Épreuve Algèbre 2

Rattrapage Novembre 2011 – Durée : 2 h.

Tous documents autorisés, calculatrices et tous autres appareils électroniques interdits.
Sauf mention contraire, vos résultats doivent être justifiés, par un calcul détaillé et/ou un raisonnement clair s'appuyant sur les résultats donnés en cours. La qualité de la rédaction et la précision des explications fournies entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

On se place dans $E = \mathbb{R}^2$. Soit q la forme quadratique définie par :

$$q(u) = 4u_1^2 + 2u_2^2 + 2u_1u_2$$

On note b la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1. Écrire la matrice A de q dans la base canonique. *(On ne demande pas de justification dans cette question).*
2. Démontrer que q est définie positive.
3. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire associé à b.

Exercice 2

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel $< \cdot, \cdot >$ et de la norme associée $|| \cdot ||$.
Soit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 25 & -10 & -5 \\ -10 & 9 & -8 \\ -5 & -8 & 21 \end{pmatrix}$$

et q la forme quadratique dont la matrice (dans la base canonique) est A.

1. Diagonaliser A dans une base orthonormée (on écrira le polynôme caractéristique de A sous forme développée). Expliquer comment vérifier votre résultat.
2. Écrire la forme réduite de q.
3. Déterminer le maximum de q sur $S = \{u \in \mathbb{R}^3, ||u|| = 1\}$, et donner un vecteur de S où ce maximum est atteint.
4. Montrer que A a une racine carrée. Déterminer une racine carrée de A. Expliquer comment vérifier votre calcul.
5. Comment simuler un triplet de variables aléatoires gaussiennes (X, Y, Z) d'espérance nulle et de matrice de covariance A, à partir d'un simulateur du triplet (U, V, W) de variables gaussiennes centrées réduites indépendantes ?

Exercice 3

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel $< \cdot, \cdot >$ et de la norme associée $|| \cdot ||$.
Soit F l'espace vectoriel défini ainsi :

$$F = \big\{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 0\big\}$$

1. Donner (en justifiant précisément) une base de F.
2. Donner la dimension de $F^\perp$, puis en déterminer une base.
3. Démontrer que : $\left\{ g_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} ; g_2 = \begin{pmatrix} 6/\sqrt{280} \\ 12/\sqrt{280} \\ -2\sqrt{5/56} \end{pmatrix} \right\}$ est une famille orthonormée de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
4. Démontrer que $\{g_1; g_2\}$ est une base orthonormée de F.
5. Ecrire la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F. On appellera cette matrice M.
Il pourra être judicieux d'exprimer g_1 et g_2 comme vecteurs à coefficients entiers divisés par $\sqrt{280}$; on donne : $280 = 5 \times 56$.
6. Sans calcul, indiquer les valeurs propres de M et les espaces propres associés.
7. Toujours sans calcul, trouver deux matrices P (orthogonale) et D (diagonale) telle que $M = PDP^T$.
8. Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^3$:
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
Donner le vecteur $v \in F$ tel que la distance $||u - v||$ soit minimale.
9. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ tel que la matrice de la projection orthogonale sur G soit la matrice :
$$N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Donner une base de $F \cap G$.