Notes de cours Analyse 2

Alexandre Janon

29 avril 2010

Table des matières

1 Primitives

1.1 Notion de primitive

Définition Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction $I \to \mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et si

$$F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in I$$

Exemple Prenons $I = \mathbb{R}$, et $f(x) = 2x$.

1. Une primitive de f sur I est $F(x) = x^2$, puisque $F'(x) = 2x = f(x)$.
2. $G(x) = x^2 + 12$ est une autre primitive de f sur I.
3. De manière générale, toute fonction dont l'expression est de la forme $x^2 + C$, où $C \in \mathbb{R}$, est une primitive de f.
   Le théorème suivant montre que toutes les primitives de f sont de cette forme.

Théorème Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f sur I.
Alors l'ensemble de toutes les primitives de f sur I est :

$$\{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

Exemples

1. Prenons $I = \mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   La fonction $x \mapsto \ln x$ est une primitive de f sur I donc l'ensemble des primitives de f sur I est :
   $$\{F, F(x) = \ln x + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$
2. Déterminons maintenant *la* primitive F de f telle que $F(e) = 3$:
   F est une primitive de f donc elle est de la forme $F(x) = \ln x + C$. Comme par ailleurs nous voulons $F(e) = 1$ on a $\ln e + C = 3$ soit $1 + C = 3$ d'où $C = 2$.
   Ainsi la primitive cherchée est $F(x) = \ln x + 2$.
3. Prenons maintenant $I = \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$, et déterminons la primitive F de f telle que
   $$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$
   Une primitive de f sur I est $-e^{-x}$, donc toutes les primitives de f sont de la forme $-e^{-x} + C$, où $C \in \mathbb{R}$.
   Mais par ailleurs $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-e^{-x} + C\right) = C$ donc $C = 1$, ainsi la primitive cherchée est $-e^{-x} + 1$.

1.2 Heuristique pour déterminer une primitive

Une **heuristique** (du grec *eurisko*, « je trouve ») est une *aide à la découverte* : nous allons décrire une méthode qui permet de trouver, dans certains cas, une primitive d'une fonction. Montrons cette méthode sur plusieurs exemples.

1. Déterminons une primitive de $x \mapsto x^4$ sur $\mathbb{R}$.
   Nous cherchons l'expression d'une fonction qui, une fois dérivée, donne x^4. L'observation d'un tableau de dérivées usuelle montre que la dérivée de x^n est (à une constante multiplicative près) x^{n-1}. Autrement dit la dérivation d'une puissance de x diminue de 1 l'exposant de x. La primitivation doit donc augmenter de 1 l'exposant de x.
   Cela suggère de considérer un « candidat » au titre de primitive : x^5.

Dérivons le candidat : on trouve $5x^4$, alors que nous voulions x^4.
Nous « corrigeons » donc le candidat en le divisant par 5. On trouve ainsi un candidat corrigé : $\frac{x^5}{5}$.

Dérivons ce candidat corrigé : $\left(\frac{x^5}{5}\right)' = \frac{1}{5} \times 5 \times x^4 = x^4$.

Conclusion : $\frac{x^5}{5}$ est bien une primitive de x^4.

2. Déterminons une primitive de $x \mapsto 3x^4$ sur $\mathbb{R}$.
   * Cherchons d'abord un candidat : nous prenons le même qu'au dessus (la puissance de x étant inchangée) : x^5.
   * Dérivée du candidat : $5x^4$.
   * Correction : il faut diviser le candidat par 5 et le multiplier par 3. On obtient $\frac{3}{5}x^5$.
   * Vérification : $\left(\frac{3}{5}x^5\right)' = \frac{3}{5} \times 5 \times x^4 = 3x^4$
3. Déterminons une primitive de $f : x \mapsto 3x^2 + \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$.
   Pour obtenir une primitive d'une somme, il suffit d'additionner des primitives de chacun des termes. Nous devons donc primitiver indépendemment $3x^2$ et $\sqrt{x}$.

   (a) Primitive de $3x^2$:
      * Candidat : x^3 ;
      * Dérivée du candidat : $3x^2$;
      * Il n'y a donc pas besoin de corriger le candidat.

   (b) Primitive de $\sqrt{x}$:
      * Recherche du candidat : on écrit $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ce qui suggère de prendre comme candidat : $x^{1+1/2} = x^{3/2}$.
      * Dérivée du candidat : $\left(x^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}x^{1/2}$.
      * Candidat corrigé : $\frac{2}{3}x^{3/2}$.
      * Vérification : exercice pour le lecteur.

