

Ce document est constitué de trois problèmes : une étude sur **l'intégrale de WALLIS**

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta) d\theta$$

et deux applications. Premièrement, le calcul de **l'intégrale de GAUSS**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

et deuxièmement, la **formule de STIRLING**

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

PROBLÈME : INTÉGRALES DE WALLIS

On pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta) d\theta$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta) d\theta.$$

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}$. On réalise le changement de variable affine $\theta = \frac{\pi}{2} - t$. On a alors

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta) d\theta = \int_{\pi/2}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) (-1) dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$$

car $\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.

2. Calculer W_0, W_1 et W_2 .

Solution: On a $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}$. Ensuite,

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta = [\sin(\theta)]_0^{\pi/2} = 1.$$

Enfin,

$$W_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

3. Montrer que $(W_n)_n$ décroît et est positive.

Solution: Soit $\theta \in [0, \pi/2]$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $0 \leq \cos(\theta) \leq 1$ et par positivité de $\cos^n(\theta)$, on a

$$0 \leq \cos^{n+1}(\theta) \leq \cos^n(\theta).$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$0 \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

La suite $(W_n)_n$ décroît donc bien et est positive.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $W_n > 0$.

Solution: C'est l'intégrale d'une fonction continue positive non identiquement nulle donc $W_n > 0$.

5. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(\theta) \cos(\theta) d\theta.$$

Puisque $\cos$ et $\cos^{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elles vérifient en particulier les hypothèses du théorème d'intégration par parties. On a donc, en dérivant $\cos^{n+1}$ et en intégrant $\cos$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(\theta) \cos(\theta) d\theta &= \underbrace{\left[\cos^{n+1}(\theta) \sin(\theta) \right]_0^{\pi/2}}_{=0-0=0} + \int_0^{\pi/2} (n+1) \sin^2(\theta) \cos^n(\theta) d\theta \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(\theta)) \cos^n(\theta) d\theta \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta) d\theta - (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(\theta) d\theta \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}. \end{aligned}$$

On en déduit que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

6. En déduire les valeurs de W_{2n} et W_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution: Soit $k \in \mathbb{N}$. Par la question 5, on a

$$(2k+2)W_{2k+2} = (2k+1)W_{2k}.$$

Par la question 4, $W_{2k} > 0$ donc

$$\frac{W_{2(k+1)}}{W_{2k}} = \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Par produit télescopique, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{W_{2n}}{W_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{W_{2(k+1)}}{W_{2k}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} 2(k+1)}.$$

Au numérateur, on a le produit des impairs de 0 à $2n - 1$. On a donc

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \frac{\prod_{k=1}^n (2k)}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Au dénominateur, par décalage d'indice, on retrouve le dénominateur précédent donc finalement,

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} W_0 \stackrel{Q2}{=} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

De même,

$$(2k+3)W_{2k+3} = (2k+2)W_{2k+1}$$

donne

$$\frac{W_{2n+1}}{W_1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{W_{2k+3}}{W_{2k+1}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+2}{2k+3} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+3)}.$$

Le numérateur est déjà calculé : il vaut, par décalage d'indice, $2^n n!$. Quant au dénominateur, il s'agit du produit des impairs de 3 à $2n+1$ donc de 1 à $2n+1$: en raisonnant comme précédemment, on en déduit que

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+3) = \prod_{k=0}^{n-1} (2k+3) \frac{\prod_{k=1}^n (2k)}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

Ainsi,

$$W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} W_1 \stackrel{Q2}{=} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Remarque 1.

- On aurait pu faire par récurrence en intuitant la formule générale.
- On exprime parfois ce résultat avec des coefficients binomiaux grâce à l'identité

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2}.$$

7. Montrer que $((n+1)W_{n+1}W_n)_n$ est une suite constante. Déterminer cette valeur.

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1}$$

par la question 5. Ainsi, $((n+1)W_{n+1}W_n)_n$ est constante, déterminée par son premier terme qui est, en vertu de 2, $W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$.

