Cours 3

Point fixe

1) Introduction
2) Algorithme du point fixe
3) Théorème du point fixe
4) Exercice : calcul numérique de π
5) Deux exercices corrigés

François Dubois, 18 octobre 2004, édition 03 août 2006, 10 pages.
Correction février 2008.

CNAM Paris

IACS (3) $\boxed{\text{Point fixe}}$

(1) Introduction

Dans ce chapitre, on cherche à résoudre numériquement des équations qui peuvent s'écrire sous la forme

(1) $f(x) = x$

où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- On remarque d'abord qu'une telle équation (1) peut se ramener sans difficulté à une équation telle que

(2) $g(x) = 0$.

Il suffit de poser $g(y) = y - f(y)$ pour y arbitraire dans $\mathbb{R}$.

- Mais le choix (2) n'est pas universel. Ainsi par exemple, si

(3) $g_1(x) \equiv x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$,

l'équation (2) peut être écrite de deux façons, l'une avec

(4) $f_1(x) = 1 - x^3$,

l'autre en regroupant d'abord $x^3 + x$:

$g_1(x) = x(x^2+1) - 1$ et $g_1(x) = 0$ équivaut à $x = \frac{1}{1+x^2}$, ce qui conduit à

(5) $f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

- L'exemple le plus simple consiste à choisir

(6) $f_3(x) = ax+1 \quad , x \in \mathbb{R}.$

Alors l'équation (1) a une solution unique lorsque $a \neq 1$, qui s'écrit simplement $x = \dfrac{1}{1-a}$.

- D'un point de vue géométrique, si $y = f(x)$ désigne la courbe d'équation $f(\cdot)$ dans le plan (x,y), l'équation (1) consiste à chercher le point $x \in \mathbb{R}$ (ou les points !) tel (tels) que $y = f(x)$ et $y = x$, c'est à dire l'intersection de la courbe "$y = f(x)$" avec la première bissectrice "$y = x$". Les trois exemples ci-dessus sont illustrés aux figures 1 à 4.

