donc $\langle u_i, u_j \rangle = \frac{1}{2}$. Considérons maintenant une relation de liaison $\sum \lambda_i u_i = 0$. On a

$$0 = \langle 0, u_j \rangle = \left\langle \sum \lambda_i u_i, u_j \right\rangle = \sum_{i \neq j} \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle + \lambda_j \|u_j\|^2,$$

donc

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \lambda_i = -\lambda_j$$

i.e.

$$\lambda_j = -\sum_{i=1}^p \lambda_i.$$

Ceci étant vrai pour tout j , on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_p$ et donc $\lambda_j = -p\lambda_j$. Ainsi, tous les λ_j sont nuls.

Indication pour l'exercice 27.5 :

1. Soit $x \in (F + G)^\perp$. Alors $\forall y, z \in F + G, \langle x, y + z \rangle = 0$. En particulier pour $z = 0$ puis pour $y = 0$, on en déduit que $x \in F^\perp$ et $x \in G^\perp$ successivement. Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. L'égalité $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ conclut.
2. Soit $x \in F^\perp + G^\perp$. Soit donc y, z telle que $x = y + z$ adapté à la décomposition. Soit $a \in F \cap G$. Alors $\langle x, a \rangle = \langle y, a \rangle + \langle z, a \rangle = 0 + 0 = 0$. Si E est euclidien, alors il y a égalité. On peut par exemple utiliser la première question et appliquer l'orthogonal, en remarquant que dans un euclidien, $(A^\perp)^\perp = A$.
Remarque : dans un préhilbertien, on a toujours $((A^\perp)^\perp)^\perp = A^\perp$.

Indication pour l'exercice 27.6 :

Si les vecteurs colonnes sont liés, le déterminant est nul et le résultat est clair. Sinon, les $C_1, \dots, C_n$ forment donc une base. On note $U_1, \dots, U_n$, les vecteurs obtenus par Gram-Schmidt sur $C_1, \dots, C_n$. Soit P , matrice de

passage de $(U_1, \dots, U_n)$ vers $(C_1, \dots, C_n)$. Alors C_i s'exprime en fonction de $U_1, \dots, U_i$ donc P est triangulaire supérieure. En notant M , la matrice de passage de la base canonique à $(C_1, \dots, C_n)$, on a $M = (U_1 | \dots | U_n)P$. Puisque les $(U_1, \dots, U_n)$ sont orthonormée, $\det(U_1, \dots, U_n) = 1$. De fait,

$$|\det(M)| = |\det(P)| = \left| \prod_{i=1}^n p_{i,i} \right|.$$

Or $|p_{i,i}| = |\langle C_i, U_i \rangle|$ étant donné que $\langle C_i, U_i \rangle$ donne exactement la composante devant U_i dans la décomposition de C_i dans la base $U_1, \dots, U_n$ (ce que l'on veut dans l'écriture de P). Enfin, par Cauchy-Schwarz,

$$|\langle C_i, U_i \rangle| \leq \|C_i\| \|U_i\| = \|C_i\|,$$

car les $(U_1, \dots, U_n)$ sont de norme 1. Ainsi, on a bien le résultat voulu. Le cas d'égalité correspond au cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, ce qui signifie que $U_i = \lambda C_i$ avec $\lambda \geq 0$. Autrement dit, il faut et suffit que les C_i sont deux-à-deux orthogonaux pour obtenir le résultat.

Application : il suffit de remarquer que $|C_i| \leq \sqrt{c^2 + c^2 + \dots + c^2} = c\sqrt{n}$. Ainsi, $|\det(M)| \leq (\sqrt{n}c)^n = c^n n^{n/2}$.

Indication pour l'exercice 27.7 :

1. Le fait que c'est bien un produit scalaire est la même preuve que pour le produit scalaire intégral usuel, et les arguments fonctionnent car ω est continue et strictement positive.
2. On réalise une sorte de Gram-Schmidt. Toutefois, nous devons procéder par récurrence étant donné que la suite des polynômes est une suite infinie. On considère la famille libre $(1, X, \dots, X^n, \dots)$ de $\mathbb{R}[X]$. On fera ici l'abus de notation entre un polynôme $P(X)$ et la fonction polynomiale associée $x \mapsto P(x)$. On construit $P_0 = \frac{1}{\|1\|}$. Or, $\int_0^1 1 dt = 1$ donc $\|1\| = \sqrt{1} = 1$. Donc $P_0 = 1$, est de degré 0 et est une base de $\mathbb{R}_0[X]$.

