– Université Lyon 1, ISFA – Master SAF 1ère année –

Processus stochastiques

Examen du 7 janvier 2013 – Durée : 2h30.

Tous les documents, les calculatrices et tous les autres appareils électroniques sont interdits.
Tous vos résultats doivent être justifiés, par un calcul détaillé et/ou un raisonnement clair s'appuyant sur les résultats donnés en cours. La qualité de la rédaction et la précision des explications fournies entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Formule d'Itô

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard.

1. Ecrire les processus $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(U_t)_{t\geq 0}$ donnés ci-dessous comme processus d'Itô, c'est-à-dire sous la forme :
$$\int_0^t \mu(s, B_s)\ \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, B_s)\ \mathrm{d}B_s,$$
en précisant leur drift μ et leur terme de diffusion σ.
   (a)
$$X_t = (B_t + t)e^{-B_t - \frac{t}{2}}$$
   (b)
$$U_t = e^{\frac{t}{2}} \sin(B_t)$$
2. Trouver la solution de l'EDS suivante :
$$\mathrm{d}Y_t = \frac{1}{2} Y_t\ \mathrm{d}t + Y_t\ \mathrm{d}B_t, \quad \text{avec } Y_0 = 1.$$
On pourra admettre que cette solution est strictement positive.
3. Donner une EDS satisfaite par le processus suivant :
$$Z_t = \frac{B_t}{1+t}.$$

Exercice 2

Processus racine carrée

On considère le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ solution de l'équation différentielle stochastique suivante :
$$\mathrm{d}X_t = a(b - X_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{X_t}\mathrm{d}W_t,$$
où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard, et a, b, σ sont des paramètres dans $\mathbb{R}_+^*$.
On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle associée à $(W_t)_{t\geq 0}$.

1. Que pouvez-vous dire (qualitativement) sur le comportement des trajectoires du processus $(X_t)_{t\geq 0}$?
2. Ecrire une équation différentielle stochastique satisfaite par le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ défini par :
$$\forall t \geq 0, \quad Y_t = e^{at} X_t.$$
On donnera la réponse en écrivant $\mathrm{d}Y_t$ en fonction de $\mathrm{d}W_t$, $\mathrm{d}t$, $\sqrt{X_t}$, de t et des paramètres a, b, σ.
3. En déduire, pour $u \geq 0$, l'expression de Y_u en fonction de u, Y_0, a, b, σ et du processus $(M_u)_{u\geq 0}$ défini par :
$$\forall u \geq 0, \quad M_u = \int_0^u e^{at}\sqrt{X_t}\mathrm{d}W_t.$$
4. Rappeler brièvement pourquoi $(M_u)_{u\geq 0}$ est une martingale, relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. En déduire $\mathbb{E}(M_u)$ pour $u \geq 0$.
5. Exprimer $\mathbb{E}(Y_u)$, puis $\mathbb{E}(X_u)$, en fonction de u, X_0, a et b.
6. Le processus $(X_t)_t$ est-il une martingale, relativement à $(\mathcal{F}_t)_t$? Pourquoi ?

Exercice 3

Temps d'atteinte et Martingale exponentielle

On note $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle associée.

1. Soit N une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $s^2 > 0$. Calculer $\mathbb{E}(\exp(N))$ en fonction de s.
2. Pour $\gamma > 0$, soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ le processus défini par :
$$\forall t \geq 0, \quad Z_t = \exp\left(\gamma W_t - \gamma^2 \frac{t}{2}\right).$$
On admet que $Z_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale relativement à $(\mathcal{F}_t)_t$.
3. Soit $a > 0$. On note T la variable aléatoire :
$$T = \inf\{t \geq 0 \text{ tel que } W_t = a\}.$$
Rappeler pourquoi T est un temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
4. Expliquer pourquoi $(Z_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est une martingale, et en déduire $\mathbb{E}(Z_{t\wedge T})$ pour tout $t \geq 0$.
5. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de γ et de a, telle que
$$\forall t \geq 0, \quad Z_{t\wedge T} \leq C \exp\left(-\frac{\gamma^2 (t\wedge T)}{2}\right),$$
et donc aussi que :
$$\forall t \geq 0, \quad |Z_{t\wedge T}| \leq C.$$
6. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} Z_{t\wedge T(\omega)}(\omega)$:
   (a) pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $T(\omega) = +\infty$;
   (b) pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $T(\omega) < +\infty$.
   On donnera le résultat en fonction de $Z_{T(\omega)}(\omega)$.
7. En déduire la limite (presque sûre), lorsque $t \to +\infty$, de $Z_{t\wedge T}$.
On donnera le résultat en fonction de Z_T et de $\mathbb{1}_{T<+\infty}$.
8. Déduire des questions précédentes que :
$$1 = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T<+\infty} Z_T).$$
9. Exprimer Z_T en fonction de γ, de a et de T.
10. En prenant $\gamma = 1/n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, et en faisant tendre n vers $+\infty$ dans le résultat de la question 8., montrer que T est fini presque sûrement.
11. Déduire de la question 8. et de la question précédente que
$$\forall \gamma > 0, \quad \mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 T\right)\right) = \exp(-\gamma a).$$
12. En déduire l'expression de la transformée de Laplace de T :
$$L(\alpha) = \mathbb{E}(\exp(-\alpha T)),$$
pour tout $\alpha > 0$.
13. On admet que :
$$\mathbb{E}(T) = -\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\partial L(\alpha)}{\partial \alpha},$$
même si ces deux quantités sont infinies.
Déterminer $\mathbb{E}(T)$.