   Ainsi nous avons une primitive de f : $F(x) = x^3 + \frac{2}{3}x^{3/2}$.
4. Déterminons une primitive de $\frac{1}{(4x+4)^2}$ sur $]-1; +\infty[$.
   * Recherche du candidat : $\frac{1}{(4x+4)^2} = (4x+4)^{-2}$ donc on prend comme candidat $(4x+4)^{-2+1} = (4x+4)^{-1}$.
   * Dérivée du candidat : $\left((4x+4)^{-1}\right)' = 4 \times (-1) \times (4x+4)^{-2}$
   * Correction du candidat : on le divise par -4, on trouve $-\frac{1}{4(4x+4)}$ comme primitive.
   * Vérification : à faire...
5. Déterminons une primitive de e^{3x} sur $\mathbb{R}$.
   * Candidat : e^{3x}.
   * Dérivée du candidat : $3e^{3x}$.
   * Candidat corrigé : $\frac{e^{3x}}{3}$.
   * On vérifiera que c'est bien une primitive de e^{3x}.

Mise en garde : notre méthode peut échouer... Par exemple, tentons de trouver une primitive de e^{x^2} sur $\mathbb{R}$.
* Candidat : e^{x^2}
* Dérivée du candidat : $2xe^{x^2}$

* Correction du candidat : $\dfrac{e^{x^2}}{2x}$
* Vérification :

$$\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)' = \frac{2xe^{x^2} \times 2x - e^{x^2} \times 2}{4x^2} \neq e^{x^2}$$

Donc notre candidat corrigé n'est pas une primitive de e^{x^2}. L'erreur est ici au niveau de la correction : nous avons dû diviser par $2x$, qui est une *expression dépendant de x*. Le candidat doit donc être choisi de façon à ce que sa dérivée soit la fonction à primitiver, à une multiplication par une *constante* près. Lorsque notre méthode échoue on peut réessayer avec un autre candidat et/ou essayer une autre technique de calcul d'intégrales (nous en verrons par la suite). Mais il n'y a pas non plus garantie de réussite. Il existe des fonctions dont aucune primitive ne peut être exprimée au moyen des fonctions usuelles (puissances, exponentielles, logarithmes, sinus, cosinus...). La fonction $x \mapsto e^{x^2}$ étudiée plus haut fait d'ailleurs partie de celles-ci.

$\boxed{\text{Exercices:}}$ feuille 1, exercice 1 ; feuille 2, exercice 1.

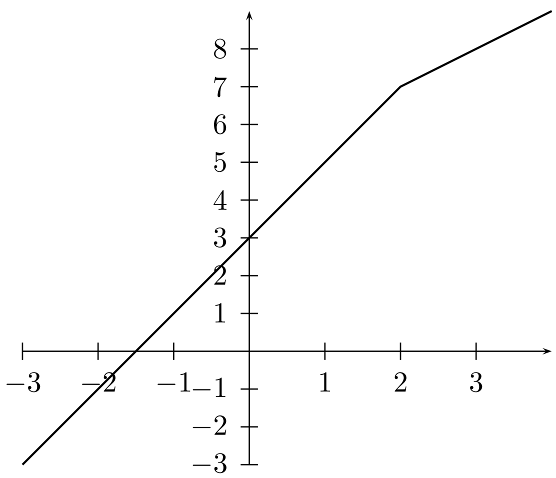
1.3 Primitives de fonctions définies par morceaux

1.3.1 Continuité d'une fonction définie par morceaux

Exemple 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x < 2 \\ x+5 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

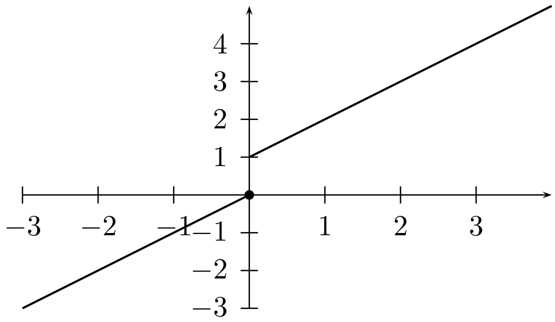
Il est clair que f est continue sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$. La seule discontinuité potentielle est en 2. f est-elle continue en 2 ?
On a $f(2) = 2+5 = 7$, et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2 \times 2 + 3 = 7$. Ainsi f est bien continue en 2. La représentation graphique de f confirme ce résultat :



