Épreuve Algèbre 2

Jeudi 17 décembre 2009 – Durée : 2 h.

Tous documents autorisés, calculatrices et autres appareils électroniques interdits.
Sauf mention contraire, vos résultats doivent être justifiés, par un calcul détaillé et/ou un raisonnement clair s'appuyant sur les résultats donnés en cours. La qualité de la rédaction et la précision des explications fournies entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Soient A et B les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & -\sqrt{5}/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est une matrice orthogonale, et que B ne l'est pas.

Exercice 2

Soit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -1 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire l'expression de la forme quadratique q associée à A, et de la forme bilinéaire symétrique associée à A. On ne demande pas de justification dans cette question.
2. Diagonaliser A dans une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel), c'est-à-dire trouver D diagonale et P orthogonale telle que $A = PDP^T$. Expliquer comment vérifier votre calcul.
   On donne : $18^2 - 4 \times 72 = 36$.
3. Ecrire la forme réduite de q.
4. Montrer que A n'est pas définie positive.
5. Montrer que q n'a pas de maximum sur $\mathbb{R}^3$.
6. Montrer que q a un minimum sur $\mathbb{R}^3$. Donner un point où ce minimum est atteint.
7. Vérifier que le minimum de q sur $S = \{u \in \mathbb{R}^3, ||u|| = 1\}$ est 0, et trouver un point de S où ce minimum est atteint.
8. Déterminer le maximum de q sur S, et trouver un point de S où ce maximum est atteint.
9. Déterminer, si possible, une racine carrée de A.

Exercice 3

On se place dans $E = \mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel.
Soit F l'espace vectoriel engendré par :

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de F.
2. Donner la dimension de $F^\perp$, puis en déterminer une base.
3. Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ n'est pas une base orthogonale de F.
4. Construire une base orthonormée $\{g_1, g_2, g_3\}$ de F.
5. Calculer la projection orthogonale du vecteur $u = (1, 2, 4, 5)$ sur F.
6. Ecrire la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F. On appellera cette matrice A.
7. Expliquer quel calcul effectuer pour retrouver le résultat de la question 5. à partir de la matrice A.
8. Sans calcul, indiquer les valeurs propres de A et les espaces propres associés.
9. Toujours sans calcul, trouver deux matrices P (orthogonale) et D (diagonale) telle que $A = PDP^T$.