

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielle

Intégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

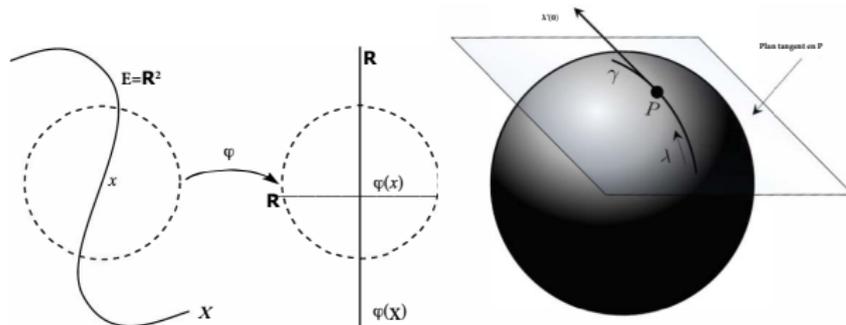
Preuve

Références

Géométrie différentielle

Sous-variétés de $E = \mathbf{R}^n$

Yves Laszlo



- 1 Sommaire
- 2 Rappels I : Inversion locale
- 3 « Rappels » II : courbes dans le plan et l'espace euclidien
 - Dans le plan
 - Courbure et torsion des arcs de l'espace
- 4 Sous-variétés
 - Définitions
 - Espace tangent des sous-variétés
 - Extremas liés
 - Théorème de Von Neumann sur les sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbf{R})$
- 5 Surfaces dans l'espace euclidien
 - Position d'une surface par rapport au tangent dans \mathbf{R}^3 euclidien
 - Courbure de Gauss d'une surface dans \mathbf{R}^3 euclidien
 - Compléments
- 6 Rappels III
 - Produit vectoriel
 - Partitions de l'unité
- 7 Intégrale d'hypersurface H de \mathbf{R}^{n+1} euclidien orienté, $n \geq 0$
 - Construction de l'intégrale sur une hypersurface
 - Formule de la co-aire en codimension 1
- 8 Formule de Stokes
 - Intégration par parties
 - Preuve
- 9 Références

Théorème 2.1 (Inversion locale, cf. [AA])

Soient E et F deux espaces de Banach et U ouvert de E . Soit $f : U \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$ et $a \in U$. Si $df(a) \in \text{Isom}(E, F)$ alors il existe $U_a \subset U$ voisinage ouvert de a tel que $f|_{U_a} : U_a \rightarrow f(U_a)$ soit un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^k sur l'ouvert $f(U_a)$.

Théorème 2.2 (Fonctions implicites, cf. [AA])

Soient E_1, E_2 et F des espaces de Banach, $U_i \subset E_i$ des ouverts, et a_i point de $U_i, i = 1, 2$.

Soit $f : U_1 \times U_2 \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$ et le point $(a_1, a_2) \in U_1 \times U_2$ tel que $f(a_1, a_2) = 0$ et $d_2 f(a_1, a_2) \in \text{Isom}(E_2, F)$.

Alors, il existe des voisinages ouverts $\tilde{U}_i \subset U_i$ de a_i et une application $\phi : (\tilde{U}_1, a_1) \rightarrow (\tilde{U}_2, a_2)$ de classe \mathcal{C}^k tels que :

- 1 $\{(x_1, x_2) \in \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2 \mid f(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, \phi(x_1)) \mid x \in U_1\}$.
- 2 Pour tout $x \in \tilde{U}_1$, on a $d\phi(x) = -(d_2 f(x, \phi(x)))^{-1} \circ d_1 f(x, \phi(x))$.

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Proposition 2.3 (Biorthogonal)

Soit E un ev de dimension fini et F, F_* des sev de E, E^* . On note

$$F^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall e \in F \varphi(e) = 0\} \text{ et } F_*^\perp = \{e \in E \mid \forall \varphi \in F_* \varphi(e) = 0\}$$

leurs orthogonaux. Alors on a $F = (F^\perp)^\perp$ et $F_* = (F_*^\perp)^\perp$.

Lemme 2.4

Soit $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Alors Ψ surjective ssi les m formes linéaires coordonnées Ψ_i sont indépendantes ou encore (théorème du rang) ssi $\dim \cap \ker \psi_i = n - m$.

Sauf mention expresse, du contraire, d, n désignerons des entiers positifs ou nuls, k un entier ≥ 1 et E un espace affine de dimension $n + d$ (qui deviendra rapidement euclidien).

Arcs paramétrés, généralités

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

- Toute sous-variété X de E de rang 1 admet localement des paramétrages $\gamma : (I =]a, b[, 0) \rightarrow (X, \xi)$ qui sont des immersions \mathcal{C}^k .
- On s'intéresse ici plus généralement aux arcs réguliers γ où γ est supposé \mathcal{C}^∞ pour simplifier et $\forall t, \gamma'(t) \neq 0$. On dira seulement arc.
- L'arc géométrique γ (resp. géométrique orienté) est la classe d'équivalence d'arcs pour la relation $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ssi il existe un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme (resp. croissant) $\delta : I_1 \xrightarrow{\sim} I_2$ tel que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \delta$ (changement de paramétrisation de l'arc).
- Supposons E euclidien. « La » fonction longueur (généralement appelée abscisse curviligne) est définie à constante unique près par $t_0 \in I$ et

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(t)\| dt \quad (1)$$

C'est un difféomorphisme croissant $I \xrightarrow{\sim} J$ dont on note ici $\sigma : J \xrightarrow{\sim} I$ l'inverse.

- Dans le plan euclidien, on a donc en fonction des coordonnées cartésiennes et polaires $t \mapsto (x(t), y(t))$, $\theta \mapsto \rho(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta))$

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \quad s'(\theta) = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}.$$

On suppose dans cette section E euclidien et orienté.

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

- Pour $t \in I$, on a $(\gamma \circ \sigma)'(s(t)) = \sigma'(s(t)) \cdot \gamma'(\sigma(s(t))) = \frac{1}{s'(t)} \gamma'(t)$ d'où $\|(\gamma \circ \sigma)'\| \equiv 1$.
 - Donc γ et $\bar{\gamma} = \gamma \circ \sigma$ sont des arcs orientés équivalents avec $\|\bar{\gamma}'\| = 1$. On dit que $\bar{\gamma}$ est **paramétré par longueur d'arc**. La réciproque est évidente (l'énoncer!).
 - La longueur $s(b) - s(a) = L \in \bar{\mathbf{R}}^+$ de γ ne dépend que de l'arc géométrique (exercice). La plupart des notions qui suivent ne dépendent que de l'arc géométrique orienté .
 - La longueur d'un arc est le sup des longueurs des polygones inscrits (exercice) : un arc (\mathcal{C}^1 suffirait) est rectifiable.
 - Rappelons que deux bases de E définissent la même orientation si le déterminant de la matrice de passage est positif. On a donc deux orientations possibles pour E .
- Dorénavant E est euclidien orienté et γ est un arc paramétré par longueur d'arcs**
- Si $\dim(E) = 3$, le produit vectoriel $(u \wedge v)$ est caractérisé par le fait qu'il est alterné, normal à (u, v) , de norme l'aire du parallélogramme (u, v) du plan euclidien $\text{Vect}(u, v)$ et tel que $(u, v, u \wedge v)$ est directe.

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

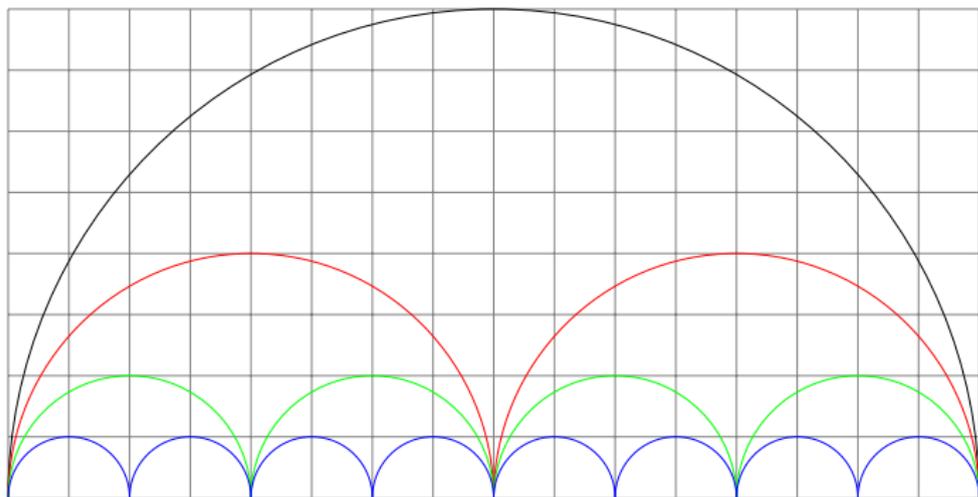
Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références



Calculer les longueurs des courbes de couleurs. Généraliser à des arcs de cercles de rayon 2^n , $n \leq 3$. Montre-t-on ainsi $\pi = 2$? Pourquoi?

