Algèbre 2 : correction du DM

Exercice 1

1. On remarque que $f_3 = f_2 - f_1$ donc le système $\{f_1, f_2, f_3\}$ est lié, il ne peut donc former une base de F .
On peut aussi vérifier que le déterminant du système $\{f_1, f_2, f_3\}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

est nul.

2. Le système $\{f_1, f_2\}$ est quant à lui libre (car f_1 et f_2 ne sont pas proportionnels), il forme donc une base de F . On applique le procédé de Gram-Schmidt sur cette base pour obtenir une base $\{f'_1, f'_2\}$ orthogonale :

$$\begin{aligned} f'_1 &= f_1 = (1, 0, 1) \\ f'_2 &= f_2 - \frac{f_2 \cdot f'_1}{f'_1 \cdot f'_1} f'_1 \end{aligned}$$

Or : $f_2 \cdot f'_1 = 1$ et $f'_1 \cdot f'_1 = 2$ donc

$$f'_2 = (1, 1, 0) - (1/2, 0, 1/2) = (1/2, 1, -1/2)$$

Pour obtenir maintenant une base $\mathcal{G} = \{g_1, g_2\}$ orthonormale, on divise f'_1 et f'_2 par leurs normes respectives :

$$\|f'_1\| = \sqrt{2}, \|f'_2\| = \sqrt{3/2}$$

donc

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$$

est une base orthonormale de F .

3. (a) La famille $\{f'_1, f'_2\}$ est une base orthogonale de F , on peut donc écrire (définition partie 3.5 du cours) :

$$p_F(u) = \frac{u \cdot f'_1}{f'_1 \cdot f'_1} f'_1 + \frac{u \cdot f'_2}{f'_2 \cdot f'_2} f'_2$$

(**Attention** : il est **faux** d'écrire

$$p_F(u) = \frac{u \cdot f_1}{f_1 \cdot f_1} f_1 + \frac{u \cdot f_2}{f_2 \cdot f_2} f_2$$

car $\{f_1, f_2\}$ n'est pas orthogonale.)

On a :

$$u \cdot f'_1 = 1 + 3 = 4 \quad f'_1 \cdot f'_1 = 2 \quad u \cdot f'_2 = 1 \quad f'_2 \cdot f'_2 = 3/2$$

donc

$$p_F(u) = 2f'_1 + \frac{2}{3}f'_2 = (7/3, 2/3, 5/3)$$

- (b) De la même façon

$$p_F(v) = \frac{v \cdot f'_1}{f'_1 \cdot f'_1} f'_1 + \frac{v \cdot f'_2}{f'_2 \cdot f'_2} f'_2$$

Or :

$$v \cdot f'_1 = v \cdot f'_2 = 0$$

Donc $p_F(v) = 0$.

4. Soit G la matrice dont les colonnes sont les composantes vecteurs de la base orthonormée $\mathcal{G}$ trouvée à la question 2, exprimés dans la base canonique :

$$G = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Par une proposition du cours (partie 3.5, matrice d'une projection orthogonale), la matrice de la projection orthogonale sur F est GG^T . Il y a donc seulement à calculer ce produit matriciel et à vérifier qu'il donne la matrice proposée dans l'énoncé.

5. On pouvait remarquer qu'à la question 3. b) on a trouvé que $p_F(v) = 0$ donc $v \in F^\perp$. Comme par ailleurs $\dim F^\perp = \dim E - \dim F = 3 - 2 = 1$ et que $v \neq 0$, $\{v\}$ forme une base de $F^\perp$.

Si l'on ne fait pas cette remarque, on peut calculer une base de $F^\perp$ en résolvant (en u) le système :

$$\begin{cases} u \cdot f_1 = 0 \\ u \cdot f_2 = 0 \end{cases},$$

comme vu en cours, partie 3.3. Cette méthode fonctionne même si $\{f_1, f_2\}$ n'est pas orthogonale.

6. On applique la proposition du cours (partie 3.5, diagonalisation d'une matrice de projection orthogonale). Comme p_F est une projection orthogonale sur un espace différent de E et de $\{0\}$, ses valeurs propres sont 0 et 1. L'espace propre associé à 0 est $F^\perp$, celui associé à 1 est F .

7. La matrice A possède une valeur propre 0 (par la question précédente), elle ne peut donc pas être définie positive.

Exercice 2

1.

$$f(u, v) = x_1x_2 + 8y_1y_2 + z_1z_2 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 - 4x_2y_3 - 4x_3y_2$$

$$q(u) = x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 - 6x_1x_3 - 8x_2x_3$$

2. (a) **Valeurs propres de B .** Le polynôme caractéristique de B est :

$$\begin{aligned}\chi_B(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & 4 & -3 \\ 4 & 8-x & -4 \\ -3 & -4 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)(8-x)(1-x) + 48 + 48 - 16(1-x) - 16(1-x) - 9(8-x) \\ &= (1-2x+x^2)(8-x) + 96 - 32 + 32x - 72 + 9x \\ &= -x^3 + 10x^2 + 24x \\ &= x(-x^2 + 10x + 24),\end{aligned}$$

dont les racines (donc les valeurs propres de B) sont 0, -2 et 12.

(b) **Espaces propres de B .** *Espace propre associé à -2.* Un vecteur $u = (x, y, z)$ est vecteur propre de B associé à -2 si et seulement si $Bu = -2u$, c'est à dire ssi (x, y, z) est solution du système

$$\begin{cases} x + 4y - 3z &= -2x \\ 4x + 8y - 4z &= -2y \\ -3x - 4y + z &= -2z \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc $E_{-2} = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\}$. La dimension de cet espace est 1, donc -2 est une valeur propre de multiplicité 1.

Espace propre associé à 0. Un vecteur $u = (x, y, z)$ est vecteur propre de B associé à 0 si et seulement si $Bu = 0$, c'est à dire ssi (x, y, z) est solution du système

$$\begin{cases} x + 4y - 3z &= 0 \\ 4x + 8y - 4z &= 0 \\ -3x - 4y + z &= 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x = -y \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc $E_0 = \text{Vect}\{(-1, 1, 1)\}$. La multiplicité de la valeur propre 0 est 1.

Espace propre associé à 12. Un vecteur $u = (x, y, z)$ est vecteur propre de B associé à 12 si et seulement si $Bu = 12u$, c'est à dire ssi (x, y, z) est solution du système

$$\begin{cases} x + 4y - 3z &= 12x \\ 4x + 8y - 4z &= 12y \\ -3x - 4y + z &= 12z \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x = -z \\ y = -2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc $E_{12} = \text{Vect}\{(-1, -2, 1)\}$. La multiplicité de la valeur propre 12 est 1.