Théorèmes de Szegő pour les matrices de Toeplitz

CHEN Thomas, FROISSART Tom

26 mars 2024

1. Théorème de Szegő
   - Historique et motivation
   - Enoncé et premier ordre
   - Lumière sur le deuxième ordre
2. Equation de Schrödinger discrétisée
   - Motivation, première heuristique
   - Méthode WKB
   - Estimées d'Agmon discrètes
3. Conclusion

- En 1915, Szegő démontre son premier théorème limite.
- En 1952, Szegő démontre son second théorème limite.
- En 1953, Kac propose une preuve via un argument combinatoire : l'identité de Dyson-Hunt.
- En 1996, Guillemin et Okikiolu propose entre autres une deuxième preuve.
- En 1998, Johansson exploite le théorème de Szegő en le liant à l'étude de valeurs propres d'une matrice unitaire aléatoire.

Matrice de Toeplitz

Notation

On note $e_k : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{ikt}$. Alors pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2([0, 2\pi])$, on note $\forall k \in \mathbb{Z}, c_k(f) := \widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e_{-k}(t)\mathrm{d}t$.

Définition

Soit $a \in \mathrm{L}^2([0, 2\pi])$. Notons $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, la suite des coefficients de Fourier de a. Soit $N \in \mathbb{N}$. On définit la matrice $T_N(a)$ comme étant

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & \cdots & a_{-N} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & & \vdots \\ \vdots & a_1 & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{-1} \\ a_N & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Matrice de Toeplitz

On note

$$\begin{array}{rccc} \Pi_N : & \mathrm{L}^2([0,2\pi]) & \to & \mathrm{L}^2([0,2\pi]) \\ & f = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e_n & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \widehat{f}(n) e_n \end{array}.$$

C'est une projection. On constate alors que $\Pi_N a \Pi_n = T_N(a)$.

Observation

Pour toute fonction $a \in \mathrm{L}^2([0,2\pi])$, a s'écrit

$$a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k.$$

Si l'on se place dans le cadre des matrices infinies, il est possible de construire une matrice dont les coefficients en (i,j) vaut a_{i-j}. La matrice $T_N(a)$ est alors la troncature de cette matrice infinie pour $0 \leq i,j \leq N$.

Enoncé du théorème de Szegő

Soit $a : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction $L^2([0, 2\pi])$ paire. On suppose que $\|a\|_\infty < 1$ et $\sum_{\ell \in \mathbb{Z}^*} |a_\ell||\ell| < +\infty$. Alors

$$\log \det(I_{N+1} + T_N(a)) \underset{N\to\infty}{=} (N+1)c_0(\log(1+a)) + \sum_{n=0}^{\infty} n\|c_n(\log(1+a))\|^2 + o(1).$$

Premier ordre

$$\log\det(I_N + T_N(a)) = \mathrm{tr}(\log(I_N + \Pi_N a \Pi_N)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \mathrm{tr}((\Pi_N a \Pi_N)^n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \mathrm{tr}(\Pi_N a^n \Pi_N) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \underbrace{\mathrm{tr}((\Pi_N a \Pi_N)^n - \Pi_N a^n \Pi_N)}_{=: t_{n,N}}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{N+1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t_{n,N}$$

$$= \frac{N+1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t_{n,N} \qquad \text{car } \|a\|_\infty < 1$$

$$= (N+1) c_0(\log(1+a)) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t_{n,N}.$$

On peut déjà dire que $|t_{n,N}| \leq n \|a\|_\infty^{n-1} \|[a, \Pi_N]\|_{\mathfrak{S}_1} \leq \|a\|_\infty^{n-1} \sum |a_\ell||\ell|$