Plan d'étude en coordonnées cartésiennes

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

- ① **Domaine de définition de la courbe.** $M(t)$ défini si et seulement si $x(t)$ et $y(t)$ définis. Domaine d'étude (plus petit que le domaine de définition) grâce aux symétries, périodicités... .
- ② **Vecteur dérivé.**
Calcul des dérivées des coordonnées de $t \mapsto M(t)$. Les valeurs de t tels que
1) $x'(t) = y'(t) = 0$: points non réguliers; 2) $x'(t) = 0$ (et $y'(t) \neq 0$) : tangente verticale; 3) $y'(t) = 0$ (et $x'(t) \neq 0$) tangente horizontale. ,
- ③ **Tableau de variations conjointes.**
- ④ **Étude des points singuliers. (DL)**
- ⑤ **Étude des branches infinies.** Développement asymptotique de x et y , voire de x/y pour vérifier l'existence de directions asymptotiques.
- ⑥ **Construction méticuleuse de la courbe.** On place ensuite les points importants avec leur tangente (points à tangente verticale, horizontale, points singuliers, points d'intersection avec une droite asymptote, ...).
Si x croît et y croît, on va vers la droite et vers le haut.
Si x croît et y décroît, on va vers la droite et vers le bas.
Si x décroît et y croît, on va vers la gauche et vers le haut.
Si x décroît et y décroît, on va vers la gauche et vers le bas.
- ⑦ **Points multiples (détectés sur le tracé)**

Plan d'étude en coordonnées polaires

Définie par $\theta \mapsto \rho(\theta)$ avec $M(\theta) = \rho(\theta)e^{i\theta}$ dans le plan orienté euclidien identifié à \mathbf{C} .

- 1** Domaine de définition de la courbe. Si ρ

 - est T - périodique (resp. antipériodique), étude sur $[-T/2; T/2[$ ou $[0; T[$ puis compléter par rotations successives d'angle T (reps. $t + \pi$).
 - est paire (resp. Impaire) , étude sur \mathbf{R}^{\pm} , puis compléter par symétrie d'axe $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ (resp. $i\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$).
 - admet $a|\rho(a - \theta) = \rho(\theta)$ (resp. $a|\rho(a - \theta) = -\rho(\theta)$), étude sur $\pm[a/2, +\infty[$ puis compléter d'axe la droite d'équation $\theta = a/2$ (resp. $\theta = (a + \pi)/2$).
- 2** Vecteur dérivé. $M'(\theta) = \rho'(\theta)e^{i\theta} + i\rho e^{i\theta}$.
- 3** Étude des points singuliers.
Point régulier ssi $(\rho, \rho') \neq (0, 0)$.
Point double : $\rho(\theta + 2k\pi) = \rho(\theta)$ ou $\rho(\theta + (2k + 1)\pi) = -\rho(\theta)$ pour $k \in \mathbf{Z}$.
- 4** Tableau de variations Seul l'étude des signes de ρ est vraiment utile.
- 5** Étude des branches infinies.

 - Si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta) = \pm\infty$, la droite $D_0 : \theta = \theta_0$ direction asymptotique.
 - Si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = a \in \mathbf{R}$, la droite d'équation $y = a$ dans le repère $(0, e^{i\theta_0}, ie^{i\theta_0})$ est une asymptote.
 - Si $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho(\theta) = a \in \overline{\mathbf{R}}$, on a une spirale ou un cercle asymptote.
- 6** Construction méticuleuse de la courbe. On place ensuite les points importants avec leur tangente (points à tangente verticale, horizontale, points singuliers, points d'intersection avec une droite asymptote, ...).

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Équations intrinsèques dans un plan
euclidien orienté

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

On note $\overrightarrow{T}(s) := \gamma'(s)$ le vecteur tangent unitaire (longueur d'arc !) et $\overrightarrow{N}(s)$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire à T . On dit que

$$(\gamma(s), \overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s))$$

est le repère de Frénet (mobile donc) de γ en s .

En coordonnées dans une base orthonormée directe, si

$$\overrightarrow{T}(s) = (x(s), y(s)) \text{ alors } \overrightarrow{N}(s) = (-y(s), x(s)) \quad (2)$$

de sorte que $s \mapsto (\overrightarrow{N}(s))$ est C^∞ comme γ .

En dérivant les relations

$$\|\overrightarrow{T}(s)\| = 1, \langle \overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s) \rangle = 0, \|\overrightarrow{N}(s)\| = 1 \quad (3)$$

ou grâce à l'exercice 4.18, il existe une matrice antisymétrique telle que

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \overrightarrow{T}(s) \\ \overrightarrow{N}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c(s) \\ -c(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{T}(s) \\ \overrightarrow{N}(s) \end{pmatrix} \quad (4)$$

On dit que $c(s)$ est la *courbure algébrique de l'arc* γ en s .

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

On a par définition

$$|c(s)| := \left\| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right\| = \|\gamma''(s)\|.$$

Exercice 3.1

La courbure d'une droite est nulle en tout point, celle d'un cercle est l'inverse de son rayon.

L'abscisse curviligne et les relations (3) étant invariantes par isométrie linéaire directe f de E (exercice : les décrire), la courbure d'un arc et de son transformé $f \circ \gamma$ sont les mêmes. Il est remarquable que la réciproque soit exacte.

Théorème 3.2 (Équations intrinsèques des arcs plans)

Deux arcs du plan euclidien paramétrés par longueur d'arcs se déduisent par isométrie directe si et seulement s'ils ont mêmes longueur, abscisse curviligne et courbure algébrique.

Preuve. Se ramener par isométrie à des repères de Frénet qui coïncident en un point de I puis appliquer Cauchy-Lipschitz à (4). ■

Courbure et rotation de la tangente

Choisissons une base directe (e_1, e_2) . D'après le théorème du relèvement (différentiable), il existe α fonction C^∞ telle que

$$\overrightarrow{T}(s) = \cos(\alpha(s))e_1 + \sin(\alpha(s))e_2 \quad (5)$$

$(\alpha(s))$ angle orienté entre demi-droite orientée tangent à γ en s et « horizontale » $\mathbf{R}_+ e_1$.

On alors

$$\overrightarrow{N}(s) = -\sin(\alpha(s))e_1 + \cos(\alpha(s))e_2$$

(cf. (2)) et donc en dérivant (5), on a de par la définition (4)

$$c(s) = \alpha'(s). \quad (6)$$

Exercice 3.3

Montrer que la courbure en coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$c = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

en coordonnée polaires par

$$c = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Sommaire

Rappels I :

Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure

superficielle

Intégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de

Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

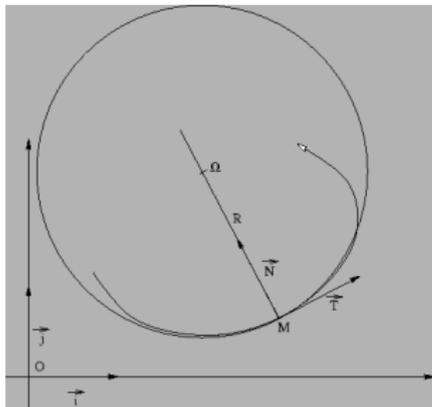
Références

Exercices 3.4

- Montrer qu'un arc de courbure nulle est un intervalle d'une droite. Qu'en est-il si la courbure est constante non nulle ?
- Le rayon de courbure $R(s) \in \bar{\mathbf{R}}$ est par définition l'inverse de la courbure $c(s)$. Le cercle osculateur en s est le cercle passant $\gamma(s)$ dont le centre $\Omega(s)$ (dit de centre courbure) vérifié

$$\overrightarrow{\gamma(s)\Omega(s)} = R(s)\overrightarrow{N(s)}.$$

Montrer que dans un sens à préciser c'est le cercle approximant le mieux γ en s .



Équations intrinsèques dans l'espace
euclidien orienté de dimension 3

Sommaire

Rappels I :

Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure

superficielle

Intégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de

Stokes

Énoncé

Preuve

Références

On adapte ce qu'on a fait dans le plan à ceci près qu'on suppose l'arc **birégulier** : pour tout s , $\gamma'(s) \neq 0$ et $\gamma''(s) \neq 0$. On note encore $\overrightarrow{T}(s) := \gamma'(s)$ le vecteur tangent unitaire (longueur d'arc!) et

$$\overrightarrow{N}(s) := \frac{d\overrightarrow{T}(s)}{ds} / \left\| \frac{d\overrightarrow{T}(s)}{ds} \right\|$$

qui est normal et unitaire. On définit enfin la binormale

$$\overrightarrow{B}(s) := \overrightarrow{T}(s) \wedge \overrightarrow{N}(s)$$

qui est unitaire. On dit que le repère orthonormé direct

$$(\gamma(s), \overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s), \overrightarrow{B}(s))$$

est le repère de Frénet (mobile donc) de γ en s .

Comme plus haut ou grâce à l'exercice 4.18, il existe une matrice antisymétrique telle que

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \overrightarrow{T}(s) \\ \overrightarrow{N}(s) \\ \overrightarrow{B}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c(s) & 0 \\ -c(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{T}(s) \\ \overrightarrow{N}(s) \\ \overrightarrow{B}(s) \end{pmatrix} \quad (7)$$

On dit encore que

$$c(s) := \left\| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right\|$$

est la *courbure de l'arc* γ en s : c'est une fonction C^∞ positive, contrairement au cas plan. Le coefficient $\tau(s)$ est C^∞ et s'appelle la torsion. Elle peut changer de signe.

Exactement pour la même raison que pour les arcs plans, on a

Théorème 3.5 (Équations intrinsèques des arcs dans l'espace)

Deux arcs dans l'espace euclidien orienté paramétrés par longueur d'arc se déduisent par isométrie directe si et seulement s'ils ont mêmes longueur, abscisse curviligne, courbure et torsion.

Exercices 3.6

- Quelles sont les arcs de torsion nulle ?
- Calculer les équations intrinsèques d'une hélice circulaire d'équation cartésienne $x(t) = a \cos(t)$, $y(t) = a \sin(t)$, $z(t) = ct$. En déduire les arcs de courbure et torsion constantes (cf. [VP]).