Exemple 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1+x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Etudions la continuité de f en 0. On a $f(0) = 0$, mais $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1+0 = 1$, donc f n'est pas continue en 0.
Représentation graphique de f :



Exemple 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1/2 \\ x + a & \text{si} \quad x \geq 1/2 \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de a, la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
La seule discontinuité potentielle est en $1/2$. On a :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + a$$

et :

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Ainsi, f est continue si et seulement si

$$\frac{1}{2} + a = \frac{1}{4}$$

c'est à dire :

$$a = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

1.3.2 Primitives d'une fonction définie par morceaux

Reprenons l'exemple 1 du paragraphe précédent :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ x + 5 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Nous avons vu que f est continue sur $\mathbb{R}$. On se demande si elle a des primitives sur $\mathbb{R}$, et si oui, quelle forme ont-elles ?
Soit, pour C_1 et C_2 des constantes réelles, la fonction F donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + C_1 & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{x^2}{2} + 5x + C_2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

On a obtenu la fonction F en prenant une primitive de f sur chacun des morceaux où elle est définie par une formule.
Il est clair que F est une primitive de f sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.

Question 1 : F est-elle une primitive de f sur $\mathbb{R}$, quelles que soient les valeurs de C_1 et C_2 ?
La réponse à cette question est non. En effet, si F est une primitive sur $\mathbb{R}$, alors elle est dérivable – donc continue – sur $\mathbb{R}$. Etudions donc la continuité de F en 2 : on a

$$F(2) = \frac{4}{2} + 10 + C_2 = 12 + C_2$$

et

$$\lim_{x \to 2^-} F(x) = 2^2 + 3 \times 2 + C_1 = 10 + C_1$$

Donc si $12 + C_2 \neq 10 + C_1$ (ie. $C_1 \neq C_2 + 2$), alors la fonction F – n'étant pas continue sur $\mathbb{R}$ – ne peut être primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Question 2 : Si $C_1 = C_2 + 2$, F est-elle primitive de f sur $\mathbb{R}$?
La réponse est oui, car alors F est continue sur $\mathbb{R}$, et comme f est également continue sur $\mathbb{R}$ on peut appliquer le théorème suivant :

Théorème Soit f une fonction continue sur un intervalle $I =]a, c[$ (a et c peuvent être $\pm\infty$).
Soit b un point de I, et F une primitive de f sur $]a, b[$ et sur $]b, c[$.
Si F est continue sur I alors F est une primitive de f sur I.

On trouve donc que, quelque soit $C_2 \in \mathbb{R}$, la fonction F donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + C_2 + 2 & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{x^2}{2} + 5x + C_2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (et nous admettrons que toutes les primitives de f sont de cette forme).

Résumé de la méthode Soit une fonction f donnée définie par morceaux.

1. On vérifie si f est continue. Si f n'est pas continue nous ne pouvons pas appliquer cette méthode.
2. On recherche une primitive sur chacun des morceaux où f est définie.
3. On ajuste les constantes de primitivation afin d'avoir une primitive continue.
4. Le théorème ci-dessus permet de conclure que l'on a bien une primitive de f, et on admet que toutes les primitives de f sont de cette forme.
5. Eventuellement, si l'énoncé le demande, on détermine la valeur de la constante à l'aide d'une valeur de la primitive ou de l'une de ses limites.

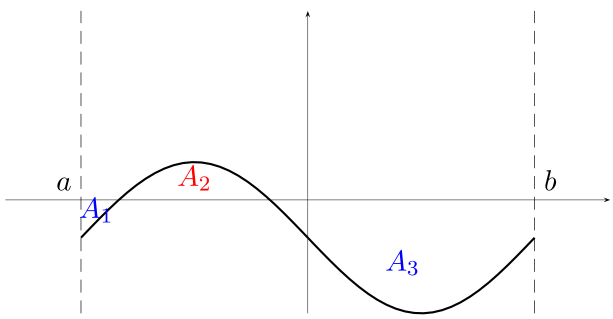
Exercices: Feuille 1, exercices 2 et 3.
Si la fonction f n'est pas continue, on pourra déterminer une primitive sur chacun des morceaux mais il n'est pas garanti que l'on puisse obtenir une primitive « globale », sur l'ensemble du domaine du définition de f (même en ajustant les constantes). D'ailleurs, il existe des fonctions qui n'admettent pas de primitive (cf. feuille 1, exercice 4). De telles fonctions sont nécessairement discontinues, car toute fonction continue admet des primitives. Néanmoins, certaines fonctions discontinues admettent des primitives (cf. feuille 1, exercice 5)...