Lumière sur le deuxième ordre

Théorème

$$\operatorname{tr}((\Pi_N a \Pi_N)^n - \Pi_N a^n \Pi_N) \xrightarrow[N \to +\infty]{} -2 \underbrace{\sum_{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_n=0} w_n(0, \ell_1, \cdots, \ell_n) \prod_{i=1}^{n} a_{\ell_i}}_{=:S}$$

où

$$w_n(0, \ell_1, \cdots, \ell_n) = \max \left\{ \sum_{i=1}^{k} \ell_i : k \in [\![0, n]\!] \right\}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}((\Pi_N a \Pi_N)^n) &= \sum_{j_1,\dots,j_n\in\mathbb{Z}} \psi(j_1)\dots\psi(j_1+\cdots+j_n) a_{j_2}\dots a_{j_n} a_{j_2+\cdots+j_n} \\ &= \sum_{j_2\dots j_n\in\mathbb{Z}} a_{j_2}\dots a_{j_n} a_{j_2+\cdots+j_n} \sum_{j_1\in\mathbb{Z}} \psi(j_1)\dots\psi(j_1+\cdots+j_n)\end{aligned}$$

où $\psi = 1_{[\![0,N]\!]}$.
On sait de plus que

$$\mathrm{tr}(\Pi_N a^n \Pi_N) = (N+1) \sum_{j_1\dots j_{n-1}\in\mathbb{Z}} a_{j_1}\dots a_{j_{n-1}} a_{j_1+\cdots+j_{n-1}}.$$

Calcul de S

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_n=0} w_n(0,\ell_1,\cdots,\ell_n)\prod_{i=1}^{n} a_{\ell_i} \\
&= \sum_{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_n=0} \sum_{k=1}^{n} \left(w_k(0,\ell_1,\cdots,\ell_k) - w_k(0,\ell_1,\cdots,\ell_{k-1})\right)\prod_{i=1}^{n} a_{\ell_i} \\
&= \sum_{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_n=0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \ell_i \mathbb{1}\left(\sum_{i=1}^{k}\ell_i > 0\right)\prod_{i=1}^{n} a_{\ell_i} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{j}{k} \sum_{\substack{\ell_1+\cdots+\ell_k=j \\ q_1+\cdots+q_{n-k}=-j}} \prod_{i=1}^{k} a_{\ell_i}\prod_{i=1}^{n-k} a_{q_i} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{j}{k} c_j(a^k)c_{-j}(a^{n-k}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k(n-k)}c_{-j}(a^k)c_j(a^{n-k}).
\end{aligned}$$

Schrödinger discrétisée

- Le théorème de Szegő donne une asymptotique de $\log\det(I_N + T_N(a)) = \log\det((\delta_{ij} + (\phi_i|a\phi_j))_{1\leq i,j\leq N})$.
- ϕ_i fonction propre du laplacien.
- Que se passe-t-il si on change d'opérateur différentiel ?
- Opérateur de Schrödinger $-N^{-2}\Delta + V$.

L'étude du cas discret est motivée par les travaux de Deleporte-Lambert qui se sont occupés de traiter le cas continu.

Schrödinger discrétisée

Dans le cas continu, si u était solution de l'équation de Schrödinger, en faisant une discrétisation en espace de taille $\frac{1}{N}$, on a

$$u\left(\frac{n+1}{N}\right) - 2u\left(\frac{n}{N}\right) + u\left(\frac{n-1}{N}\right) = \frac{1}{N^2}u''\left(\frac{n}{N}\right) + O(N^{-3})$$

En posant $u_n = u\left(\frac{n}{N}\right)$, la suite $(u_n)_n$ satisfait l'équation $Hu = 0$ avec $Hu = -u_{n+1} + (2+V)u_n - u_{n-1}$. H est appelé opérateur de Schrödinger discret.

La suite de cette partie étudie l'opérateur de Schrödinger discret en dimension 1.

Premier exemple : V constant

Etude de l'équation

On étudie, à $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé,

$$u_{n+1} + (\lambda - V_0 - 2)u_n + u_{n-1} = 0.$$

et on cherche les solutions dans $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Comportements

En notant $\Delta = (\lambda - V_0 - 2)^2 - 4 = (\lambda - V_0)(\lambda - V_0 - 4)$,

1. $\Delta < 0$ – régime oscillatoire – : les solutions sont des sinusoïdes de la forme $\alpha \cos(\delta n) + \beta \sin(\delta n)$
2. $\Delta > 0$ – régime exponentiel – : les solutions sont des exponentielles de la forme $ar^n + br^{-n}$.
3. $\Delta = 0$ – régime critique – : les solutions sont de la forme $(\lambda n + \mu)(\pm 1)^n$.