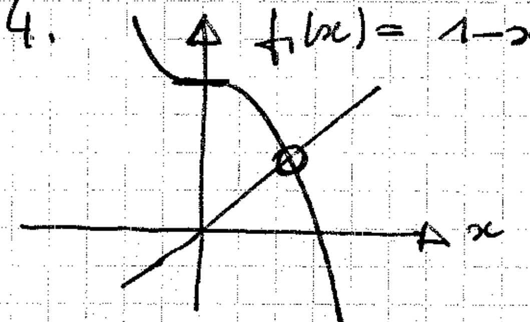


Figure 1

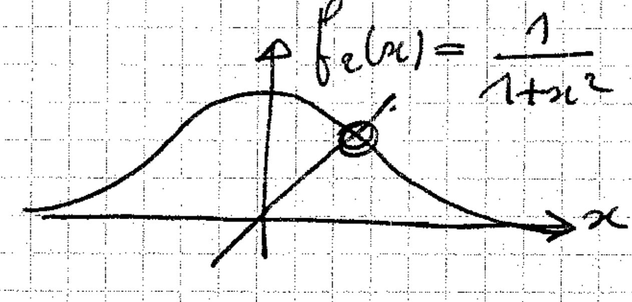


Figure 2

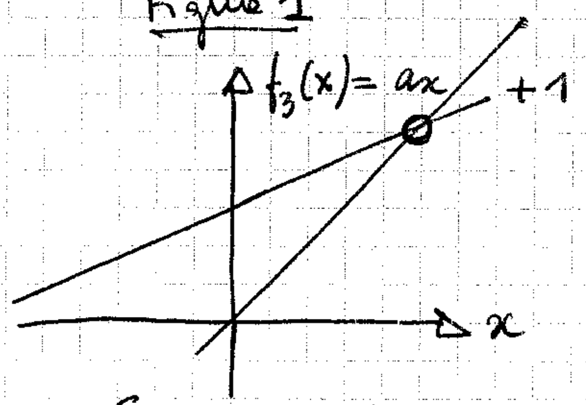


Figure 3, $a > 0$

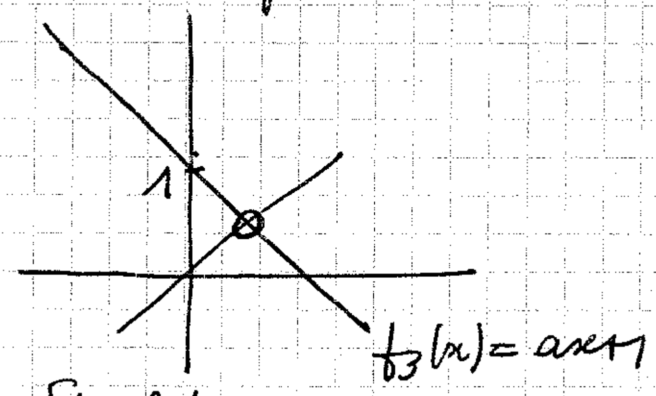


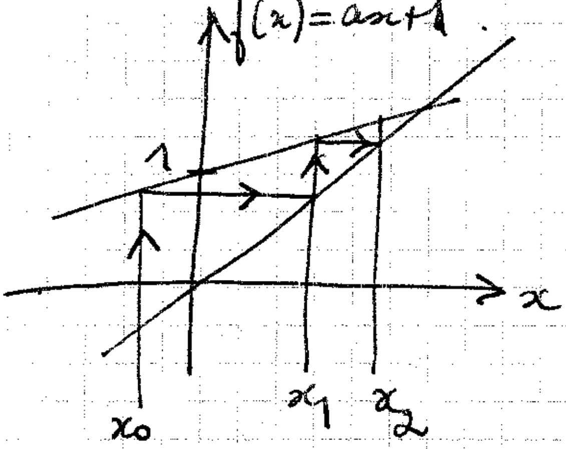
Figure 4, $a < 0$

② algorithme du point fixe

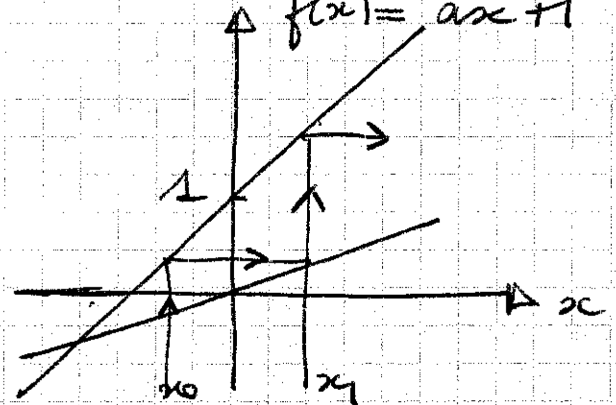
- L'algorithme du point fixe consiste à fixer d'abord $x_0 \in \mathbb{R}$ puis à considérer la suite récurrente $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$(7) \qquad x_{k+1} = f(x_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

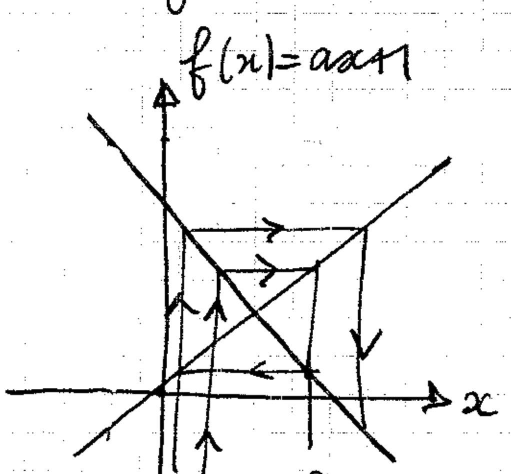
- on peut dessiner sans difficulté les itérés de l'algorithme (7) dans le cas très simple de la fonction affine définie en (6).



