

Test 1 – 6 Décembre 2024 (Saint-Nicolas !)**A lire attentivement :**

- Documents, calculatrice non autorisés.
- Téléphones rangés dans les sacs.
- Justifier les résultats de façon concise.

1. Soit un vecteur (X, Y) à densité, de densité sur \mathbb{R}^2 donnée par

$$C1_{|x|+|y|\leq 1}$$

- (a) Calculer ¹ C pour que l'expression précédente définisse une densité.
 - (b) Dessiner l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$ puis représenter sur le même dessin le support de la loi de (X, Y) .
 - (c) Quelle est la loi marginale de X ? de Y ?
 - (d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
 - (e) Calculer $\mathbb{E}[XY]$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi respective $\text{Exp}(a)$ et $\text{Exp}(b)$ pour $a, b > 0$.
- (a) Calculer la densité de $X + Y$. On distinguera les cas $a \neq b$ et $a = b$.
 - (b) Donner dans chaque cas un équivalent de la densité de $X + Y$ en $+\infty$.

1. on pourra faire les calculs dans cet exercice en s'aidant de raisonnements géométriques