2 Intégrales

2.1 Notion d'intégrale

Définition Soit $[a; b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur $[a; b]$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a; b]$ l'aire sous la courbe représentative de f, comptée positivement là où f est positive, et négativement là où f est négative.
L'intégrale de f sur $[a; b]$ est un nombre réel, noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, ou $\displaystyle\int_a^b f$.

Illustration



L'aire de la région 2 est comptée positivement (car la fonction y est positive), et l'aire des régions 1 et 3 est comptée négativement (car la fonction y est négative), donc

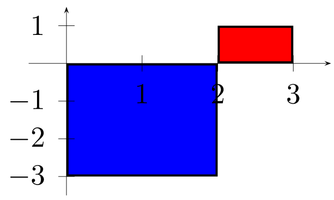
$$\int_a^b f = -A_1 + A_2 - A_3$$

Exemple. Soit la fonction f définie sur $[0;3]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0;2[\\ -3 & \text{si} \quad x \in [2;3] \end{cases}$$

Déterminons $\displaystyle\int_0^3 f$.

Voici la représentation graphique de f : les régions de la courbe où f est positive sont en rouge, celles où f est négative sont en bleu :



L'intégrale de f sur $[0;1]$ vaut :

$$\int_0^1 f = -3 \times (3-2) + 1 \times (2-0) = -3 + 2 = -1$$

2.2 Lien avec le calcul de primitives

Le théorème suivant relie intégrale et primitive, et donne un moyen pour calculer l'intégrale d'une fonction connaissant une de ses primitives :

Théorème Soit f une fonction continue définie sur intervalle $[a;b]$, et F une primitive (quelconque) de f sur $[a;b]$. On a :

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

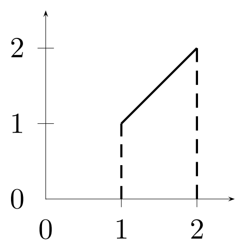
Notation «crochets» : on note $[F]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 t\mathrm{d}t$ de deux façons différentes.

Première façon : en utilisant une primitive. Une primitive de la fonction $t \mapsto t$ sur $[1;2]$ est la fonction $F : t \mapsto \dfrac{t^2}{2}$. Donc :

$$\int_1^2 t\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Deuxième façon : en utilisant la définition de l'intégrale. L'intégrale cherchée est l'aire du trapèze ci-dessous :



Ce trapèze a pour petite base 1, pour grande base 2 et comme hauteur 1, donc l'aire cherchée est :

$$\text{hauteur} \times \frac{\text{petite base} + \text{grande base}}{2} = 1 \times \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

On retrouve bien la valeur de l'intégrale calculée avec une primitive.

En pratique, nous calculerons souvent la valeur de l'intégrale d'une fonction à l'aide d'une primitive de cette fonction.
Remarque : Dans le théorème, on prend comme F une primitive « quelconque » de f. En fait, la quantité $F(b) - F(a)$ ne *dépend pas* de la primitive choisie. En effet, si G est une autre primitive de f, alors F et G diffèrent d'une constante : $G = F + C$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= F(b) + C - (F(a) + C) \\ &= F(b) + C - F(a) - C \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Exercices: Feuille 2, exercices 2 et 3.

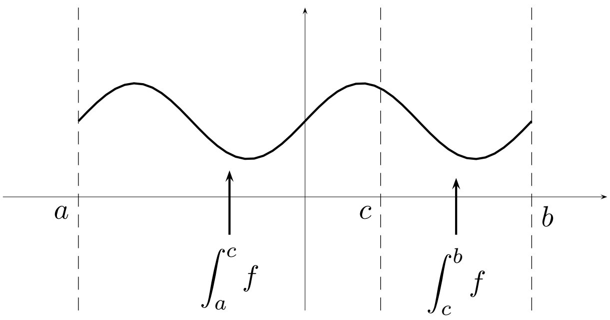
2.3 Relation de Chasles, intégrales de fonctions définies par morceaux

Le théorème suivant porte le nom de *relation de Chasles*.