8. En déduire un encadrement de la suite $(nW_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ puis montrer que cette suite converge vers $\frac{\pi}{2}$.

Solution: Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Par 3, la suite $(W_n)_n$ décroît et est positive. Ainsi, $W_n \geq W_{n+1} \geq 0$ donc en multipliant par $(n+1)W_n \geq 0$, on a

$$(n+1)W_n^2 \geq (n+1)W_nW_{n+1} \stackrel{Q7}{=} \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que

$$nW_n^2 \geq \frac{\pi}{2} \frac{n}{n+1}.$$

De plus, en multipliant cette fois-ci par $(n+1)W_{n+1}$, on a

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)W_n W_{n+1} \geq (n+1)W_{n+1}^2.$$

Ceci étant vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$\frac{\pi}{2} \geq nW_n^2$$

pour $n \in \mathbb{N}$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\pi}{2} \frac{n}{n+1} \leq nW_n^2 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que la suite $(nW_n^2)_n$ converge et

$$nW_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

9. Dans la suite, x est dans $]0, 1[$.

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n W_k x^k = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos(\theta)} d\theta - R_n$$

avec $R_n := \int_0^{\pi/2} \frac{(x \cos(\theta))^{n+1}}{1 - x \cos(\theta)} d\theta$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^n W_k x^k = \sum_{k=0}^n \int_0^{\pi/2} \cos^k(\theta) d\theta x^k.$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\sum_{k=0}^n W_k x^k = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^n (\cos(\theta)x)^k d\theta.$$

Pour $x \in]0, 1[$, $\cos(\theta)x \in]-1, 1[$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ donc $\cos(\theta)x \neq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n (\cos(\theta)x)^k = \frac{1 - (\cos(\theta)x)^{n+1}}{1 - \cos(\theta)x}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n W_k x^k = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos(\theta)} d\theta - \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{(x \cos(\theta))^{n+1}}{1 - x \cos(\theta)} d\theta}_{=R_n}.$$

(b) Montrer que $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n W_k x^k$.

Solution: On a

$$0 \leq |R_n| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{|x|^{n+1}}{|1 - x \cos(\theta)|} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} \frac{|x|^{n+1}}{K} d\theta = \frac{\pi}{2K} |x|^{n+1},$$

en utilisant successivement $|\cos^{n+1} \theta| \leq 1$ et je peux trouver un K tel que $|1 - x \cos(\theta)| \geq K$ pour tout $\theta \in [0, \pi/2[$: par exemple, je peux prendre $|1 - x|$. Par théorème d'encadrement, R_n tend vers 0. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n W_k x^k = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos(\theta)} d\theta.$$

(c) (Question de cours) Soit θ un réel et $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Montrer que

$$\cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} ; \sin(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2} ; \tan(\theta) = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Solution: C'est du cours !

(d) A l'aide du théorème de changement de variables, montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos(\theta)} d\theta = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

Solution: On fait le changement de variable $u = \tan(\theta/2)$ et $d\theta = \frac{2}{1+u^2} du$. En utilisant

$$\cos(\theta) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \text{ on a}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos(\theta)} d\theta = \int_0^1 \frac{1}{1 - x \frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{2du}{1 + u^2 - x(1 - u^2)} = 2 \int_0^1 \frac{du}{\frac{1+x}{1-x} u^2 + 1} \frac{1}{1-x}.$$

On réalise le changement de variable $\zeta = u \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - x \cos(\theta)} &= \frac{2}{1-x} \int_0^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\zeta^2 + 1} d\zeta \\ &= \frac{2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \int_0^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right). \end{aligned}$$

PROBLÈME : INTÉGRALES DE GAUSS

Ce problème utilise un résultat sur l'intégrale de Wallis ! Il s'agit de la limite trouvée en question 8.

