Lemme d'inversibilité d'Hadamard et disque de Gerschgorin

Thomas CHEN

Les disques de Gerschgorin donnent un résultat qui permet de localiser les valeurs propres. Si la matrice est à diagonale dominante, on en déduit rapidement que 0 ne peut être valeur propre ce qui entraîne l'inversibilité de la matrice (lemme d'inversibilité d'Hadamard). Il se trouve que ces deux énoncés sont équivalents.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle i-ème disque de Gerschgorin de A l'ensemble $D_i = D(a_{ii}, R_i)$ avec $R_i = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$.

1. Montrer le théorème de Gerschgorin : toute valeur propre est dans un disque de Gerschgorin.
2. En déduire le lemme d'Hadamard :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{ij}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \Longrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$
(on dit que A est à diagonale strictement dominante).
3. En déduire que si A est de diagonale dominante, alors $|\det(A)| \geq \prod_{i=1}^{n} (|a_{ii}| - R_i)$. Montrer que si A est de plus réelle à diagonale positive, alors $\det(A)$ est de plus strictement positif (on utilisera un argument de convexité).

Corrigé

1. Soit λ, une valeur propre de A. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$, vecteur propre associée. Alors $AX - \lambda X = 0$. Considérons i, l'indice de $[\![1, n]\!]$ pour que $|x_i|$ soit maximal. Alors
$$(AX - \lambda X)_i = 0.$$
De fait,
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k - \lambda x_k = 0.$$
De fait,
$$(a_{ii} - \lambda)x_i = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} a_{ik}x_k.$$
Ainsi,
$$|a_{ii} - \lambda| = \left| \sum_{k=1, k\neq i}^{n} a_{ik} \frac{x_k}{|x_i|} \right| \leq \sum_{k\neq i} |a_{ik}| \underbrace{\frac{|x_k|}{|x_i|}}_{\leq 1} \leq R_i.$$
Donc $\lambda \in D(a_{ii}, R_i)$.
2. Raisonnons par contraposée. Supposons que A ne soit pas inversible. Alors 0 est valeur propre de A. De fait, par le théorème de Gerschgorin, il existe un indice $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$. Ainsi, A n'est pas à diagonale dominante.

   Continuons. Soit A' la matrice obtenue en mutlipliant la i-ème ligne de A par $\dfrac{1}{|a_{ii}| - R_i}$ pour $1 \leq i \leq n$. C'est possible puisque A est à diagonale dominante. Par n-linéarité du déterminant, on a
$$\det(A) = \det(A') \prod_{i=1}^{n} (|a_{ii}| - R_i).$$
Montrons donc que $|\det(A')| \geq 1$. On note $A' = (a'_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et R'_i rayon de Gerschgörin associé à A pour $1 \leq i \leq n$. On a, en mettant au même dénominateur,
$$|a'_{ii}| - R'_i = |a'_{ii}| - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a'_{ij}| \underset{\star}{=} \frac{|a_{ii}| - R_i}{||a_{ii}| - R_i|} = 1$$
et on a $\star$ car A est à diagonale dominante. Par les disques de Gerschgörin, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A')$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda - a'_{ii}| \leq R'_i$ donc par la seconde inégalité triangulaire,
$$R'_i \geq |\lambda - a'_{ii}| \geq |a'_{ii}| - |\lambda|.$$
Par l'inégalité précédente, on en déduit que $|\lambda| \geq 1$. Puisque A' est trigonalisable, le module de son déterminant est le produit des modules des valeurs propres donc $|\det(A')| \geq 1$.

   Pour le cas réel, utilisons un argument de convexité. Soit
$$C = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \forall 1 \leq i \leq n, a_{ii} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}.$$
Il s'agit de montrer que C est convexe et par continuité du déterminant, puisque I_n est dans C, on aura le résultat. Soit donc $A, B \in C$ et $t \in [0, 1]$. Alors $tA + (1 - t)B$ est bien réelle. De plus, par inégalité triangulaire,
$$\sum_{j\neq i} |t[A]_{ij} + (1-t)[B]_{ij}| \leq \sum_{j\neq i} (t\,|[A]_{ij}| + (1-t)\,|[B]_{ij}|) = t \sum_{j\neq i} |[A]_{ij}| + (1-t) \sum_{j\neq i} |[B]_{ij}| < ta_{ii} + (1-t)b_{ii}$$
donc $tA + (1 - t)B$ est dans C donc C est convexe. Par continuité du déterminant, $\det(C)$ est donc un convexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle mais par le lemme d'Hadamard, cet intervalle ne contient pas 0 : cet intervalle est donc dans $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ mais ce dernier cas est à exclure puisque $I_n \in C$ et $\det(I_n) = 1 > 0$.