Critère de nilpotence par la trace

Thomas CHEN

On présente ici un exercice classique : un critère de nilpotence par la trace.

Exercice 1. Soit A, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}, \operatorname{tr}(A^n) = 0$. (On pourra redémontrer pourquoi une matrice A est semblable à une matrice triangulaire stricte).

Corrigé : Il existe plusieurs preuves qui montrent qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire stricte. En voilà une qui ne met pas en jeu la structure de $\mathbb{C}$. Mettons que l'indice de nilpotence de A soit p. Soit $x_0 \notin \ker(u^{p-1})$, possible car $u^{p-1} \neq 0$. Alors $(x_0, u(x_0), \cdots, u^{p-1}(x_0))$ est libre. En effet, soit $\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0.$$

Soit $A = \{k \in [\![0, p-1]\!] : \lambda_k \neq 0\}$. Supposons que A est non vide. Étant alors une partie non vide de $\mathbb{N}$, A admet un plus petit élément k_0. Alors soit $k_0 = 0$, soit $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{k_0-1} = 0$. Dans les deux cas, en composant par u^{p-k_0-1}, on a

$$0 = u^{p-k_0-1}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0)\right) = \sum_{k=k_0}^{p-1} \lambda_k u^{p-k_0-1+k}(x_0) = \lambda_{k_0} u^{p-1}(x_0) + 0 + \cdots + 0.$$

Comme $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, on a λ_{k_0} donc $\lambda_{k_0} \notin A$: absurde. Ainsi, A est vide. Maintenant, pour avoir une base, puisque $u^{p-1}(x_0)$ est un vecteur non nul du noyau, on le complète en une base du noyau. La concaténation entre cette base et les $(x_0, \cdots, u^{p-2}(x_0))$ forme clairement une base de E. La représentation matricielle en découle.

Maintenant, si A est nilpotente, elle est semblable à une matrice triangulaire stricte. Les traces tombent d'elles-même. A est trigonalisable par d'Alembert-Gauss : soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_r$. A est alors semblable à une matrice triangulaire de diagonale $(0, \cdots, 0, \lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_r, \cdots, \lambda_r)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ – a priori, il se peut qu'il n'y ait pas de 0 –. Alors A^k est semblable à une matrice triangulaire de diagonale $(0, \cdots, 0, \lambda_1^k, \cdots, \lambda_1^k, \cdots, \lambda_r^k, \cdots, \lambda_r^k)$. Par hypothèse, on a donc

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i = 0 \ ; \ \cdots \ ; \ \operatorname{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i^k \ ; \ \cdots .$$

Cela se traduit en le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 m_1 & + & \lambda_2 m_2 & + & \cdots & + & \lambda_r m_r & = & 0 \\ \lambda_1^2 m_1 & + & \lambda_2^2 m_2 & + & \cdots & + & \lambda_r^2 m_r & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & & + & \vdots & = & \vdots \\ \lambda_1^r m_1 & + & \lambda_2^r m_2 & + & \cdots & + & \lambda_r^r m_r & = & 0 \end{array}\right.$$

et matriciellement en

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = 0$$

Tous les $\lambda_i, 1 \leq i \leq r$ sont non nuls donc

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} = V(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \prod_{i=1}^{r} \lambda_i = \prod_{1 \leq p < q \leq r} (\lambda_q - \lambda_p) \prod_{i=1}^{r} \lambda_i \neq 0.$$

Ainsi, on a $(m_1, \cdots, m_r) = 0$ ce qui n'est pas. Ainsi, si ce n'est 0, A n'a pas de valeur propre. Donc A est semblable à une matrice triangulaire stricte : A est nilpotente.