Exercices d'entraînement (Algèbre 2)

Formes bilinéaires

Exercice 1

1. Parmi les expressions ci-dessous, déterminer celles qui définissent une forme bilinéaire sur l'espace E indiqué.
   (a) $b_1(u,v) = 2u_1v_1 - 4u_2v_2 + 3u_1v_2$ $(E = \mathbb{R}^2)$
   (b) $b_2(u,v) = u_1v_1 + 8u_2v_4 - 3u_2$ $(E = \mathbb{R}^4)$
   (c) $b_3(u,v) = 2u_1v_1 + 3u_1v_2 + 6u_2v_2 + 3u_2v_1$ $(E = \mathbb{R}^2)$
   (d) $b_4(u,v) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ $(E = \mathbb{R}^3)$
   (e) $b_5(u,v) = u_1u_2 - 8v_1u_2$ $(E = \mathbb{R}^2)$
   (f) $b_6(u,v) = 0$ $(E = \mathbb{R}^2)$
   (g) $b_7(u,v) = 3$ $(E = \mathbb{R}^2)$
2. Ecrire la matrice de chacune des formes bilinéaires.
3. Quelles formes bilinéaires sont symétriques ?
4. Calculer $b_1(u,v)$ pour $u = (2,3)$ et $v = (4,-1)$ de deux façons :
   (a) en utilisant l'expression de b_1
   (b) avec des produits matriciels.

Exercice 2

Soient les matrices suivantes associées à des formes bilinéaires :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecrire l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune de ces matrices. Lesquelles sont symétriques ?

Formes quadratiques

Exercice 3

Soit la forme bilinéaire (symétrique) de $\mathbb{R}^3$:

$$b(u,v) = 2u_1v_1 + 4u_1v_2 + 4u_2v_1 - u_2v_2 + 3u_3v_3$$

1. Ecrire la forme quadratique q associée à b.
2. Ecrire la matrice de q.
3. La forme q est-elle définie positive ?

Exercice 4

Soit la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$: $q(u) = 2u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2 + u_3^2$.

1. Ecrire la forme bilinéaire b associée, et la matrice de q.
2. Est-elle définie positive ?

Orthogonalité

Exercice 5

1. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:
   $$u = (2,1,0) \quad v = (3,-6,1) \quad w = (1,0,0)$$
   (a) Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Forment-ils une base orthogonale pour le produit scalaire usuel ?
   (c) Calculer $||u||$, $||v||$ et $||u-v||$.
2. Soit la forme $b(u,v) = 2u_1v_1 + u_2v_2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que b définit un produit scalaire $<,>$ (c'est-à-dire qu'elle est définie positive).
   (b) Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^2$:
   $$u = (2,1) \quad v = (3,-12)$$
   Ces deux vecteurs sont-ils orthogonaux pour le produit scalaire $<,>$?
   (c) Calculer $||u||$ pour la norme induite par $<,>$.

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, déterminer la dimension de F, la dimension de $F^\perp$, orthogonal de F dans E pour le produit scalaire usuel, et en donner une base.

1. $E = \mathbb{R}^2$; $F = \text{Vect}((1,1))$
2. $E = \mathbb{R}^3$; $F = \text{Vect}((1,1,1))$

Exercice 7

Soit F le sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^3$ défini par

$$F = \{(u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 - 2u_2 + u_3 = 0\}$$

1. Déterminer une base de F.
2. Déterminer une base orthonormée de F pour le produit scalaire usuel.
3. Déterminer une base de $F^\perp$.
4. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal du vecteur $u = (1,-3,2)$ sur F.
5. Ecrire la matrice A (dans la base canonique) de la projection orthogonale sur F.
6. Sans calcul, donner les valeurs propres de A, et indiquer une base de E dans laquelle A est diagonale.

Exercice 8

Soit dans $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire :

$$< u,v >= 2u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour ce produit scalaire.

Diagonalisation en base orthonormée

Exercice 9

Soit la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$q(u) = 9u_1^2 + 6u_2^2 + u_3^2 - 4u_1u_2.$$

1. Ecrire sa matrice A.
2. Diagonaliser A dans une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel).
3. Ecrire la forme réduite de q.
4. En déduire si q admet un minimum ou un maximum, et éventuellement le point où ce minimum (ou maximum) est atteint.
5. Déterminer le minimum de q sur $S = \{u \in \mathbf{R}^3, ||u|| = 1\}$, et le vecteur de S où ce minimum est atteint.
6. Mêmes questions pour le maximum de q sur S.