Modèle local des immersions, submersions

Sommaire

Rappels I :

Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Rappelons qu'une application $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^{n+d}$ (resp. $f : \mathbf{R}^{n+d} \rightarrow \mathbf{R}^n$) de classe \mathcal{C}^1 est une immersion en x si $df(x)$ est injective (resp. surjective).

Lemme 4.1

Avec les notations précédentes, on a :

- Si f immersion en 0, il existe un difféomorphisme local

$$\Psi : (\mathbf{R}^{n+d}, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{R}^{n+d}, 0)$$

tel que

$$\Psi \circ f(x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0).$$

- Si f submersion en 0, il existe un difféomorphisme local

$$\Phi : (\mathbf{R}^{n+d}, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{R}^{n+d}, 0)$$

tel que

$$f \circ \Phi(x_1, \dots, x_{n+d}) = (x_1, \dots, x_n).$$

Preuve du lemme 4.1

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de

Stokes

Énoncé

Preuve

Références

- Si f immersion, quitte à permuter les coordonnées du but, on peut supposer que le premier mineur $J_{d,d}$ de $Jac(f)(0)$ est inversible. On pose

$$\psi(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x), x_{d+1} + f_{d+1}(x), \dots, x_{d+n} + f_{d+n}(x))$$

avec $x = (x_1 \cdots, x_d)$. On a

$$Jac(\psi) = \begin{pmatrix} J_{d,d} & * \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

de sorte que ψ induit un difféomorphisme local $(U, 0) \xrightarrow{\sim} (V, 0)$. On pose $\Psi = \psi^{-1}$ et on restreint f à un voisinage de 0 dans $f^{-1}(V)$.

- Si f submersion en 0, i f immersion, quitte à permuter les coordonnées de la source, on peut supposer que le premier mineur $J_{d,d}$ de $Jac(f)(0)$ est inversible. On pose

$$\phi(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x), x_{d+1}, \dots, x_{d+n}) \text{ avec } x = (x_1 \cdots, x_{d+n}).$$

On a

$$Jac(\phi) = \begin{pmatrix} J_{d,d} & 0 \\ * & I_n \end{pmatrix}$$

de sorte que ϕ induit un difféomorphisme local $(U, 0) \xrightarrow{\sim} (V, 0)$. On pose $\Phi = \phi^{-1}$ et on restreint f à un voisinage de 0 dans $f^{-1}(V)$.

Modèle local linéaire des sous-variétés

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielle

Intégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

	Modèle linéaire	Sous-variété
Carte	$U \cap (0, \mathbf{R}^d, \mathbf{R}^{d+n})$	$V \cap (\xi, X, E)$
Équation	$\mathbf{R}^d : \varphi_{d+1}(x) = \dots \varphi_{d+n} = 0$ $\varphi_{d+1}, \dots, \varphi_{d+n}$ libres	$X : f_{d+1} = \dots f_{d+n} = 0$ $df_{d+1}(\xi), \dots, df_{d+n}(\xi)$ libres
Submersion	$\mathbf{R}^d = \varphi^{-1}(0)$ $\varphi : \mathbf{R}^{n+d} \xrightarrow{\text{linéaire}} \mathbf{R}^n$	$X = f^{-1}(0)$ $f : E \xrightarrow{\text{submersion}} \mathbf{R}^n$
Immersion	$\mathbf{R}^d \xrightarrow{\sim} \varphi(\mathbf{R}^d)$ $\varphi : \mathbf{R}^d \xrightarrow{\text{linéaire}} \mathbf{R}^{n+d}$	$\mathbf{R}^d \xrightarrow{\sim} X$ homéomorphisme* $f : \mathbf{R}^d \xrightarrow{\text{immersion}} E$

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Remarque 4.2

Une autre manière d'écrire les équations est de dire qu'il existe $f : (U, \xi) \rightarrow (\mathbf{R}^{n-d}, 0)$ de classe C^k submersion en x . (Prendre f de coordonnée f_i et utiliser le lemme de dualité en algèbre linéaire 2.3).

La condition * du tableau précédent exprime que la condition $f(\mathbf{R}^d) = X$ restreinte à un voisinage $V_0 \supset \xi$ de E est bien locale en V :

Lemme 4.3

Avec les notations précédentes, si f vérifie * au voisinage V_0 de ξ , ie

$$f \text{ homéomorphisme de } U_0 = f^{-1}(V_0) \text{ sur } f(U_0) = V_0 \cap E$$

alors pour tout voisinage $V \subset V_0$ de ξ dans E

$$f(U) = V \cap E, \quad U = f^{-1}(V_0).$$

En effet, comme $f : U_0 \xrightarrow{V} \rightarrow_0 \cap X$ est continue et ouverte $f(f^{-1}(V \cap X))$ est un ouvert de $V \cap X$, donc de la forme $W \cap X$ où $W \cap V$ voisinage ouvert de ξ dans X (topologie induite de X). Mais comme $f : U_0 \xrightarrow{V} \rightarrow_0 \cap X$ est bijective, $f \circ f^{-1} = Id$ et donc $W \cap X = V \cap X$. ■

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

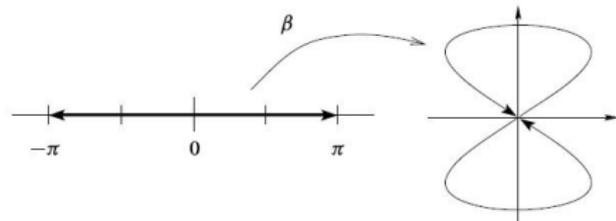
Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Il est vrai qu'une immersion est toujours localement injective (inversion locale). Le point clef est que j doit être **ouverte** sur un voisinage de ξ dans X pour être un homéomorphisme. Contre-ex (pourquoi?)



$$\beta(t) = (\sin(2t), \sin(t))$$

Il est vrai que l'exemple précédent n'est pas une sous-variété à l'origine, mais nous ne l'avons pas prouvé (Exo : pourquoi?). Pouvez-vous donner une preuve? En particulier, β n'est pas propre (pourquoi est-ce clair?). Dans cet exemple, β est globalement une immersion bijective mais sa restriction à un voisinage non trivial de 0 n'est jamais surjective sur un voisinage ouvert de ξ dans X .

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentés

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Lemme 4.4

Les propriétés suivantes sont équivalentes ($k \geq 1$ entier) :

- (i) Carte : il existe un C^k -difféomorphisme local $(E, \xi) \rightarrow (\mathbf{R}^{n+d}, 0)$ et un voisinage V de ξ tq

$$\varphi(V \cap X) = \varphi(V) \cap \mathbf{R}^d \hookrightarrow \mathbf{R}^{d+n}.$$

- (ii) Équations locales ou Submersion : il existe un voisinage ouvert V de ξ dans E et n fonctions $f_i : V \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^k tels que $df(\xi) \in E^*$ indépendantes avec

$$X \cap V = \{x \in V \mid f_{d+1}(x) = \dots = f_{d+n}(x) = 0\};$$

- (iii) Paramétrage ou Immersion : il existe un voisinage ouvert V de ξ dans E , une immersion $\beta : (V, 0) \rightarrow (E, \xi)$ de classe C^k avec $d\beta(0) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^n)$ injective et β homéomorphisme de U sur $V \cap X$.

- (iv) Graphe : il existe une décomposition affine $(E, \xi) = (E_1 \times E_2, (\xi_1, \xi_2))$, un voisinage ouvert V_i de ξ_i dans E_i , une fonction $g : V_1 \rightarrow E_2$ de classe C^k en ξ_1 tq

$$(V_1 \times V_2) \cap X = \{(x_1, g(x_1)) : x_1 \in V_1\};$$

Preuve du lemme 4.4 (détails à compléter)

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentés

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

L'équivalence des trois premières propriétés découle immédiatement des modèles locaux et des scholies correspondantes (exercice).

Montrons $(iv) \Rightarrow (ii)$ par exemple. On identifie via une affinité $(E_1 \times E_2, (\xi_1, \xi_2))$ à $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n, 0)$ et on pose

$$f_{d+i}(x, y) = y_i - g_i(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Montrons $(ii) \Rightarrow (iv)$. On identifie la submersion $f = (f_{d+1}, \dots, f_{d+n})$ dont X est localement la fibre en zéro de son modèle local linéaire

$$(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}, \dots, x_{d+n}) \mapsto (x_{d+1}, \dots, x_{d+n})$$

Dans ce cas, X est le graphe de l'application constante

$$(x_1, \dots, x_d) \mapsto 0.$$

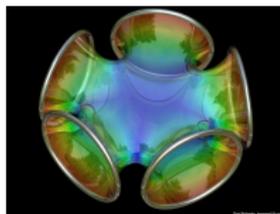
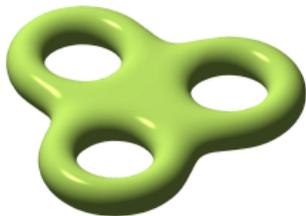
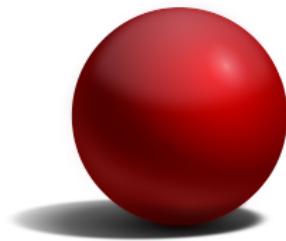
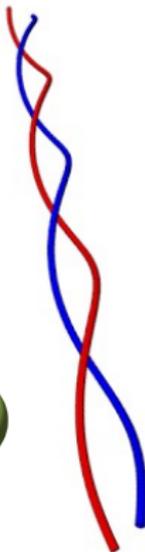


Définition 4.5

X sous-variété (C^k) de E en $\xi \in X$ si l'une des propriétés précédentes est vérifiée, une sous variété si elle l'est en chacun de ses points.

