

Distance à un fermé

Thomas CHEN

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E . Pour tout $x \in E$, on définit la distance de x à A , notée $d(x, A)$ comme étant

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

Existe-t-il $a \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - a\|$? La réponse est positive lorsque A est un fermé de dimension finie.

Exercice 1. Soit E , un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit F , un fermé non vide de E . Montrer que $d(x, F) := \inf_{y \in F} \|x - y\|$ est atteinte. Même question mais E est supposé de dimension infinie et F , un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Corrigé : On rappelle qu'un espace de dimension finie est fermé (rappelé en ??). Il faut savoir le démontrer !). Soit $a \in F$. Notons $d = \|x - a\|$.

Soit $K = F \cap B_f(x, d) = \{y \in F : \|x - y\| \leq d\}$. K est inclus dans $B_f(x, d)$ donc K est borné. Par ailleurs, F et $B_f(x, d)$ sont fermés donc K est fermé en tant qu'intersection de fermé. Ainsi, K est un ensemble fermé borné de F qui est de dimension finie : c'est donc un compact.

L'application $y \mapsto \|y - x\|$ est continue sur K donc atteint son minimum en $c \in K$ par le théorème des bornes atteintes. Ainsi, $\forall y \in K, \|x - y\| \geq \|x - c\|$.

Par ailleurs, $\forall y \in F \setminus K, \|x - y\| > d \geq \|x - c\|$.

Ainsi, par disjonction de cas, pour tout $y \in F, \|x - y\| \geq \|x - c\|$. L'inégalité passe donc à l'infimum en $d(x, F) \geq \|x - c\|$. Puisque $c \in F$, nécessairement $\|x - c\| \geq d(x, F)$ donc par double inégalité, $d(x, F) = \|x - c\|$: la distance est atteinte.