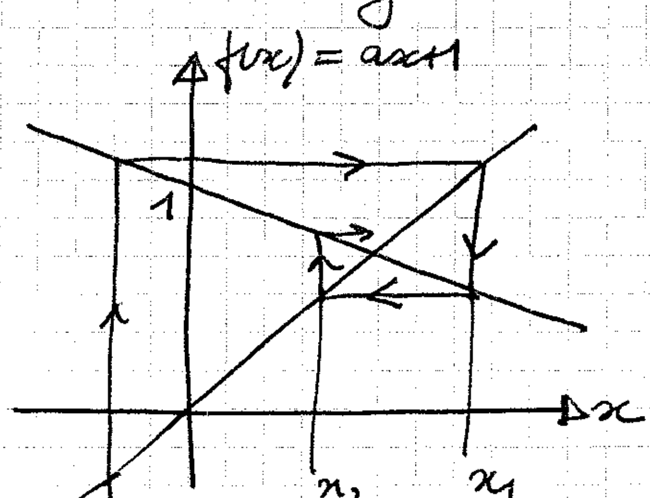
<u>Figure 5</u>, $0<a<1$
Convergence en <u>escalier</u>



<u>Figure 6</u>, $a>1$
Divergence



<u>Figure 7</u>. $a<-1$. Divergence



<u>Figure 8</u>, $-1<a\leq 0$. $\Big\{$ convergence en colimaçon.

On constate que l'algorithme (7) diverge si $|a|>1$ et converge si $|a|<1$. Il converge de manière monotone (la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante) si $0<a<1$ (figure 5 ; convergence en "escalier") et de manière non monotone (la suite x_k "saute" de part et d'autre du point "fixe" x_∞ tel que $f(x_\infty)=x_\infty$) si $-1<a<0$ (figure 8, convergence "en colimaçon").

- La programmation de l'algorithme du point fix est très facile. Elle consiste simplement à faire une boucle d'itération au sein de laquelle on écrit

$$x = f(x)\ .$$

Si x a été initialisé, et qu'on sait évaluer $f(y)$ pour toute valeur y de l'argument, on calcule $f(x)$ puis on reporte le résultat obtenu dans la "case mémoire" qui contenait x : on remplace de ce fait x par $f(x)$, ce qui revient à mettre successivement en mémoire les itérés x_0, $f(x_0)=x_1, \dots,$ $f(x_{k-1})=x_k$ de l'algorithme (7).

③ Théorème du point fixe

- Il s'agit de l'un des rares cas de figure où l'on sait conclure à l'existence et l'unicité de la solution d'une équation (ici l'équation (1)). Par contre les hypothèses sont contraignantes !

- Hypothèses
  - $*$ $a<b$ sont deux nombres réels
  - $*$ $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction à valeurs dans l'intervalle $[a,b]$. On a donc

(8) $\quad \forall x \in [a,b], \quad f(x) \in [a,b]$.

  - $*$ f est contractante : $\exists K,\ 0 \leq K < 1$ (avec K strictement inférieur à 1) tel que

(9) $\quad \forall (x,y) \in [a,b], \ |f(y) - f(x)| \leq K |y-x|$.

(donc $f(\cdot)$ est continue ; exercice pour le lecteur !)

- Conclusion
  - $*$ Il existe un $x \in [a,b]$ unique de sorte que (1) a lieu

- La preuve consiste simplement à itérer l'algorithme du point fixe (7) (itérations d'Emile Picard), et à remarquer que la suite obtenue converge, que la limite ℓ de cette suite vérifie l'équation (1). L'unicité résulte de (9) (exercice !)

F, 24/10/04.

Calcul numérique de π

IACS (3), 18/10/04

- Une méthode de calcul efficace pour calculer numériquement le nombre π consiste à utiliser la fonction arctg, fonction réciproque de la tangente qui prend ses valeurs dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a de manière précise

(1) $$y = \operatorname{arctg} x \iff \begin{cases} \operatorname{tg} y = x \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- La relation de Machin (1680–1752) consiste à calculer $\frac{\pi}{4}$ sous la forme

(2) $$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

La preuve de la relation (2) s'obtient en remarquant d'abord que le membre de droite de la relation (2) est positif et inférieur à $\frac{4}{5}$ (car $\operatorname{arctg} x < x$ si $x > 0$; exercice!), donc appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui est aussi le cas du membre de gauche de la relation (2). Donc (2) a lieu si et seulement si les tangentes de ces deux termes sont égales.

On pose $\theta = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$, $\alpha = 2\theta$ et $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$.

