Épreuve Algèbre 2

Mardi 14 décembre 2010 – Durée : 2 h.

Tous documents autorisés, calculatrices et autres appareils électroniques interdits.
Sauf mention contraire, vos résultats doivent être justifiés, par un calcul détaillé et/ou un raisonnement clair s'appuyant sur les résultats donnés en cours. La qualité de la rédaction et la précision des explications fournies entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

On se place dans $E = \mathbb{R}^2$, muni du produit scalaire usuel $< \cdot, \cdot >$ et de la norme associée $|| \cdot ||$.
Soit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 7/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 5/4 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire l'expression de la forme quadratique q associée à A, et de la forme bilinéaire symétrique associée à A. On ne demande pas de justification dans cette question.
2. Montrer que le polynôme caractéristique de A s'écrit : $P_A(x) = x^2 - 3x + 2$.
3. Diagonaliser A dans une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel), c'est-à-dire trouver D diagonale et P orthogonale telle que $A = PDP^T$.
   Expliquer comment vérifier votre diagonalisation, et comment vérifier que la matrice P que vous trouvez est orthogonale.
4. Ecrire la forme réduite de q.
5. A est-elle définie positive ?
6. q a-t-elle un minimum sur $\mathbb{R}^2$?
7. q a-t-elle un maximum sur $\mathbb{R}^2$?
8. Déterminer le minimum de q sur $S = \{u \in \mathbb{R}^2, ||u|| = 1\}$, et donner un point de S où ce minimum est atteint.
9. Montrer que A a une racine carrée. Déterminer une racine carrée de A. Expliquer comment vérifier votre calcul.
10. Comment simuler un couple de variables aléatoires gaussiennes (X, Y) centrées, de matrice de covariance A, à partir d'un simulateur du couple (U, V) de variables gaussiennes centrées réduites indépendantes ?

Exercice 2

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel $< \cdot, \cdot >$ et de la norme associée $|| \cdot ||$.
Soit F l'espace vectoriel engendré par :

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Montrer que $\{e_1, e_2\}$ est une base de F.
2. Donner la dimension de $F^\perp$, puis en déterminer une base orthonormée.
3. Construire une base orthonormée $\{g_1, g_2\}$ de F.
4. Ecrire la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F. On appellera cette matrice A.
5. Sans calcul, indiquer les valeurs propres de A et les espaces propres associés.
6. Toujours sans calcul, trouver deux matrices P (orthogonale) et D (diagonale) telle que $A = PDP^T$.
7. Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Donner le vecteur $v \in F$ tel que la distance $||u - v||$ soit minimale.
8. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ tel que la matrice de la projection orthogonale sur G soit la matrice :

$$N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Donner une base de l'intersection $F \cap G$.