Distance à un fermé

Thomas CHEN

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E. Pour tout $x \in E$, on définit la distance de x à A, notée $d(x, A)$ comme étant

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

Existe-t-il $a \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - a\|$? La réponse est positive lorsque A est un fermé de dimension finie.

Exercice 1. Soit E, un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit F, un fermé non vide de E. Montrer que $d(x, F) := \inf_{y \in F} \|x - y\|$ est atteinte. Même question mais E est supposé de dimension infinie et F, un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Corrigé : On rappelle qu'un espace de dimension finie est fermé (rappelé en **??**. Il faut savoir le démontrer !). Soit $a \in F, d = \|x - a\|$. Soit $K = F \cap B_f(x, d) = \{y \in F : \|x - y\| \leq d\}$. K est inclus dans un fermé, et K est fermé borné. Ainsi, K est compact (dans K) car F est de dimension finie . L'application $y \mapsto \|y - x\|$ est continue sur K donc atteint son minimum en $c \in K$ par le théorème des bornes atteintes. Ainsi, $\forall y \in K, \|x - y\| \leq \|x - c\|$ donc $\|x - c\| \leq d$. Par ailleurs, $\forall y \in F \backslash K, \|x - y\| > d \geq \|x - c\|$. Ainsi, $d(x, F) \geq \|x - c\|$ mais puisque $c \in F$, on a égalité.