Remarque 4.6

On peut ainsi définir grâce à des cartes la notion de fonctions de classe C^ℓ , $\ell \leq k$ entre des variétés de classe k .



Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan
Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux
Tangentes
Extrema
Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent
Courbure
Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel
Partitions de l'unité

Mesure
superficielle

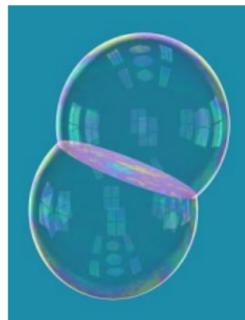
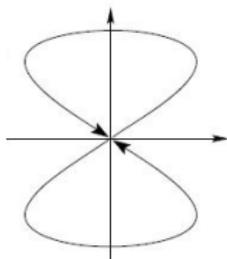
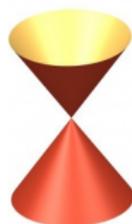
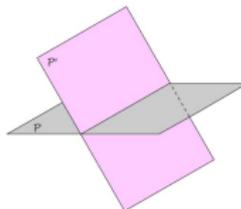
Intégrale sur une
hypersurface
Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé
Preuve

Références

Contre-exemples



Définition 4.7

L'espace tangent $T_\xi X$ d'une sous-variété X de E en un de ses points ξ est l'ensemble des tangentes en ξ des arcs paramétrés \mathcal{C}^1 dont le support est dans X passant par ξ .

On a $T_\xi E_1 = E_1$, évident mais fondamental.

Proposition 4.8

Avec les notations de la proposition 4.4, on a

- (i) Carte : $T_\xi X = d\varphi^{-1}(0)(\mathbf{R}^d)$.
- (ii) Équations locales ou Submersion : $T_\xi X = \bigcap_i \ker df_i(\xi)$.
- (iii) Graphe : $T_\xi X = (Id + dg)(\xi_1)(E_1)$.
- (iv) Paramétrage ou Immersion : $T_\xi X = d\beta(0)(\mathbf{R}^d)$.

Corollaire 4.9

$T_\xi X$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension d : la dimension de X en ξ .

Remarque 4.10

Il est parfois commode de voir l'espace tangent comme le sous-espace affine $\xi + T_\xi X$ de E . On le note par abus de la même manière. On vérifie qu'une application $f : X \rightarrow Y$ de classe \mathcal{C}^1 entre variétés induit naturellement une différentielle $df(x) : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$.

Exercices 4.11

- Montrez que les sous-variétés de dimension 0 (resp. n) sont les sous-ensembles discrets (resp. les ouverts) de \mathbf{R}^n .
- Montrez que le tore à un trou $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$ est une sous-variété de \mathbf{R}^3 .
- Montrez que le tangent à la sphère dans E euclidien en un point est l'orthogonal du rayon correspondant. Quel est l'analogue pour une conique, quadrique non dégénérée ? Plus généralement soit f une fonction C^k équation locale d'une hypersurface H (sous-variété donc) en ξ . Montrer que le gradient $\nabla_{\xi} f$ dirige $(T_{\xi} H)^{\perp}$.
- On dit que l'intersection de k hypersurfaces de \mathbf{R}^n (ie k sous-variétés de dimension $n - 1$) est transverse si la dimension de l'espace tangent de l'intersection en chacun de ses points est de dimension $n - k$. Montrer qu'alors l'intersection est une sous-variété de \mathbf{R}^n .
- Montrez que les sous-groupes classiques de $GL_n(\mathbf{R})$ sont des sous-variétés dont on précisera espace-tangents et dimensions.
- Montrez que $GL_n(\mathbf{C})$ est un ouvert de $M_n(\mathbf{C}) = \mathbf{R}^{2n^2}$. Montrez que ses sous-groupes classiques sont des sous-variétés dont on précisera espace-tangents et dimensions.

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

On sait –et c'est élémentaire– qu'un point x sur lequel une fonction scalaire différentiable $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ admet un extremum local annule sa différentielle $dF(0) : \mathbf{R}^n = T_x \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. En s'y ramenant par exemple par une carte, on en déduit immédiatement la proposition suivante :

Proposition 4.12

Soit X une partie de \mathbf{R}^n qui est une sous-variété en ξ et F une fonction scalaire définie au voisinage de ξ . Supposons que F est différentiable en ξ et que F admet un extremum local sur X en ξ . Alors, on a $dF(\xi)(T_\xi) = 0$.

Explicitons. Supposons que X est définie localement comme en (ii) de la proposition 4.4, ie sur un voisinage ouvert U de ξ dans E il existe $n - d$ fonctions $f_i : U \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^k telles que $d_i f(\xi) \in E^*$ indépendantes avec

$$X \cap U = \{x \in U \mid f_1(x) = \cdots = f_{n-d}(x) = 0\}.$$

On sait alors (proposition 4.8 (ii)) que

$$T_\xi X = \bigcap_i \ker df_i(\xi). \quad (8)$$

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentés

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Théorème 4.13 (Théorème des extremas liés)

Sous ces hypothèses, si F admet un extremum local sur X en ξ , il existe une unique famille de réels $\lambda_i, i = 1, \dots, n - d$ tels que

$$dF(\xi) = \sum_{i=1}^{n-d} \lambda_i df_i(\xi).$$

Le théorème découle immédiatement du lemme d'algèbre linéaire suivant.

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Lemme 4.14

Soit $\psi, \psi_i, i \in I$ des formes linéaires sur $E = \mathbf{R}^n$ et ψ une (autre). Alors ψ est combinaison linéaire des ψ_i si et seulement si on a

$$\bigcap \ker(\psi_i) \subset \ker(\psi).$$

De plus, une telle combinaison est unique si les ψ_i son indépendantes.

Seule l'existence de la partie réciproque demande éclaircissement. Supposons donc $\bigcap \ker(\psi_i) \subset \ker(\psi)$. En termes d'orthogonalité en théorie de la dualité, ceci se réécrit tautologiquement

$$\text{Vect}(\psi_i)^\perp = \bigcap \psi_i^\perp \subset \psi^\perp \subset E.$$

En passant à l'orthogonal (dans E^*), qui est décroissant, on obtient

$$\mathbf{R}.\psi \subset \text{Vect}(\psi_i)$$

puisque bidual d'un sev et et sev coïncident (proposition 2.3). ■

Sommaire

Rappels I :

Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans

l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure

superficielle

Intégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de

Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Exercice 4.15

- Soit $\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^n \mid \sum x_i = 1\}$. Étudier les extrema de

$$\begin{cases} \Delta & \rightarrow \mathbf{R} \\ (x_i) & \mapsto \prod x_i \end{cases} \quad \text{Quelle inégalité en déduit-on ?}$$

Exercice 4.16 (Merci à Jean-François Babadjian)

- 1 Justifier l'existence de $M = \max\{\det(u_1, \dots, u_n) : \|u_1\| = \dots = \|u_n\| = 1\}$ où \mathbf{R}^n est euclidien..
- 2 Soit $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{R}^n$ tels que $\|v_i\| = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $M = \det(v_1, \dots, v_n)$. En utilisant le théorème des extrema liés, montrer l'existence d'un $\lambda_i \in \mathbf{R}$ tel que

$$\det(v_1, \dots, v_{i-1}, h, v_{i+1}, \dots, v_n) = 2\lambda_i \langle v_i, h \rangle \quad \text{pour tout } h \in \mathbf{R}^n.$$

- 3 Montrer que $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base orthonormée de \mathbf{R}^n .
- 4 Quelle est la valeur de M ?
- 5 En déduire l'inégalité de Hadamard

$$|\det(u_1, \dots, u_n)| \leq \|u_1\| \cdots \|u_n\| \quad \text{pour tout } u_1, \dots, u_n \in \mathbf{R}^n.$$

- 6 Cas d'égalités ? Interpréter géométriquement ce résultat.

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Théorème 4.17 (Von Neumann)

Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbf{R})$. On pose

$$\mathfrak{g} := \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, \exp(tX) \in G\}.$$

Alors, \mathfrak{g} est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$ et G est une sous-variété de $M_n(\mathbf{R})$ et $\mathfrak{g} = T_I G$.

Exercices 4.18

Soit $g : I \rightarrow G$ une application \mathcal{C}^1 . Montrer $\forall t \in I, g(t)^{-1}g'(t) \in \mathfrak{g}$. Si $G = O_n(\mathbf{R})$, en déduire $\forall t \in I, g(t)^{-1}g'(t)$ est antisymétrique.

Preuve : Admettons pour le moment que \mathfrak{g} est un sev de $M_n(\mathbf{R})$. Commençons la preuve par un

Lemme 4.19

Soit X_k une suite de matrices non nulles convergeant vers 0 tels que $\exp(X_k) \in G$ pour tout k . Alors toute valeur d'adhérence ξ de $X_k/\|X_k\|$ est dans \mathfrak{g} .

Preuve. On peut supposer $X_k/\|X_k\|$ converge vers ξ . Soit $t \in \mathbf{R}$. On a

$$\lim \exp(tX_k/\|X_k\|) = \exp(t\xi).$$

On écrit simplement

$$\exp(tX_k/\|X_k\|) = \exp((t/\|X_k\| - [t/\|X_k\|])X_k) \exp(X_k)^{[t/\|X_k\|]} \quad (9)$$

Comme

$$|\|X_k\| - [t/\|X_k\|]| \leq 1 \text{ et } \lim X_k = 0,$$

le premier facteur du membre de droite tend vers Id .

