Feuille de TD n° 10

Exercice 1. [Convergence vers la loi normale]

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de carrés intégrables, de loi symétrique : $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, et X_1 a même loi que $-X_1$. On pose $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2]$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{\sqrt{k}}$. Montrer que

$$\frac{S_n}{\sqrt{\ln n}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Exercice 2. [Produit de variables aléatoires.]

Soient $U_1, U_2, \dots$ une suite de variables aléatoires réelles de loi uniforme sur $[0;1]$. Soit α un réel, on pose

$$Y_n = (U_1 U_2 \dots U_n)^{\frac{\alpha}{n}}.$$

1. Étudier la convergence presque sûre de la suite $\ln(Y_n)$, puis de la suite (Y_n).
2. Montrer que la suite $(Y_n e^{\alpha})^{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi a une densité que l'on calculera.

Exercice 3. [Transformée de vecteurs gaussiens]

Soit $\rho \in [-1, 1]$. Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire gaussien d'espérance 0 et de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la loi du vecteur

$$W = (X + Y, X - Y)$$

et les lois des marginales $X + Y$ et $X - Y$.

Exercice 4. [Un couple qui n'est pas un vecteur...]

Soient X et Z deux variables aléatoires réelles indépendantes avec $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et Z de loi définie par $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}$. Soit $Y = ZX$.

1. Quelle est la loi de Y ?
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
3. Le vecteur (X, Y) est-il un vecteur gaussien ? X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 5. Soit (X, Y) un vecteur gaussien d'espérance $(1, 0)$ et de matrice de covariance

$$\Sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la loi de $W = 2 + 2X - Y$?
2. Soient Z et T deux variables indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que (X, Y) a même loi que $(1 + Z, Z + T)$.
3. Quelle est la loi de $(X - 1)^2 + (Y - X + 1)^2$?