Théorème Soit f une fonction définie sur $[a;b]$, et $c \in [a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Ce théorème peut s'illustrer graphiquement de la façon suivante :



L'aire « totale », délimitée par les lignes verticales pointillées extrêmes, vaut $\int_a^b f$. Cette aire est égale à la somme des aires délimitées entre la ligne de gauche et celle du milieu ($\int_a^c f$), et entre la ligne du milieu et la ligne de droite ($\int_c^b f$).

Exemple de calcul d'intégrale de fonction définie par morceaux. La relation de Chasles permet de calculer l'intégrale d'une fonction définie par morceaux. Par exemple, soit la fonction f définie sur $[0;3]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x \in [0;2[\\ -x+1 & \text{si} \quad x \in [2;3] \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 (2x+3)\mathrm{d}x + \int_2^3 (-x+1)\mathrm{d}x \\
&= \Big[x^2+3x\Big]_0^2 + \left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3 \\
&= 2^2+3\times 2-(0^2+3\times 0)+\left(-\frac{3^2}{2}+3\right)-\left(-\frac{2^2}{2}+2\right) \\
&= 10-\frac{3}{2}=\frac{17}{2}
\end{aligned}$$

On notera que la fonction f n'est pas continue sur $[0;3]$ – elle n'admet d'ailleurs pas de primitive sur $[0;3]$. Nous n'aurions donc pas pu calculer son intégrale directement avec une primitive.
Remarque. Soit g la fonction définie sur $[0;3]$ par :

$$g(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x\in[0;2[\\ 19 & \text{si} \quad x=2 \\ -x+1 & \text{si} \quad x\in]2;3] \end{cases}$$

Les fonctions f et g coincident partout sur $[0;3]$, sauf en 2.
Nous pouvons calculer de la même manière l'intégrale de g sur $[0;3]$, et nous trouverons le même résultat que pour l'intégrale de f.
Il s'agit d'un fait général : si deux fonctions coincident partout sur un intervalle $[a;b]$, sauf peut-être en un nombre **fini** de points, alors leurs intégrales sur $[a;b]$ sont égales. Autrement dit, on peut « changer » la valeur d'une fonction en un nombre fini de points sans changer son intégrale. Cela est confirmé par l'interprétation de l'intégrale comme « aire sous la courbe ».

Exercices: Feuille 2, exercices 4 à 7.

2.4 Autres propriétés de l'intégrale

2.4.1 Linéarité de l'intégrale

Théorème Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a;b]$, et $k\in\mathbb{R}$.
On a :

$$\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g \quad \text{et} \quad \int_a^b (kf)=k\int_a^b f$$

Exemple d'utilisation. Soient f et g deux fonctions telles que :

$$\int_0^1 f=2 \text{ et } \int_0^1 g=4$$

Combien vaut $\int_0^1 (5f-2g)$?
Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (5f-2g) &= 5\int_0^1 f-2\int_0^1 g \\
&= 5\times 2-2\times 4 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Attention : nous n'aurions pas pu calculer $\int_0^1 fg$ seulement à partir de la donnée des deux intégrales $\int_0^1 f$ et $\int_0^1 g$. En effet, en général,

$$\int_a^b (fg) \neq \left(\int_a^b f\right) \times \left(\int_a^b g\right)$$

Le lecteur vérifiera à titre d'exercice que $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = g(x) = x$ fournit un contre-exemple.

2.4.2 Intégration des inégalités

Théorème Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a, b]$ (on suppose donc $a \leq b$). On a :

$$(\forall x \in [a, b],\ f(x) \leq g(x)) \implies \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

On dit que l'on a *intégré* l'inégalité $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$.

On a également les implications :

$$(\forall x \in [a, b],\ f(x) \geq g(x)) \implies \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

et :

$$(\forall x \in [a, b],\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)) \implies \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b h(x)\mathrm{d}x$$

Exemple d'utilisation. Soit f une fonction définie sur $[1; 5]$ telle que $\forall x \in [1; 5]\ 1 \leq f(x) \leq x$. Donnons un encadrement de $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$.
On a :

$$\int_1^5 1\mathrm{d}x \leq \int_1^5 f(x)\mathrm{d}x \leq \int_1^5 x\mathrm{d}x$$

Or :

$$\int_1^5 1\mathrm{d}x = [x]_1^5 = 5 - 1 = 4$$

et :

$$\int_1^5 x\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^5 = \frac{24}{2} = 12$$

D'où notre encadrement :

$$4 \leq \int_1^5 f(x)\mathrm{d}x \leq 12$$

$\boxed{\text{Exercices:}}$ Feuille 2, exercices 8 et 9.