Supposons construit $P_0, P_1, \dots, P_n$ avec $n \geq 0$ tel que $(P_0, \dots, P_n)$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$, avec le degré de P_k égal à k . On pose, comme pour Gram-Schmidt,

$$P_{n+1} = X^{n+1} - \sum_{k=0}^n \langle P_k, X^{n+1} \rangle P_k.$$

Clairement, le degré de $\sum_{k=0}^n \langle P_k, X^{n+1} \rangle P_k$ est inférieur strictement à $n+1$. De fait, $\deg(P_{n+1}) = n+1$.

Donc $(P_0, \dots, P_{n+1})$ est bien une base de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Il ne reste qu'à montrer que le caractère orthogonal. Fixons $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} \langle P_{n+1}, P_j \rangle &= \left\langle X^{n+1} - \sum_{k=0}^n \langle P_k, X^{n+1} \rangle P_k, P_j \right\rangle \\ &= \langle X^{n+1}, P_j \rangle - \sum_{k=0}^n \langle P_k, X^{n+1} \rangle \underbrace{\langle P_k, P_j \rangle}_{=\delta_{kj}} \\ &= \langle X^{n+1}, P_j \rangle - \langle X^{n+1}, P_j \rangle \times 1 = 0. \end{aligned}$$

Donc $(P_0, \dots, P_{n+1})$ est bien une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

On en déduit ainsi construit par récurrence l'existence d'une base de $\mathbb{R}[X]$ orthonormale. On dispose de l'unicité. En effet, soit $(P_n)_n, (Q_n)_n$, deux bases de $\mathbb{R}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\|P_n - Q_n\|^2 = \langle P_n - Q_n, P_n \rangle - \langle P_n - Q_n, Q_n \rangle.$$

Or, $P_n - Q_n$ est de degré $n - 1$ car c'est la différence de deux polynômes unitaires de degré n . De fait, P_n est orthogonal à $P_n - Q_n$ (il suffit de décomposer $P_n - Q_n$ dans la base $(P_0, \dots, P_{n-1})$ par exemple). Ainsi, puisque le raisonnement marche pour Q_n , les deux produits scalaires sont nuls. De fait,

$$\|P_n - Q_n\|^2 = 0.$$

Ainsi, $P_n = Q_n$. Cela étant vrai pour tout n , on obtient l'unicité voulue.

3. Fixons n . Soit $x_1, \dots, x_d$, les racines dans $]a, b[$ de multiplicités impaires de P_n . Notons $Q = \prod_{i=1}^d (X - x_i)$. S'il n'existe pas de racines, on note $Q = 1$. Alors $P_n Q$ est positif. (preuve : voir (*)). Si $d = n$, alors $P_n = Q$ et P_n est scindé à racines simples, à racines dans $]a, b[$. D'où le résultat. Supposons $d \leq n - 1$ donc $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Clairement, Q divise P_n . Notons T , le quotient. On a alors

$$P_n Q = T Q^2.$$

On en déduit donc que $P_n Q T \geq 0$. Or, T n'a, par définition, aucune racine impaire, car sinon, elle serait dans Q . Donc Q ne change pas de signe sur $]a, b[$. Donc $P_n Q$ est positif. De l'égalité

$$\langle P_n, Q \rangle = 0,$$

on en tire $P_n Q \omega = 0$ sur $[a, b]$ car $\langle P_n, Q \rangle = 0$ est une intégrale nulle d'une fonction continue positive. ω étant strictement positive, j'ai donc $P_n Q = 0$ sur $[a, b]$. $[a, b]$ étant infini, $P_n Q = 0$ dans $\mathbb{K}[X]$. Absurde car $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

Indication pour l'exercice 27.8 :

Supposons-la liée. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, des réels non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0$. Alors

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \underbrace{\langle x_i, x_0 \rangle}_{<0} = 0$$

Ainsi, en considérant

$$I = \{i \in \llbracket 1, p \rrbracket : \lambda_i > 0\} \text{ et } J = \{j \in \llbracket 1, p \rrbracket : \lambda_j < 0\},$$

ces deux ensembles sont non vides. On a de plus

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = - \sum_{j \in J} \lambda_j x_j =: x.$$

Alors

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = - \left\langle \sum_{i \in I} \lambda_i x_i, \sum_{j \in J} \lambda_j x_j \right\rangle = - \sum_{(i,j) \in I \times J} \underbrace{\lambda_i \lambda_j}_{<0} \underbrace{\langle x_i, x_j \rangle}_{<0} < 0$$

car $I \times J$ est non vide. Absurde.

Indication pour l'exercice 27.9 :

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j}, B = (b_{i,j})_{i,j}$, deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2}.$$

De fait,

$$\|AB\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)^2 \leq_{C.S.} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{kj}^2 = \|A\|^2 \|B\|^2.$$