On déduit que le second facteur converge de même que le membre de gauche.

Comme ce second facteur est dans G pour tout k et que G est fermé, sa limite est dans G .

Et donc en passant à la limite dans (9) $\exp(t\xi) \in G$. ■

On veut construire une carte de G près de Id . Soit S un supplémentaire de \mathfrak{g} dans $M_n(\mathbf{R})$ et

$$\tilde{\varphi} : \begin{cases} \mathfrak{g} \times & S \rightarrow & GL_n(\mathbf{R}) \\ (X, S) & \mapsto & \exp(X) \exp(S) \end{cases}$$

La différentielle de $\tilde{\varphi}$ à l'origine est l'identité (vérifier !) donc c'est un difféomorphisme local en $(0, 0)$: il existe des voisinages de l'origine U, V dans \mathfrak{g}, S tels que $W := \tilde{\varphi}(U \times V)$ voisinage ouvert de Id dans $GL_n(\mathbf{R})$ et

$$\tilde{\varphi} : U \times V \rightarrow W$$

difféomorphisme d'inverse $\varphi := \tilde{\varphi}^{-1}$.

Reste à prouver que, quitte à rétrécir U et V , on a $\varphi(W \cap G) = \mathfrak{g} \cap U$ ie

$$\varphi^{-1}(W \cap G) = \mathfrak{g} \cap U.$$

Par construction, $\mathfrak{g} \cap U \subset \varphi(W \cap G)$. Supposons que pour toute boule ouverte $V_k = B(0, 1/k) \subset V$ on ait

$$\tilde{\varphi}^{-1}(W_k \cap G) \not\subset \mathfrak{g}.$$

Pour tout $k > 0$, il existe donc

$$\gamma_k \in \mathfrak{g} \cap U, X_k \in S \cap V_N \mid - \{0\} \exp(\gamma_k) \exp(X_k) \in W_N \cap G.$$

Soit ξ une valeur d'adhérence de $X_k / \|X_k\|$ de la sphère unité de S ; c'est un élément de S .

Mais d'après le lemme 4.19, c'est un élément de \mathfrak{g} . Donc $\xi = 0$, une contradiction ce qui achève la preuve du second point.

Montrons que \mathfrak{g} est un sev de $M_n(\mathbf{R})$. Commençons pour changer par une version explicite du théorème d'inversion locale pour l'exponentielle. On fixe une norme sous-multiplicative sur $M_n(\mathbf{R})$. Si $\|H\| < 1$, on définit

$$L(-H) := \ln(\text{Id} - H) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^{k+1}}{k+1}$$

(série normalement convergente). On a

$$\exp(\ln(\text{Id} + H)) = \text{Id} + H \text{ pour tout } H \text{ tel que } \|H\| < 1$$

(argument formel ou changer H en tH et dériver par rapport à t). Inversement,

$$\|\|\text{Id} - \exp(H)\|\| = \|H\| \sum_{k \geq 1} \|H^{k-1}\|/k! \leq \|H\| e^{\|H\|} \leq 1 \text{ si } \|H\| < 1/2$$

et comme plus haut on a alors

$$\ln \exp(H) = H \text{ si } \|H\| < 1/2.$$

En particulier, l'exponentielle réalise un homéomorphisme analytique d'inverse L entre la boule ouverte V de centre 0 et de rayon 1/2 dans $M_n(\mathbf{R})$ et le voisinage ouvert de Id dans $GL_n(\mathbf{R})$.

$$W = \exp(V) = L^{-1}(V)$$

On conclut alors par

Lemme 4.20Soit $X, Y \in M_n(\mathbf{R})$. Alors on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\exp\left(\frac{X}{k}\right) \exp\left(\frac{Y}{k}\right) \right)^k = \exp(X + Y).$$

[Preuve :] On a

$$\exp\left(\frac{X}{k}\right) \exp\left(\frac{Y}{k}\right) = Id + \frac{X + Y}{k} + o(1/k),$$

en particulier cette suite tend vers l'identité. On a alors,

$$kL\left(\exp\left(\frac{X}{k}\right) \exp\left(\frac{Y}{k}\right) - Id\right) = X + Y + o(1)$$

Comme $L\left(Id + \frac{X+Y}{k} + o(1/k)\right) = \frac{X+Y}{k} + o(1/k)$ on a pour k assez grand

$$\begin{aligned} X + Y + o(1) &= \exp\left(kL\left(\exp\left(\frac{X}{k}\right) \exp\left(\frac{Y}{k}\right)\right)\right) \\ &= \left(\exp\left(L\left(\exp\left(\frac{X}{k}\right) \exp\left(\frac{Y}{k}\right)\right)\right)\right)^k \\ &= \left(\exp\left(\frac{X}{k}\right) \exp\left(\frac{Y}{k}\right)\right)^k \end{aligned}$$

Si $X, Y \in \mathfrak{g}$, le lemme prouve que $\exp(t(X + Y))$ est limite d'éléments de G , donc est dans G car G est fermé : \mathfrak{g} est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$. ■

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Soit $\tilde{\varphi} : (U, 0) \rightarrow (X, x) \hookrightarrow (\mathbf{R}^3, \xi)$ un plongement local C^k , $k \geq 2$ dans \mathbf{R}^3 **euclidien** défini par (l'inverse d')une carte locale φ .

On a

$$T_{\xi}X = \text{Vect}\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial s}(0), \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(0)\right)$$

et on pose

$$N := \tilde{N}/\|\tilde{N}\| \text{ avec } \tilde{N} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial s}(0) \wedge \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(0)$$

(vecteur normal unitaire).

Étudier la position de $M = \tilde{\varphi}(s, t)$ par rapport à $T_{\xi}X$ c'est étudier la projection orthogonale de $\overrightarrow{\xi M}$ sur N , donc c'est calculer le produit scalaire $\langle \overrightarrow{\xi M}, N \rangle$.

Or (Taylor-Young)

$$\overrightarrow{\xi M} = \varphi(s, t) - \varphi(0, 0) = d\varphi(0, 0)(s, t) + \frac{1}{2}d^2\varphi(0)(s, t) \cdot (s, t) + o(\|(s, t)\|^2)$$

$\in T_{\xi}X = N^{\perp}$

de sorte que

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{\xi M}, N \rangle &= \frac{1}{2} \langle d^2\varphi(0)(s, t) \cdot (s, t), N \rangle + o(\|(s, t)\|^2) \\ &= \frac{\|(s, t)\|^2}{2} \left[\langle d^2\varphi(0) \frac{(s, t)}{\|(s, t)\|} \cdot \frac{(s, t)}{\|(s, t)\|}, N \rangle + o(1) \right]. \end{aligned}$$

Seconde forme fondamentale

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Corollaire 5.1 (Position d'une surface par rapport au plan tangent)

Supposons que la seconde forme fondamentale en ξ

$$II(s, t) := \langle d^2\varphi(0)(s, t), N \rangle$$

est non dégénérée, X est (localement) au dessus de son plan tangent (resp. au dessous), si II est définie positive (resp. définie négative); sinon, elle rencontre les deux côtés. Si II est dégénérée, on ne peut rien dire sans poursuivre le DL.

Le produit scalaire de \mathbf{R}^3 induit une forme quadratique positive I sur

$T_\xi X \stackrel{d\varphi(\xi)}{=} \mathbf{R}^2$ défini par

$$I(s, t) = \|d\tilde{\varphi}(s, t)\|^2.$$

Le rapport des discriminants de formes quadratiques sur \mathbf{R}^2

$$K(\xi) := \det(II) / \det(I)$$

s'appelle la courbure de Gauss de X en ξ . Il ne dépend pas des bases.

Complément I : Paramétrage normal des
sous-variétés de dimension 1

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

L'existence paramétrage locaux pour les courbes=sous-variétés de dimension 1 de E euclidien montre qu'une sous-variété est localement un arc paramétré.

La réciproque est vraie

Proposition 5.2

Toute courbe (sous-variété de dimension 1) connexe X de E admet un paramétrage surjectif par longueur d'arc $f : \mathbf{R} \rightarrow X$. Si f est injectif, c'est un difféomorphisme. Sinon f est périodique de groupe de périodes TZ et induit un difféomorphisme $S_1 = \mathbf{R}/TZ \xrightarrow{\sim} X$.

Preuve élémentaire mais délicate, qui peut constituer une partie d'un joli développement (voir [JL] ou, moins lisible, [JM]). [RL] utilise l'exercice suivant, pas inintéressant en soi.

Exercices 5.3

Une immersion injective de \mathbf{R}^d dans E dont l'image est une sous-variété est un difféomorphisme.

Complément II : Endomorphisme de
Weingarten pour les surfaces

Sommaire

Rappels I :

Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

La fonction

$$N \begin{cases} X & \rightarrow S_2 := \{x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x\| = 1\} \\ x & \mapsto N(x) \end{cases}$$

est \mathcal{C}^1 (localement, elle est définie au signe près, ce qui ne nous gênera pas pour la courbure de Gauss)) donc induit (remarque 4.10) une différentielle

$$T_\xi X = N(x)^\perp \rightarrow T_{N(\xi)} S_2 \stackrel{\text{exercice 4.11}}{=} N(\xi)^\perp = T_\xi X.$$

$$dN(\xi) \in \mathcal{L}(T_x X)$$

s'appelle l'endomorphisme de Weingarten. On vérifie alors

$$II(s, t) = -I(dN(\xi)v, v) \text{ avec } v = d\tilde{\varphi}_{(0,0)}\varphi(s, t) \quad (10)$$

(dériver les relations $(Nv, \partial_s v) = (Nv, \partial_t v) = 0$) ce qui permet de définir II sur $T_\xi X$ indépendamment de la carte. La relation (10) donne alors

$$K(\xi) := \det(II) / \det(I) = \det(dN(\xi)),$$

qui ne dépend donc que de la sous-variété X de \mathbf{R}^3 euclidien. $K(\xi)$ s'appelle la courbure de Gauss de X en ξ . On a alors le « théorème » remarquable" (*Theorema egregium*, cf. [CFG] ou, plus moderne, [MDC], théorème page 234)

Théorème 5.4 (Gauss, admis)

La courbure de Gauss est invariante par isométries locales de (X, ξ) .