On a $$\operatorname{tg}\theta = 2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1/5) \frac{1}{1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 1/5)}$$
$$= \frac{2/5}{1-(1/5)^2} = \frac{2\times 5}{24} = \frac{5}{12}.$$

Ensuite, $tg\alpha = tg\, 2\theta = \dfrac{2tg\theta}{1-tg^2\theta} = \dfrac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}$

$$= \frac{2\times5\times12}{144-25} = \frac{2\times3\times4\times5}{119}.$$

et $tg\beta = \dfrac{1}{239}$ compte tenu de la relation (1).

On a également la relation classique

$$(3) \quad tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta}$$

Donc

$$tg\left(4\,arctg\,\frac{1}{5} - arctg\,\frac{1}{239}\right) = tg(\alpha-\beta) =$$

$$= \frac{\frac{2.3.4.5}{119} - \frac{1}{239}}{1+\frac{2.3.4.5}{119}\cdot\frac{1}{239}} = \frac{120\times239-119}{119\times239+120}$$

qui vaut l'unité car $239-119=120$. La relation (2) est donc établie.

- Il reste à évaluer numériquement $arctg\,\theta$ pour $|\theta|<1$ à l'aide de la série classique

$$(4) \quad arctg\,\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,\theta^{2k+1}, \quad |\theta|<1.$$

Pour établir la relation (4), on commence par remarquer que

$$(5) \quad \frac{d}{dx}\,arctg\,x = \frac{1}{1+x^2}.$$

En effet, si y est calculé par la relation (1), on a $x = \operatorname{tg} y$ donc $\frac{dx}{dy} = 1 + (\operatorname{tg} y)^2 = 1 + x^2$ et $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ ce qui établit la relation (5).

- On remarque ensuite que la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q = -x^2$ s'écrit

$$(6) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad , |q| < 1$$

soit ici

$$(7) \qquad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} .$$

- On <u>admet</u> ensuite que pour $|x| < 1$, on peut intégrer terme à terme le développement au membre de droite de la relation (7). Il vient

$$\int_0^{\theta} \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\theta} x^{2k} \, dx \quad , \text{ c'est à dire (4).}$$

- Le calcul numérique de π demande de tronquer les séries précédentes de manière convenable pour aller par exemple jusqu'à la précision "machine" :

$$(8) \qquad \frac{\pi}{4} \simeq 4 \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} - \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1}$$

et la programmation n'offre alors <u>pas</u> de difficulté.

FD ; correction 16 fev 2008

Point fixe Deux exercices corrigés

IACS (3), 18/4/10

- Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ dérivable de sorte que $\exists K \geq 0$, $K < 1$ tel que $|f'(z)| \leq K$, $\forall z \in [a,b]$
Montrer qu'alors $f(\cdot)$ vérifie les hypothèses du théorème du point fixe:
  (i) $f : [a,b] \to [a,b]$
  (ii) $\exists K$, $0 \leq K < 1$, $\forall (x,y) \in [a,b]$,
  (1) $$|f(y) - f(x)| \leq K |y - x|$$

- Pour établir la relation (1), on écrit:
$$\int_x |f(y) - f(x)| = \left|\int_x^y f'(z)\,dz\right|$$
$$\leq \left|\int_x^y |f'(z)|\,dz\right|$$
$$\leq \left|\int_x^y K\,dz\right| = K\,|y - x|$$
et l'exercice est résolu.

- Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Montrer que f vérifie les hypothèses du théorème du point fixe avec $a = 0$, $b = 1$.

- (i) Il faut d'abord montrer que l'image de l'intervalle $[0,1]$ par f est effectivement incluse dans $[0,1]$, ie
  (2) $0 \leq f(x) \leq 1$ si $0 \leq x \leq 1$.
  Or pour $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq 1+x^2 \leq 2$ donc
  $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ et la relation (2) montre le premier point.

(ii) Il suffit de déterminer K, majorant de la dérivée $|f'(z)|$ pour $0 \leq z \leq 1$ et d'utiliser le résultat du premier exercice pour conclure. Or

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2} - 2x\,\frac{-2(2x)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^3}\left(1+x^2-4x^2\right) = \frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$$

D'où les variations

x	0		$1/\sqrt{3}$		1
f''		$-$		$+$	
f'	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	$-1/2$

or $\left|f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{9}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

On déduit de l'étude précédente

(3) $|f'(z)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} < 1, \quad \forall z \in [0,1]$.

ce qui montre le résultat.