L'objectif de ce problème est d'établir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\pi/2}.$$

On définit alors

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \end{aligned}$$

1. (Question de cours). Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.

Solution: C'est du cours !

2. Montrer que F est croissante.

Solution: Soit $x, y \in \mathbb{R}, x \geq y$. Par la relation de Chasles puis par positivité de l'intégrale,

$$F(y) - F(x) = \int_x^y e^{-t^2/2} dt \geq 0$$

donc F est bien croissante.

3. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$. En déduire que F converge en $+\infty$. On note C cette limite.

Solution: Puisque $\forall x \geq 0, e^x \geq 1+x \geq 1$, par décroissance de la fonction inverse sur $[1, +\infty[$, on a

$$\forall x \geq 0, e^{-x} = \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{1+x}.$$

Ainsi, pour tout $t \geq 0$, on a

$$e^{-t^2/2} \leq \frac{1}{1+t^2/2} = \frac{1/\sqrt{2}}{1+t^2/2} \sqrt{2}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt \leq \sqrt{2} \int_0^x \frac{1/\sqrt{2}}{1+t^2/2} dt = \sqrt{2} \arctan(x/\sqrt{2}) \leq \sqrt{2} \frac{\pi}{2}$$

puisque $\arctan$ est une fonction croissante qui tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$. On en déduit que F est majorée. Étant croissante, F converge en $+\infty$.

4. Justifier pourquoi $(F(\sqrt{n}))_n$ converge et donner sa limite.

Solution: Puisque $\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et que F est définie sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que $(F(\sqrt{n}))_n$ converge, et ce, vers C .

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que

$$W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(\theta))^{n/2} \sin'(\theta) d\theta = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{n/2} dt.$$

Solution: On écrit

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \cos^n(\theta) d\theta \\ &\stackrel{*}{=} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) (\sqrt{1 - \sin^2(\theta)})^n d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(\theta))^{n/2} \cos(\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(\theta))^{n/2} \sin'(\theta) d\theta \end{aligned}$$

et on justifie $*$ car $\cos$ et $\sin$ sont positives sur $[0, \pi/2]$ donc l'égalité $\cos^2 + \sin^2 = 1$ entraîne $\sin = \sqrt{1 - \cos^2}$. On fait le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$.

$$W_{n+1} = \int_0^1 (1 - t^2)^{n/2} dt.$$

Pour conclure, réalisons le changement de variable affine $u = t\sqrt{n}$. Alors $du = \sqrt{n}dt$ donc

$$W_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^{n/2} du.$$

(b) Montrer que

$$F(\sqrt{n}) \geq \sqrt{n}W_{n+1}.$$

En déduire que $C \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Solution: Il s'agit donc, en vertu de 5a, de montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2/2} dt \geq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{n/2} dt.$$

Fixons $t \in [0, \sqrt{n}]$. On rappelle alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x.$$

Ainsi,

$$e^{-t^2/n} \geq 1 - \frac{t^2}{n}$$

donc en élevant cette inégalité à la puissance $n/2$ (possible car $t \in [0, \sqrt{n}]$ entraîne que $1 - t^2/n \geq 0$), on obtient

$$e^{-t^2/2} \geq \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{n/2}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc, grâce à 5a,

$$F(\sqrt{n}) \geq \sqrt{n}W_{n+1}.$$

Or,

$$\sqrt{n}W_{n+1} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1} \underbrace{\sqrt{n+1}W_{n+1}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\frac{\pi}{2} \text{ (Q8 sur Wallis)}}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Comme $(F(\sqrt{n}))_n$ converge, par passage à la limite, on en déduit $C \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $V_n = \int_0^{\pi/4} \cos^n(\theta) d\theta$ et $A_n = W_n - V_n$.

(a) Justifier pourquoi $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq V_n \leq W_n$.

Solution: Puisque $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, on a $W_n - V_n = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^n(\theta) d\theta > 0$.