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Exercices 5.5

- *Calculer l'endomorphisme de Weingarten d'une sphère. En déduire sa courbure de Gauss.*
- *Soit f une application linéaire bijective de \mathbf{R}^3 et S une surface. Comparer les courbures de Gauss de S et $f(S)$. Quelle est la courbure de Gauss d'un ellipsoïde ?*
- *Calculer l'endomorphisme de Weingarten d'un graphe. En déduire une formule pour la courbure de Gauss.*
- *Montrer que la courbure de Gauss de l'hyperboloïde à une nappe (équation typique $x^2 + y^2 - z^2 = 1$) est négative alors que celle de l'hyperboloïde à une nappe (équation typique $x^2 + y^2 - z^2 = -1$) est positive.*
- *On considère la (demi) pseudo-sphère d'équation paramétrique $(\cos(s)/\cosh(t), \sin(s)/\cosh(t), t - \tanh(t))$, $s \in \mathbf{R}$, $t > 0$. Montrer que c'est une surface non bornée d'aire 2π et de volume intérieur $2\pi/3$ et de courbure de Gauss identiquement -1 .*
- *Montrer qu'un cône épointé, un cylindre (lisses) sont de courbure de Gauss nulle.*

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan
Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux
Tangentes
Extrema
Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent
Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel
Partitions de l'unité

Mesure
superficielle

Intégrale sur une
hypersurface
Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé
Preuve

Références

Courbure négative

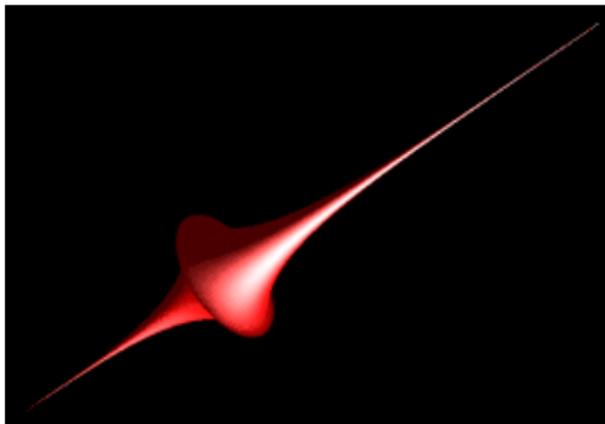


Figure – Pseudosphère



Figure – Hyperboloïde

Produit vectoriel dans $E = \mathbf{R}^n$ euclidien
orienté

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Si . On note \det le déterminant de n vecteurs relativement à n'importe quelle base orthonormée directe. On note alors

$$\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_{n-1}$$

le produit vectoriel de $n - 1$ vecteurs défini par

$$\forall \vec{v} \in E, (\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_{n-1}, \vec{v}) := \det(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}). \quad (11)$$

Exercice 6.1

Montrer que $\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_{n-1}$ est nul ssi les v_i sont liés. Sinon, montrer

$$\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_{n-1} = \sqrt{\det \text{gram}(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_{n-1})} \cdot \vec{n}$$

où \vec{n} est la normale unitaire à l'hyperplan $\text{Vec}(\vec{v}_i)$ convenable.

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Soit X un espace métrique localement compact (par exemple une sous-variété de \mathbf{R}^n). Soit U_1, \dots, U_N un recouvrement fini d'un compact K par des ouverts de X . Alors, il existe une *partition de l'unité subordonnée aux U_i adaptée à K* à savoir

$$\exists f_1, \dots, f_N \in C(X, \mathbf{R}^+) \text{ à support dans } U_i \text{ telles que } \forall x \in K \sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$$

(cf. [JMB] 2.3.25).

Remarque 6.2

On peut faire mieux. L'hypothèse « espace métrique » peut-être relâchée en « espace topologique séparé » et on peut supposer $f_i \in C_c(U_i, \mathbf{R}^+)$. La preuve dans le cas métrique (qui nous suffit) est nettement plus simple que dans le cas général (voir pour cela [VR] 2.13).

Par ailleurs (cf. cours de distribution), on peut avoir des hypothèses de régularité de type C^∞ lorsque cela fait sens, par exemple si X est un ouvert de \mathbf{R}^n . Ceci donne immédiatement le résultat important suivant :

Une distribution sur un ouvert de \mathbf{R}^n nulle sur un recouvrement ouvert est nulle.

Intégrale sur une hypersurface

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

On va définir dans cette partie une mesure borélienne $d\sigma$ sur H comme forme linéaire sur $C_c(H)$.

Notons que pour tout couple $V \subset V'$ de H , le prolongement par zéro définit une injection linéaire $C_c(V) \subset C_c(V')$ des fonctions à support compact. Attention, la restriction des fonctions de V' à V ne respecte pas en général la condition de compacité du support.

Si $n = 0$, on sait que H est un ensemble discret de points et l'intégrale de surface est simplement défini par la mesure de comptage (qui correspond via une paramétrisation à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^0 !).

Soit

$$\beta : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

une paramétrisation locale d'une hypersurface H de \mathbb{R}^{n+1} (au sens de (4.4)). Soit f une fonction continue à support compact définie sur l'ouvert $V = \beta(U)$ de H .

On va définir $d\sigma$ sur l'ouvert V indépendamment du choix de β puis recoller.

Sommaire

Rappels I :

Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Si $n = 1$, on sait définir l'intégrale

$$\int_V f d\sigma = \int_a^b f(\beta(u)) \|\beta'(u)\| du \text{ avec } U =]a, b[\quad (12)$$

comme l'intégrale de f sur l'arc orienté (par les u croissants) défini par β .

L'intégrale $\int_V f d\sigma$ ne dépend que de f et de la courbe plane V .

Elle ne dépend pas du paramétrage croissant ou décroissant choisi (grâce à la formule de changement de variable dans les intégrales unidimensionnelles) et mais dépend uniquement de l'arc géométrique sous-jacent.

On dit que $\|\beta'(u)\| du$ est l'élément de longueur infinitésimal de l'hypersurface en $\beta(u)$.

Si $n > 1$, on définit (notation provisoire), le rôle de $\beta'(u)$ est tenu par la matrice jacobienne

$$J_\beta(u) := (\partial_1 \beta(u), \dots, \partial_n \beta(u)) \in M_{n+1, n}(\mathbf{R}).$$

Vérifions l'indépendance du paramétrage comme pour les courbes.

On va considérer

$$\begin{aligned} \|(\partial_1\beta(u) \wedge, \dots, \wedge \partial_n\beta(u))\| du &\stackrel{(6.1)}{=} \sqrt{\det \text{gram}(\partial_1\beta(u), \dots, \partial_n\beta(u))} \cdot du \\ &= \sqrt{\det {}^t J_\beta(u) J_\beta(u)} du. \end{aligned}$$

l'élément d'(hyper)surface infinitésimal de l'hypersurface en $\beta(u)$ au sens suivant.

Lemme 7.1

Soit f une fonction continue à support compact définie sur l'ouvert $V = \beta(U)$ de H et α un C^1 -difféomorphisme de $\bar{U} \subset \mathbf{R}^n$ sur $\alpha(\bar{U}) = U$. Alors, les intégrales

$$(\int_U) \quad \int_U f(\beta(u)) \|(\partial_1\beta(u) \wedge, \dots, \wedge \partial_n\beta(u))\| du$$

et

$$(\int_{\bar{U}}) \quad \int_{\bar{U}} f(\bar{\beta}(\bar{u})) \|(\partial_1\bar{\beta}(\bar{u}) \wedge, \dots, \wedge \partial_n\bar{\beta}(\bar{u}))\| d\bar{u}, \text{ avec } \bar{\beta} = \beta \circ \alpha$$

sont égales.

On note $\int_V f d\sigma$ la valeur commune $\int_U = \int_{\bar{U}}$.

Par construction $\int_V f d\sigma$ ne dépend que de f , $V \subset H$ et de la structure euclidienne de E et pas du choix de coordonnées euclidiennes.