Deuxième exemple : V constant par morceaux

Dans cet exemple, revenons un instant dans le cas continu. En une dimension, l'équation à résoudre est $y'' + N^2(\lambda - V)y = 0$. Les cas dépendent du signe de $\lambda - V$.

Deuxième exemple : V constant par morceaux

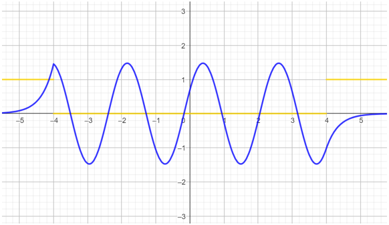

Figure – Solution mal raccordée

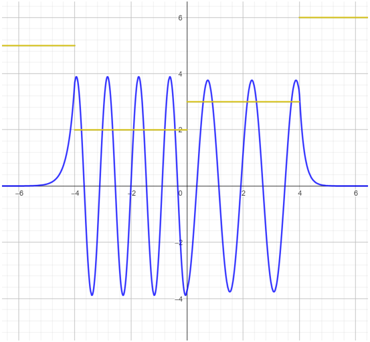

Figure – Solution raccordée

Objectifs

Nous allons donc nous intéresser à l'étude du comportement du cas $\Delta < 0$ – zone dite intérieure ou autorisée – (par méthode WKB), $\Delta \geq 0$ – zone dite extérieure ou non-autorisée – (via les estimées d'Agmon). Il resterait alors à étudier les problèmes de raccords.

Objectifs

On cherche une solution approchée de la forme

$$u_n = \exp\left(iN\phi\left(\frac{n}{N}\right)\right) a\left(\frac{n}{N}\right)$$

où $a\left(\frac{n}{N}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} N^{-k} a_k\left(\frac{n}{N}\right)$.
On va supposer que u vérifie $(H-\lambda)u = O(N^{-\infty})$ pour obtenir des conditions sur ϕ et a.

Résultats

Théorème

Soit V un potentiel C^∞. On pose $u_n = \exp\left(iN\phi(\frac{n}{N})\right) a\left(\frac{n}{N}\right)$ où ϕ est C^∞ et a est définie ci-dessus. On suppose que $(H-\lambda)u = O_{N\to+\infty}(N^{-\infty})$. Alors il existe une famille d'opérateurs $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{aligned}(H-\lambda)ue^{-iN\phi(\frac{\cdot}{N})} &= D_1(a_0,\phi) + \frac{1}{N}\left(D_1(a_1,\phi) + D_2(a_0,\phi)\right) \\ &\quad + \frac{1}{N^2}\left(D_1(a_2,\phi) + D_2(a_1,\phi) + D_3(a_0,\phi)\right) + \dots .\end{aligned}$$

Plus généralement, le terme d'ordre N^{-k} vaut $\sum_{i=0}^{k} D_{i+1}(a_{k-i},\phi)$.

$$D_1(a_0,\phi) = a_0\left(\frac{\cdot}{N}\right)\left(2 + V\left(\frac{\cdot}{N}\right) - \lambda - e^{i\phi'(\frac{\cdot}{N})} - e^{-i\phi'(\frac{\cdot}{N})}\right)$$

ce qui donne

$$\phi = \pm\int^t \arccos\left(\frac{2+V(\frac{\cdot}{N})-\lambda}{2}\right)$$

et

$$\begin{aligned} D_2(a_0,\phi) = &-e^{i\phi'(\frac{n}{N})}\left(ia_0\left(\frac{n}{N}\right)\phi^{(2)}\left(\frac{n}{N}\right) + a_0'\left(\frac{n}{N}\right)\right) \\ &- e^{-i\phi'(\frac{n}{N})}\left(ia_0\left(\frac{n}{N}\right)\phi^{(2)}\left(\frac{n}{N}\right) - a_0'\left(\frac{n}{N}\right)\right) \end{aligned}$$

donne une équation de transport qu'on sait résoudre. Déterminer les a_i donne une solution approchée à $O(N^{-k})$ près pour k donné.

