S.T.I.D. 1ère Année **mai 2010**

EPREUVE D'ANALYSE **(durée : 2 heures)**

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Veuillez indiquer vos nom, prénom et groupe, sur chaque copie. Seul le formulaire est autorisé. Les calculatrices sont interdites. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 *Fonction définie par morceaux*

1\. 1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{2}{x+2} & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

a) f est-elle continue en -1 ?

b) Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

c) Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

d) Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(-2) = 1$.

1\. 2) Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\, dx$

Exercice 2 *Encadrement d'une intégrale*

2\. 1) Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(t) = \dfrac{e^t}{1+t^3}$

a) Montrer que pour tout $t \in [0; 1]$ on a $\dfrac{e^t}{2} \leq f(t) \leq e^t$

b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$

Exercice 3 *Intégration par parties et changement de variable*

3\. 1) Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) \cos^2(t)\, dt$ à l'aide du changement de variable $x = \cos(t)$.

(Indication : $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$)

3\. 2) Soit n un entier naturel. On considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin(x)\, dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos(x)\, dx$$

a) Calculer I_0 et J_0.

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur I_n puis une autre sur J_n montrer que :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$$

c) En déduire I_n et J_n en fonction de n.

Exercice 4 *Fonction rationnelle-Fonction trigonométrique*

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

4. 1) Soit f la fonction définie sur $[-2;-1]$ par $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}$.

   a) Déterminer les coefficients a, b et c tels que pour tout $x \in [-2;-1]$:

$$f(x) = 1 + \frac{ax+b}{x^2} + \frac{c}{x-1}$$

   b) En déduire $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(t)\,dt$

4. 2) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt.$

Exercice 5 *Calcul approché d'une intégrale* $\quad I = \displaystyle\int_0^1 3e^{-t^2} dt$

5. 1) Soit f la fonction définie par $f(t) = 3e^{-t^2}$ pour $t \in [0;1]$.

   a) En étudiant les variations de f'' sur $[0;1]$, montrer que $|f''(t)| \leq 6$ pour tout $t \in [0;1]$. On donne $f''\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) \approx 2.677\,6$ et $\;f''(1) \approx 2.207\,3$.

   b) On a calculé une approximation de I en utilisant la méthode des trapèzes à $n = 10$ sous-intervalles et on a obtenu $I \approx 2.240\,5$. Donner alors un encadrement de I à l'aide de cette valeur approchée.

5. 2) Déterminer le nombre minimal de sous intervalles qu'il faudra utiliser dans la méthode des trapèzes pour obtenir un encadrement à 10^{-4}près.

Exercice 6 *Séries et intégrales impropres*

6. 1) Déterminer si l'intégrale suivante est convergente ou divergente, en justifiant votre résultat.
$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-t^2} dt \qquad$ où l'on décomposera $\dfrac{1}{1-t^2}$ en éléments simples.

6. 2) Déterminer, en justifiant, la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

   a) $u_n = \dfrac{n+1}{n}$

   b) $u_n = \dfrac{1}{(\ln(n+1))^n}$

   c) $u_n = \dfrac{2n-1}{\sqrt{2}^n}$

6. 3) Etude de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 3} \frac{\ln(k)}{k^2}$

   a) Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ (Intégration par parties)

   b) Etudier le sens de variation et le signe de la fonction définie par $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ sur $[3;+\infty[$.

   c) En déduire la nature de la série.

6. 4) Etude de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{2k+1}{k^3+2}$

   a) Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a $\dfrac{2k+1}{k^3+2} \leq \dfrac{3}{k^2}$
   (Indication : on pourra comparer d'une part $2k+1$ avec $3k$ et d'autre part k^3+1 avec k^3.)

   b) En déduire la nature de la série.