Preuve. La formule du changement de variable $u \mapsto \bar{u}$ dans (\int_U) donne

$$\begin{aligned} \int_U &= \int_{\bar{U}} f(\bar{\beta}(\bar{u})) \|(\partial_1 \beta(\alpha(\bar{u})) \wedge \cdots \wedge \partial_n \beta(\alpha(\bar{u})))\| |\det J_\alpha(\bar{u})| d\bar{u} \\ &= \int_{\bar{U}} f(\bar{\beta}(\bar{u})) \sqrt{|\det {}^t J_\beta(\alpha(\bar{u})) J_\beta(\alpha(\bar{u}))|} |\det J_\alpha(\bar{u})| d\bar{u} \\ &= \int_{\bar{U}} f(\bar{\beta}(\bar{u})) \sqrt{|\det {}^t J_\beta(\alpha(\bar{u})) J_\beta(\alpha(\bar{u}))|} \sqrt{|\det {}^t J_\alpha(\bar{u}) J_\alpha(\bar{u})|} d\bar{u} \\ &= \int_{\bar{U}} f(\bar{\beta}(\bar{u})) \sqrt{|\det {}^t [J_\beta(\alpha(\bar{u})) J_\alpha(\bar{u})] J_\beta(\alpha(\bar{u})) J_\alpha(\bar{u})|} d\bar{u} \end{aligned}$$

Or, $d\bar{\beta}(\bar{u}) = d\beta(\alpha(\bar{u})) \circ d\alpha(\bar{u})$ de sorte que $J_{\bar{\beta}}(\bar{u}) = J_\beta(\alpha(\bar{u})) J_\alpha(\bar{u})$ et donc on a $\int_U = \int_{\bar{U}}$. ■

Un ouvert V de H tel qu'il existe un difféomorphisme $\beta : U \simeq V$ comme dans le lemme sera dit *ouvert de carte de H* . Tout ouvert V' d'un ouvert de carte V est encore un ouvert de carte et par construction

$$\int_{V'} f d\sigma = \int_V f d\sigma \quad \forall f \in C_c(V'). \quad (13)$$

Exemple 7.2

Si H est localement définie par le graphe de $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, on a donc

$$\beta(x) = (f(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n).$$

Le produit vectoriel définissant l'élément de surface est proportionnel à

$(-1, \partial_1 f, \dots, \partial_n f)$ puisque orthogonal à $\beta_i = (\partial_i f, 0 \cdots 0, \mathbf{1}, 0 \cdots 0)$, $i = 1 \cdots, n$.

Or, un calcul immédiat de déterminant donne grâce à (11) $(\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_n \cdot \mathbf{e}_0) = 1$ de sorte que $\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_n = (-1, \partial_1 f, \dots, \partial_n f)$ et

$$d\sigma = \|\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_n\| dx = \sqrt{1 + \|\nabla(f)\|^2} dx. \quad (14)$$

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Proposition 7.3

Soit H une hypersurface de dimension $n \geq 0$ de \mathbf{R}^{n+1} . Il existe une unique forme linéaire positive

$$f \mapsto \int_H f d\sigma$$

sur $C_c(H)$ qui pour tout ouvert de carte V coïncide avec $f \mapsto \int_V f d\sigma$ sur $C_c(V) \subset C_c(H)$.

D'après le théorème de Riesz, la forme $f \mapsto \int_H f d\sigma$ sur $C_c(H)$ est représentable par une mesure borélienne unique notée $d\sigma$, finie sur les compacts, et régulière car H est dénombrable à l'infini (cf. [VR] 2.14 et 2.17). On l'appelle la mesure (hyper)superficielle sur H .

Exemple 7.4

Si H est la sphère unité, $r^n dr \times d\sigma$ est la mesure image de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^{n+1} - 0$ par $x \mapsto (\|x\|, x/\|x\|)$ (vérifier localement grâce à (14)).

Preuve :

Unicité (et mode de calcul). Soit $f \in C_c(H)$ à support contenu dans un compact K . Choisissons un recouvrement ouvert fini de K par des ouverts de carte U_i et une partition de l'unité f_i adaptée à $(K, (U_i))$. Comme f est nulle en dehors de K , on a

$$f = \sum f_i f.$$

Le support de $f_i f$ est contenu dans $K \cap \text{supp}(f_i)$ donc est un compact (fermé dans un compact) contenu dans f_i de sorte que $f_i f \in C_c(U_i) \subset C_c(H)$. On a alors nécessairement

$$\int_H f d\sigma = \sum \int_{U_i} f_i f d\sigma. \quad (15)$$

Existence. Montrons que le membre de droite de (15) ne dépend que de f et pas de la partition de l'unité $K, (U_i), f_i$ comme plus haut. Soit donc $\tilde{K}, (\tilde{U}_j), \tilde{f}_j$ une autre telle donnée. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{U_i} f_i f d\sigma &= \sum_i \int_{U_i} \sum_j \tilde{f}_j f_i f d\sigma \\ &= \sum_{i,j} \int_{U_i} \tilde{f}_j f_i f d\sigma \\ &\stackrel{(13)}{=} \sum_{i,j} \int_{U_i \cap \tilde{U}_j} \tilde{f}_j f_i f d\sigma && \text{car } f_j f_i f \in C_c(U_i \cap \tilde{U}_j) \subset C_c(U_i) \\ &= \sum_j \int_{\tilde{U}_j} \tilde{f}_j f d\sigma && \text{par symétrie des rôles de } i, j. \end{aligned}$$

L'intégrale est donc définie.

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Si maintenant $f, g \in C_c(X)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Comme l'union de deux compacts est compacte, choisissons un compact K contenant les supports de f et g et donc celui de $\lambda f + g$.

Choisissons une partition de l'unité adaptée U_i, f_i . Comme $\int_{U_i} ? d\sigma$ est linéaire, on a alors

$$\int_H (\lambda f + g) d\sigma = \sum \int_{U_i} f_i (\lambda f + g) = \lambda \sum \int_{U_i} f_i f d\sigma + \sum \int_{U_i} f_i g d\sigma = \lambda \int_H f d\sigma + \int_H g d\sigma.$$

Soit alors U une carte et $f \in C_c(U)$, donc nulle hors d'un compact contenu dans U . Une partition de l'unité f_1 est simplement une fonction continue $f \in C(X, \mathbf{R}^+)$ à support dans U valant 1 sur K . On a $f_1 f = f$ par construction. On a alors

$$\int_X f d\sigma = \int_X f_1 f d\sigma = \int_U f_1 f d\sigma = \int_U f d\sigma.$$

En pratique, on n'utilise pas de partitions de l'unités pour le calcul intégral. ■

Sommaire

Rappels I :

Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Comme dans le cas des ouverts de \mathbf{R}^n , on a le résultat immédiat suivant, utilisé lorsque les intérieurs $\overset{\circ}{K}_i$ sont des ouverts de cartes :

Soit K_i un recouvrement fini de H tels que

$$\overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \emptyset \text{ et } d\sigma(\partial K_i \cap \partial K_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Alors, pour tout $f \in C_c(H)$, on a

$$\int_H f d\sigma = \sum_i \int_{\overset{\circ}{K}_i} f d\sigma.$$

Exercices 7.5

- Calculer la mesure de surface d'une sphère de \mathbf{R}^{n+1} . Quelle est sa surface ?
- Calculer la mesure de superficielle d'une surface définie en coordonnées cylindriques dans l'espace.
- Soit γ un arc régulier injectif du plan Oxy de l'espace ne passant pas par l'origine. Soit S le lieu des points engendré par rotation de γ autour de Oz . Montrer que S est une surface et calculer son aire.
- Calculer la surface de l'intersection d'une sphère et d'un cylindre de même rayon dont une génératrice passe par son centre (fenêtre de Viviani).

Sommaire

Rappels I :

Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Soit $f : \mathbf{R}^{n+1} \subset \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction lisse telle que

$$\text{Pour tout } x \in \Omega, \nabla f(x) \neq 0 \quad (16)$$

Pour tout réel t , l'ensemble de niveau

$$H_t = f^{-1}(t)$$

est donc une hypersurface de Ω avec sa mesure de surface $d\sigma_t$.

Théorème 7.6 (Formule de la co-aire)

Pour tout $g \in L^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} g(x) \|\nabla f(x)\| dx = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{H_t} g(x) d\sigma_t \right) dt.$$

Remarque 7.7

L'énoncé est bien plus général (facile à généraliser pour des hypersurfaces transverses), mais le bon cadre est en fait sans hypothèse de transversalité ni même de lissité des équations. Il faut simplement définir la mesure de Hausdorff et travailler un peu. Voir [MGGM] - la référence classique est Federer, magnifique, mais est plus ardue à lire.

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

La démonstration du théorème est très simple (procéder localement puis recoller avec des partitions de l'unité comme dans la formule de Stokes). La preuve n'est toutefois pas exigible à l'agrégation.

Exercices 7.8 (Coordonnées sphériques)

Soit S_r la sphère de rayon r dans \mathbf{R}^{n+1} et h_r l'homothétie de rapport r . Soit $d\sigma_r$ la mesure superficielle de S_r .

- 1 Comparer la mesure image $h_r * d\sigma_1$ et $d\sigma_r$.
- 2 Pour tout $g \in L^1(\mathbf{R}^{n+1})$, montrer la formule

$$\int_{\mathbf{R}^{n+1}} g(x) dx = \int_0^\infty r^n \left(\int_{S_1} g(rx) d\sigma_1 \right) dr.$$

- 3 En considérant $g(x) = \exp(-\|x\|^2)$, calculer la surface de S_1 , de S_r .
- 4 En considérant $g = 1_{B_r}$, calculer le volume des boules.