Propagation de l'erreur

Question : si v est "presque solution" de $(H-\lambda)u = 0$ alors à quel point v est-elle proche d'une solution exacte ?

Proposition

Si v vérifie $(H-\lambda)v = O(N^{-k})$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et u vérifiant $(H-\lambda)u = 0$ alors $v - u = O(N^{-k-1})$ dans la zone intérieure.

Lemme

Soit u une solution de $(H-\lambda)u = 0$. Alors il existe une constante C telles que pour tout n dans la zone intérieure, on ait :

$$\left\| \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \right\| \leq C \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \right\|.$$

Preuve du lemme

L'équation $(H-\lambda)u=0$ se réécrit :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2+\lambda+V(\frac{n}{N}) \end{pmatrix}}_{A_{\alpha_n}} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

On cherche donc à contrôler $\left|\left|\left| \prod A_k \right|\right|\right|$.

Propagation de l'erreur

De façon plus générale, si $(H-\lambda)w=(r_n)$, on a le schéma suivant :

$$\begin{pmatrix} w_n \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} A_{\alpha_j} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{k=j}^{n-1} A_{\alpha_k} \right) r_j.$$

En sommant les erreurs, on peut perdre un ordre de précision.

Conclusion WKB

En résumé

On a montré que les solutions approchées dans la zone intérieure étaient de la forme

$$\exp\left(\pm iN\phi\left(\frac{n}{N}\right)\right) a\left(\frac{n}{N}\right).$$

Objectifs

Considérons u dans la zone non-autorisée. Soit $w = e^{N\varphi(\frac{n}{N})}u$. Peut-on trouver φ pour que $\|w\|_{\mathrm{L}^2} \leq C\|u\|_{\mathrm{L}^2}$?

On s'inspire alors du cas continu. On attends un résultat discret de

$$h^2 \int w\Delta w = \int e^{2\varphi/h}(V - \lambda - |\nabla\varphi|^2)u^2.$$

Analyse vectorielle discrète

Une différence notable

Soit $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Alors

$$\Delta(u_n v_n) = u_n \Delta v_n + 2\mathrm{div}(u_n)\mathrm{div}(v_n) + v_n \Delta u_n + \frac{1}{2}\Delta u_n \Delta v_n.$$

Alors que $\Delta fg = f\Delta g + 2\nabla f \nabla g + g\Delta f$, le dernier terme résiduel $\frac{1}{2}\Delta u_n \Delta v_n$ alourdit les estimées, comme le témoigne les résultats suivants :

Théorème

Soit φ de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Soit (u_n) solution $(\Delta - V + \lambda)u = 0$. Alors

$$\sum w_n \Delta w_n = \sum e^2 \left(a(V - \lambda) + L - C\right) u^2$$

avec

$$e = \exp\left(N\varphi\left(\frac{n}{N}\right)\right) \qquad X = \varphi'\left(\frac{n}{N}\right)$$

$$L = 2\left(\cosh\left(X\right)\right) - 1) + \frac{\varphi''(n/N)}{N}\cosh(X)) + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$a = \frac{L}{2} + 1 = \cosh\left(X\right)\left(1 + \frac{1}{2N}\varphi''\left(\frac{n}{N}\right)\right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$C = \sinh(2X)\sinh(X) + \frac{\varphi''(n/N)}{N}\left(\frac{3}{2}\sinh(2X)\sinh(X) + \cosh(2X)\cosh(X)\right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

Quelques pistes à explorer

- Exploiter le théorème précédent pour contrôler $\|w\|_{\ell^2}$ avec $\|u\|_{\ell^2}$. Le parallèle continu-discret des estimées semble convenir pour conclure.
- Comment gérer le recollement entre zone intérieure et extérieure ?
- Etudier d'autres opérateurs différentiels.
- Faire le lien avec les processus ponctuels déterminantaux.
- Quelles applications ?