3 Techniques de calcul d'intégrales

3.1 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions $[a; b] \to \mathbb{R}$, dérivables. On sait que le produit uv de ces deux fonctions est dérivable, de dérivée :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

On peut réécrire cette identité en :

$$u'v = (uv)' - uv'$$

soit enfin :

$$u'v = -uv' + (uv)'$$

Supposons maintenant que u' et v' sont continues. Les fonctions $u'v$ et uv' le sont alors également, et on peut maintenant intégrer cette égalité entre a et b. Compte tenu de la linéarité de l'intégrale on obtient :

$$\int_a^b u'v = -\int_a^b uv' + \int_a^b (uv)'$$

Mais :

$$\int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$$

d'où :

Théorème Soient u et v deux fonctions $[a;b] \to \mathbb{R}$, dérivables, possédant une dérivée continue. On a :

$$\int_a^b u'v = -\int_a^b uv' + [uv]_a^b$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule d'intégration par parties.*

Exemples

Nous pouvons utiliser la formule d'intégration par parties pour calculer des intégrales, lorsque la fonction à intégrer ne possède pas de primitive « facile » à trouver.

Exemple 1. Calculons $\displaystyle\int_1^2 xe^x \mathrm{d}x$.
La fonction à intégrer est de la forme $u'(x)v(x)$ avec $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$. Nous avons :

$$\int_1^2 xe^x \mathrm{d}x = -\int_1^2 u(x)v'(x)\mathrm{d}x + [uv]_1^2$$

où $u(x) = e^x$ (primitive de u') et $v'(x) = 1$ (dérivée de v). On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_1^2 xe^x \mathrm{d}x & = & \displaystyle -\int_1^2 e^x \times 1\mathrm{d}x + [e^x x]_1^2 \\ & = & -[e^x]_1^2 + [e^x x]_1^2 \\ & = & -(e^2 - e) + (2e^2 - e) \\ & = & e^2 \end{array}$$

L'intégration par parties remplace donc la primitivation de $u'v$ par deux primitivations : celle de u' (pour trouver u), et celle de uv'. Elle est donc utile pour intégrer $u'v$ si l'on peut trouver une primitive de u' et de uv'.

Exemple 2. Calculons $\displaystyle\int_0^1 x \sin x \mathrm{d}x$.
Nous disposons les calculs sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = \sin x \\ v(x) = x \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} u(x) = -\cos x \\ v'(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^1 x \sin x \mathrm{d}x & = & \displaystyle -\int_0^1 (-\cos x)\mathrm{d}x + [-x \cos x]_0^1 \\ & = & [\sin x]_0^1 + (-\cos 1) \\ & = & \sin 1 - \cos 1 \end{array}$$

Exemple 3. Calculons $\int_1^2 \ln x \mathrm{d}x$.

$$\left\{\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln x \mathrm{d}x &= -\int_1^2 \frac{1}{x} \times x \mathrm{d}x + [x \ln x]_1^2 \\ &= -\int_1^2 1 \mathrm{d}x + [x \ln x]_1^2 \\ &= -(2-1) + 2\ln 2 \\ &= 2\ln 2 - 1 \end{aligned}$$

Exercices: Feuille 3, exercices 2 à 4.

3.2 Changement de variable

Introduction

Soit à calculer l'intégrale $\int_0^2 x(x^2+1)^5 \mathrm{d}x$.

1ère méthode : La fonction à intégrer est de la forme $\dfrac{u'u^5}{2}$, avec $u(x) = x^2 + 1$.

Nous savons qu'une primitive de $u'u^5$ est $\dfrac{u^6}{6}$, donc une primitive de $\dfrac{u'u^5}{2}$ est $\dfrac{u^6}{12}$.
Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^2 x(x^2+1)^5 \mathrm{d}x &= \left[\frac{(x^2+1)^6}{12}\right]_0^2 \\ &= \frac{5^6}{12} - \frac{1}{12} \end{aligned}$$