Définition 8.1

On dit qu'un fermé $\bar{\Omega}$ de \mathbf{R}^{n+1} est un domaine (ou que son intérieur $\Omega = \bar{\Omega} \setminus \partial\bar{\Omega}$ est un ouvert régulier) si pour tout point ω de $\partial\bar{\Omega}$, il existe des coordonnées euclidiennes x_0, \dots, x_n de E , des réels $a_i < \omega_j < b_i$ et une fonction lisse

$$\varphi : \prod_{i \geq 1}]a_i, b_i[\rightarrow]a_0, b_0[$$

tels que localement sur $U_\omega = \prod_{i \geq 0}]a_i, b_i[$, le fermé $\bar{\Omega}$ est la partie au dessus du graphe de φ :

$$U_\omega \cap \bar{\Omega} = \{(x_0, x) \in U \mid x_0 \geq \varphi(x)\}.$$

Remarque 8.2

Avec les notations précédentes, on a

$$U_\omega \cap \partial\bar{\Omega} = \{(x_0, x) \in U_\omega \mid x_0 = \varphi(x)\}$$

de sorte que $\partial\bar{\Omega}$ est une hypersurface fermée en tant que localement un graphe. On définit alors (cf. (7.2)) la normale unitaire orientée sortante de $\partial\bar{\Omega}$ en ω (exercice : pourquoi sortante ?)

$$N(\omega) = \frac{(-1, \partial_1\varphi, \dots, \partial_n\varphi)}{\sqrt{1 + \|\nabla(\varphi)\|^2}} \quad (17)$$

On notera (exercice) que $\partial\bar{\Omega}$ est vide si et seulement si $\bar{\Omega} = \mathbf{R}^{n+1}$.

Énoncé de la formule de Stokes

Rappelons que si X est un champ de vecteurs (lisse) $\Omega \rightarrow E$, pour tout

$$\omega \in \Omega, \quad dX(\omega) \in \mathcal{L}(E)$$

et par définition on pose

$$\operatorname{div}(X)(\omega) = \operatorname{Tr}(dX(\omega)).$$

En coordonnées dans $E = \mathbf{R}^{n+1}$, on a

$$\operatorname{div}(X) = \sum_i \frac{\partial^i f}{\partial x_i}.$$

Si X , défini et lisse au voisinage de $\bar{\Omega}$, est de plus à support compact, sa restriction à $\partial\Omega$ est encore à support compact car $\partial\Omega$ est fermé dans \mathbf{R}^{n+1} et il en est de même de la fonction (N, X) sur $H = \partial\Omega$ définie par le produit scalaire (composante normale de X)

$$h \mapsto (N(h) \cdot X(h)).$$

Théorème 8.3 (Formule de Stokes-Ostrogradsky)

Avec les notations et hypothèses précédentes, on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(X) dv = \int_{\partial\Omega} (N, X) d\sigma. \quad (18)$$

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

- Si Ω est de plus borné, les hypothèses de support compact dans la formule de Stokes sont inutiles. En effet, on peut multiplier toute fonction lisse par une fonction lisse à support compact valant 1 dans un voisinage compact de $\bar{\Omega}$ sans changer la valeur des intégrales en jeu.
- En dimension 1, on obtient avec $\Omega =]a, b[$ et \mathbf{R} orienté par l'ordre usuel

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

- Si $X = fe_i$ avec f lisse à support compact, on obtient

$$\int_{\Omega} \partial_i f dv = \int_{\partial\Omega} N_i f d\sigma$$

avec N_i la i -ème coordonnée de la normale sortante de N . Cette formule (et la précédente) appliquée à un produit de fonctions fg donne alors la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} f \partial_i g dv = - \int_{\Omega} g \partial_i f dv + \int_{\partial\Omega} fg \cos(N, e_i) d\sigma.$$

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Remarque 8.4

Pour ceux qui connaissent les formes différentielles, en posant

$$\omega = \sum_{i \geq 0} X_i dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge dx_n,$$

on a

$$d\omega = \operatorname{div}(X) dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n \text{ et } \int_{\partial\Omega} (N, X) d\sigma = \int_{\partial\Omega} \iota^* \omega$$

avec $\iota : \partial\Omega \hookrightarrow E$ l'injection canonique et $\partial\Omega$ orienté par N de sorte que le théorème 8.3 se réécrit

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \iota^* \omega.$$

C'est la version formes différentielles de la formule de Stokes.

Remarque 8.5

Un ouvert relativement compact dont le bord est une hypersurface est automatiquement un ouvert régulier (cf. [JL]).

Preuve de la formule de Stokes.

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

Par linéarité, on peut supposer $X = fe_i$, $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$.

Comme les deux membres sont alors des distributions, il suffit de prouver l'égalité sur un recouvrement ouvert fini ad-hoc (6.2).

On choisit donc comme recouvrement

$$\Omega, \mathbf{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}, U_\omega$$

(cf. définition 8.1) autrement dit on peut supposer X à support compact dans un de ces ouverts.

Pour les deux premiers ouverts, les deux membres de (18) sont nuls, et donc sont égaux !

On suppose donc X à support compact dans un U_ω .

La clef du calcul est le lemme suivant

Lemme 8.6

Soit b un réel, f une fonction de $\mathcal{C}_c^1(\mathbf{R}^{n+1})$ nulle pour $x_0 \geq b$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},]-\infty, b])$. Alors, pour $j \geq 1$, on a pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\partial_j \int_{\varphi(x)}^b f(x_0, x) dx_0 = -\partial_j \varphi(x) f(\varphi(x), x) + \int_{\varphi(x)}^b \partial_j f(x_0, x) dx_0 \quad (19)$$

Preuve. On fixe les bornes de l'intégrale

$$I(x) := \int_{\varphi(x)}^b f(x_0, x) dx_0 = \int_{\varphi(x)}^{\infty} f(x_0, x) dx_0$$

en posant $x_0 = t + \varphi(x)$, $t \geq 0$. Le jacobien du difféomorphisme $(t, x) \mapsto (t + \varphi(x), x)$ étant 1, on a $I(x) = \int_0^{\infty} f(t + \varphi(x), x) dt$. En intervertissant dérivée et intégrale (ce qui est licite), on a

$$\begin{aligned} \partial_j I(x) &= \int_0^{\infty} \partial_j (f(t + \varphi(x), x)) dt \\ &= \partial_j \varphi(x) \int_0^{\infty} \partial_t (f(t + \varphi(x), x)) dt + \int_0^{\infty} \partial_j (f(t + \varphi(x), x)) dt \\ &= -\partial_j \varphi(x) f(\varphi(x), x) + \int_0^{\infty} \partial_j (f(t + \varphi(x), x)) dt \\ &= -\partial_j \varphi(x) f(\varphi(x), x) + \int_{\varphi(x)}^b \partial_j f(x_0, x) dx_0 \end{aligned}$$



On applique sans plus de précision Fubini-Tonelli (licite ici, vérifiez !).
On calcule donc $\int_{\Omega} \partial_j X_j dv$, $i \geq 0$. Pour $j = 0$, on a simplement

$$\int_{\Omega} \partial_0 X_0(x_0, x) dv = \int_{\prod_{i \geq 1}]a_i, b_i[\left[\int_{\varphi(x)}^b \partial_0 X_0(x_0, x) dx_0 \right] dx$$

$$X_0(\underline{b}, x) = 0 \int_{\prod_{i \geq 1}]a_i, b_i[\left[-X_0(\varphi(x), x) \right] dx$$

et pour $j \geq 1$

$$\int_{\Omega} \partial_j X_j(x_0, x) dv \stackrel{(19)}{=} \int_{\prod_{i \geq 1}]a_i, b_i[\partial_j \varphi(x) X_j(\varphi(x), x) dx$$

$$+ \int_{\prod_{i \geq 1}]a_i, b_i[\left[\partial_j \int_{\varphi(x)}^b X_j(x_0, x) dx_0 \right] dx$$

Posons $a(i, x) = (x_1, \dots, \overset{i}{a}_i, x_n)$, $b(i, x) = (x_1, \dots, \overset{i}{b}_i, x_n)$. On a de même que plus haut Mais on a

$$\int_{a_j}^{b_j} \left[\partial_j \int_{\varphi(x)}^b X_j(x_0, x) dx_0 \right] dx_j = 0$$

car $\varphi(a(i, x)) = 0 = \varphi(b(i, x))$ de sorte que

$$\int_{\Omega} \partial_j X_j(x_0, x) dv = \int_{\prod_{i \geq 1}]a_i, b_i[\partial_j \varphi(x) X_j(\varphi(x), x) dx$$

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielle

Intégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

En sommant, on obtient

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(X) dv = \int_{\prod_{i \geq 1}]a_i, b_i[} (-1, \partial\varphi_1, (x) \cdots \partial\varphi_n(x)). X(x) dx = \int_{\partial\Omega} (N, X) d\sigma$$

d'après (14) et (17). ■

Sommaire

Rappels I :
Inversion locale

Rappels II : Arcs

Dans le plan

Dans l'espace

Sous-variétés

Modèles locaux

Tangentes

Extrema

Von Neumann

Surfaces dans
l'espace euclidien

Plan tangent

Courbure

Compléments en
dimension 1 et 2

Rappels III

Produit vectoriel

Partitions de l'unité

Mesure
superficielleIntégrale sur une
hypersurface

Formule de la co-aire

Formule de
Stokes

Énoncé

Preuve

Références

[AA], André Avez, *Calcul différentiel*, Masson, 1991.

[JMB], Jean-Michel Bony, *Cours d'analyse, Théorie des distributions et Analyse de Fourier*, Éditions de l'École polytechnique, 2001.

[CFG], Carolo Friderico Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, in *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores, Commentationes classis mathematicae*. Tom. VI., 1827 et en anglais <https://www.gutenberg.org/ebooks/36856>.

[MGGM] Mariano Giaquinta, Giuseppe Modica, *Mathematical Analysis, An Introduction to Functions of Several Variables*, Springer, 2009.

[JL] Jacques Lafontaine, *Introductions aux variétés différentielles*, EDP Sciences, 1998

[JM] John W. Milnor, *Topology from the differential view point*, University Press of Virginia, 1965.

[MDC], Manfredo P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.

[VP], Victor Puiseux, *Problème de Géométrie*, Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 65-69

[WR], Walter Rudin, *Real and Complex analysis*, McGraw-Hill, 1974.