Mêmes questions pour

$$q(u) = u_1^2 + 4u_2^2 + u_3^2 + 4u_1u_2.$$

Exercice 10

1. Trouver une racine carrée de la matrice :
   $$A = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$
2. En déduire comment simuler un couple (X,Y) de variables gaussiennes centrées, dont la matrice de covariance est A.

Exercices supplémentaires

Exercice 11

Soit $||.||$ une norme induite par un produit scalaire $<,>$.

1. Calculer $||u+v||^2$ en fonction de $||u||^2$, $||v||^2$ et $< u, v >$.
2. À quelle condition a-t-on $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$?
3. Interpréter géométriquement cette condition en dimension 2, pour le produit scalaire usuel. Quel théorème retrouve-t-on ?

Exercice 12

Soit b une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E, q sa forme quadratique associée.

1. Pour $x, y \in E$, calculer $q(x+y)$, $q(x-y)$ et $b(x+y, x-y)$ en fonction de $b(x,y)$, $q(x)$ et $q(y)$.
2. Ecrire les résultats obtenus pour $E = \mathbb{R}$, $b(x,y) = xy$. Que retrouve-t-on ?

Exercice 13

Soit $||.||$ une norme induite par un produit scalaire $<,>$.

1. Pour $u, v \in E$, exprimer $||u+v||^2 + ||u-v||^2$ en fonction de $||u||^2$ et $||v||^2$.
2. Interpréter géométriquement en dimension 2, pour le produit scalaire usuel.

Révisions

Exercices de préparation à l'examen. La consigne de rédaction sera :
Sauf mention contraire, vos résultats doivent être justifiés, par un calcul détaillé et/ou un raisonnement clair s'appuyant sur les résultats donnés en cours. La qualité de la rédaction et la précision des explications fournies entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 14

Soient A et B les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est une matrice orthogonale, et que B ne l'est pas.

Exercice 15

Soit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 7/2 & 0 & 7/2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7/2 & 0 & 7/2 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire l'expression de la forme quadratique q associée à A, et de la forme bilinéaire symétrique associée à A.
2. Diagonaliser A dans une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel), c'est-à-dire trouver D diagonale et P orthogonale telle que $A = PDP^T$. Expliquer comment vérifier votre calcul.
3. Ecrire la forme réduite de q.
4. Montrer que A n'est pas définie positive.
5. Montrer que q n'a pas de maximum sur $\mathbb{R}^3$.
6. Montrer que q a un minimum sur $\mathbb{R}^3$. Donner un point où ce minimum est atteint.
7. Vérifier que le minimum de q sur $S = \{u \in \mathbb{R}^3, ||u|| = 1\}$ est 0, et trouver un point de S où ce minimum est atteint.
8. Déterminer le maximum de q sur S, et trouver un point de S où ce maximum est atteint.
9. Déterminer une racine carrée de A.
10. Mêmes questions pour

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

(en cas de difficulté de calcul des valeurs propres, on pourra admettre que les valeurs propres de A sont 0, 6 et 24).

Exercice 16

On se place dans $E = \mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel.
Soit F l'espace vectoriel engendré par :

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 44 \\ 24 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de F.
2. Donner la dimension de $F^\perp$, puis en déterminer une base.
3. Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ n'est pas une base orthogonale de F.
4. Construire une base $\{g_1, g_2, g_3\}$ de F orthonormée.
5. Calculer la projection orthogonale du vecteur $u = (1, 2, 4, 5)$ sur F.
6. Ecrire la matrice de la projection orthogonale sur F. On appellera cette matrice A.
7. Expliquer quel calcul effectuer pour retrouver le résultat de la question 5. à partir de la matrice A.
8. Sans calcul, indiquer les valeurs propres de A et les espaces propres associés.
9. Toujours sans calcul, trouver deux matrices P (orthogonale) et D (diagonale) telle que $A = PDP^T$.