2ème méthode : Nous définissons une nouvelle *variable* : $u = x^2 + 1$, et nous souhaitons réécrire notre intégrale portant sur la variable x, comme une intégrale portant sur la variable u. Nous devons modifier les deux constituants de l'intégrale originale :
– l'intégrande $x(x^2+1)^5 \mathrm{d}x$,
– et les bornes de l'intégrale, 0 et 2.
Traitement de l'intégrande : on a d'abord $x(x^2+1)^5 = xu^5$ compte tenu de la définition de u.
Pour traiter le $\mathrm{d}x$, nous utilisons formellement la « règle » suivante :

$$\boxed{u = \phi(x) \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \phi'(x)\mathrm{d}x}$$

Ici $\phi(x) = x^2 + 1$ donc $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$, soit encore : $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{2x}$.
Ainsi :

$$x(x^2+1)^5 \mathrm{d}x = xu^5 \frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{u^5}{2}\mathrm{d}u.$$

Bornes de l'intégrale : quand x vaut 0, u vaut $0^2 + 1 = 1$; quand x vaut 2, u vaut $2^2 + 1 = 5$, on remplace donc les bornes d'intégration 0 et 2 dans l'intégrale portant sur x par les bornes 1 et 5 dans l'intégrale portant sur u.
Conclusion : on a ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^2 x(x^2+1)^5 \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_1^5 u^5 \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^5 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{5^6}{6} - \frac{1}{6}\right), \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat trouvé précédemment.
On dit que l'on a calculé l'intégrale en faisant le *changement de variable* $u = x^2 + 1$.

Exemple 1.

Calculons $\int_0^1 \sin(2x+3)\mathrm{d}x$ en faisant le changement de variable $u = 2x + 3$.
On a : $u = 2x + 3$ donc $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$ soit encore : $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{2}$.
D'où $\sin(2x+3)\mathrm{d}x = \sin u \dfrac{\mathrm{d}u}{2}$.
Bornes de l'intégrale : $u(x = 0) = 3$ et $u(x = 1) = 5$ donc :

$$\int_0^1 \sin(2x+3)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^5 \sin u \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[-\cos u\right]_3^5 = -\frac{1}{2}(\cos 5 - \cos 3)$$

Exemple 2.

Calculons $\int_0^1 \sin(-x+1)\mathrm{d}x$ en faisant le changement de variable $u = -x + 1$.
On a : $u = -x + 1$ donc $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ soit $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$.
D'où $\sin(-x+1)\mathrm{d}x = -\sin(u)\mathrm{d}u$.
Bornes : $u(x = 0) = 1$ et $u(x = 1) = 0$. On constate donc que l'ordre des bornes a été renversé par le changement de variable. Pour remettre les bornes dans le « bon sens » on utilise la convention :

$$\boxed{\int_b^a = -\int_a^b}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin(-x+1)\mathrm{d}x &= \int_1^0 (-\sin u)\mathrm{d}u \\
&= -\left(\int_0^1 (-\sin u)\mathrm{d}u\right) \\
&= \int_0^1 \sin u \mathrm{d}u \\
&= \left[-\cos u\right]_0^1 = -\cos 1 - (-\cos 0) = -\cos 1 + 1.
\end{aligned}$$

Formule du changement de variable

La formule utilisée lors du changement de variable $u = \phi(x)$ est la suivante :

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\mathrm{d}u,$$

valable pour f continue, et ϕ dérivable ayant une dérivée continue.

Exercices: Feuille 3, exercices 5 à 7.

3.3 Intégration des fractions rationnelles

Rappelons quelques termes :
- un *monôme* est une expression de la forme : kx^p, où k est une constante, x est la variable et p est un entier (positif) ; exemples : $3x^2$, x^4, x, 1 ; contre-exemples : $\sqrt{x}$, $\dfrac{1}{x}$, $\exp x$.
- un *polynôme* est une somme d'un ou plusieurs monômes ; le *degré* d'un polynôme est la plus grande puissance de x qui apparaît dans l'expression du polynôme ; exemple : x^3+22x^2-12 est un polynôme de degré 3.
- une *fraction rationnelle* est le quotient d'un polynôme par un polynôme non nul ; exemple : $\dfrac{x^2+1}{3x}$, de *numérateur* $x^2 + 1$ et de *dénominateur* $3x$.

Nous allons décrire une méthode générale pour trouver les primitives d'une fraction rationnelle. Cette méthode consiste d'abord à écrire la fraction rationnelle à intégrer sous une forme particulière, appelée *décomposition en éléments simples.*

3.3.1 Avec un seul élément simple

Cherchons les primitives de la fraction :

$$\frac{x^2+4+2x}{x-1}$$

sur tout intervalle ne contenant pas 1.