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, V_{n-2} = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{1 + \tan^2(\theta)} \right)^{n/2} \tan'(\theta) d\theta = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{n}} \right)^{n/2} dt.$$

Solution: Déjà, pour tout $\theta \in [0, \pi/4]$, on a $1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$ donc $\cos^2(\theta) = \frac{1}{1 + \tan^2(\theta)}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on a

$$\left(\frac{1}{1 + \tan^2(\theta)} \right)^{n/2} \tan'(\theta) = (\cos^2(\theta))^{n/2} (1 + \tan^2(\theta)) = \cos^n(\theta) \frac{1}{\cos^2(\theta)} = \cos^{n-2}(\theta).$$

Ainsi, on a bien

$$V_{n-2} = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{1 + \tan^2(\theta)} \right)^{n/2} \tan'(\theta) d\theta.$$

Ensuite, on utilise encore le théorème de changement de variable pour avoir

$$V_{n-2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + t^2} \right)^{n/2} dt.$$

On conclut en faisant le changement de variable affine $u = t\sqrt{n}$. Alors $du = \sqrt{n}dt$ donc

$$V_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{n}} \right)^{n/2} dt.$$

(c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, F(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}V_{n-2}.$$

En déduire que $C \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Solution: Il s'agit donc, en vertu de 6b, de montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2/2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{n}} \right)^{n/2} dt$$

pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. On a montré à la question 3 que

$$\forall x \geq 0, e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}.$$

On applique ce résultat pour $x = \frac{t^2}{n} \geq 0$ avec $t \geq 0$. On a donc

$$0 \leq e^{-t^2/n} \leq \frac{1}{1 + t^2/n}$$

puis en mettant à la puissance $n/2$, on obtient

$$e^{-t^2/2} \leq \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{n}} \right)^{n/2}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc, grâce à 6b,

$$F(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} V_{n-2} \leq \sqrt{n} W_{n-2}$$

avec la question 6a. Or,

$$\sqrt{n} W_{n-2} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-2}}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1} \underbrace{\sqrt{n-2} W_{n-2}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2} \text{ (Q8 sur Wallis)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Comme $(F(\sqrt{n}))_n$ converge, par passage à la limite, on en déduit $C \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

7. Conclure.

Solution: Par la question 5b et 6c, on obtient $C = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

PROBLÈME : FORMULE DE STIRLING

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_n définie par

$$u_n = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{n!}.$$

Remarque 2. On peut faire l'exercice avec $v_n = \frac{1}{u_n}$ en guise d'entraînement.

1. Déterminer un équivalent simple de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1} e^n \sqrt{n+1} n!}{(n+1)! n^n e^{n+1} \sqrt{n}} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{e} (n+1) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) + n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -1 + 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{n^3} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note ℓ la limite. En déduire un équivalent en fonction de ℓ de $n!$.

Solution: Par le critère de Riemann, la série des $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge. Or, pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sum_{n=1}^N (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)),$$

donc c'est une série télescopique. Puisque la série converge, on a la convergence de $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Par continuité de $\exp$ sur $\mathbb{R}$, on a la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, vers une limite strictement positive. Ainsi,

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell,$$

donc

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

3. Avec l'étude des intégrales de Wallis, montrer que $\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Solution: Par la proposition sur les intégrales de Wallis, on a l'équivalent

$$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$

Simplifions le membre de gauche par l'équivalent que nous venons de trouver. On a

$$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{\ell} (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}}{\frac{1}{\ell}^2 2^{2n} n^{2n} e^{-2n} n} \frac{\pi}{2} = \frac{\ell \pi \sqrt{2}}{2\sqrt{n}}.$$

Ainsi, $\sqrt{2n}I_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $\sqrt{2n}I_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell\pi$ par l'équivalent précédent. Par unicité de la limite,

$$\ell\pi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ainsi, $\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et on a bien

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$