Nous allons **poser la division** du polynôme x^2+4+2x par le polynôme $x-1$, **en ordonnant les monômes par ordre décroissant de puissance** de x :

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+4 & x-1 \\ \cline{2-2} \text{-}\,(\,x^2-x\,) & x+3 \\ \cline{1-1} 3x+4 & \\ \text{-}\,(\,3x-3\,) & \\ \cline{1-1} 7 & \end{array}$$

On a ainsi écrit :

$$\underbrace{x^2+2x+4}_{\text{dividende}} = \underbrace{(x-1)}_{\text{diviseur}} \times \underbrace{(x+3)}_{\text{quotient}} + \underbrace{7}_{\text{reste}}$$

Soit, en divisant par $x-1$:

$$\frac{x^2+2x+4}{x-1} = x+3+\frac{7}{x-1}$$

On en déduit alors les primitives cherchées : une primitive de $x+3$ est $\dfrac{x^2}{2}+3x$, et une primitive de $\dfrac{7}{x-1}$ est $7\ln|x-1|$, ainsi les primitives cherchées sont de la forme :

$$\frac{x^2}{2}+3x+7\ln|x-1|+C \quad (C\in\mathbb{R})$$

pour $x\neq 1$.

$\boxed{\text{Exercices:}}$ Feuille 4, exercice 1.

3.3.2 Eléments de première espèce, sans facteur répété

Cherchons les primitives de la fraction :

$$\frac{x^2+2x+4}{x^2-3x+2}$$

en passant par une décomposition en éléments simples.

Etape 1 : division. La première étape est d'écrire la fraction à décomposer comme la somme d'un **polynôme** et d'une **fraction rationnelle**, dont le **dénominateur** a un degré **strictement inférieur** à celui du numérateur.
Si la fraction à décomposer a déjà un dénominateur de degré strictement inférieur à celui du numérateur, on peut sauter cette étape et passer à la suivante.
Dans notre exemple, le degré du numérateur et du dénominateur sont égaux. Nous allons donc poser la division du numérateur par le dénominateur, **en ordonnant les monômes par ordre décroissant de degré** :

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+2x+4 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2}
-(x^2-3x+2) & 1 \\ \cline{1-1}
0+5x+2 &
\end{array}
$$

On a donc écrit :

$$\underbrace{x^2+2x+4}_{\text{dividende}} = \underbrace{(x^2-3x+2)}_{\text{diviseur}} \times \underbrace{1}_{\text{quotient}} + \underbrace{(5x+2)}_{\text{reste}}$$

Donc

$$\frac{x^2+2x+4}{x^2-3x+2} = \underbrace{1}_{\text{polynôme}} + \underbrace{\frac{5x+2}{x^2-3x+2}}_{\text{fraction rationnelle avec } \deg N < \deg D}$$

Le travail continue alors sur la fraction rationnelle «restante», ici $\dfrac{5x+2}{x^2-3x+2}$.

Etape 2 : factorisation du dénominateur. Il s'agit maintenant d'écrire le dénominateur de la fraction rationnelle comme produit de polynômes du premier degré – si cela est possible.
Dans notre exemple, le dénominateur est de degré 2, nous faisons usage du théorème suivant :

Théorème Soit un polynôme du second degré ax^2+bx+c, ayant comme racines α_1 et α_2. Alors

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$

Le dénominateur x^2-3x+2 a pour discriminant $(-3)^2-4\times 1\times 2 = 1$, et ses racines sont 1 et 2. On peut donc écrire :

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

La fraction à décomposer est donc :

$$\frac{5x+2}{x^2-3x+2} = \frac{5x+2}{(x-1)(x-2)}$$

Etape 3 : écriture de la décomposition en éléments simples Nous allons chercher des constantes A et B telles que :

$$\frac{5x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \quad \forall x \notin \{1;2\} \quad (*)$$

Chaque facteur $(x-\alpha)$ du dénominateur donne donc naissance à un terme de la forme :

$$\frac{\text{Constante à déterminer}}{x-\alpha}$$

L'égalité $(*)$ est équivalente à :

$$\frac{5x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-2)}{(x-1)(x-2)} + \frac{B(x-1)}{(x-2)(x-1)} \quad \forall x \notin \{1;2\}$$

soit encore :

$$\frac{5x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \quad \forall x \notin \{1;2\}$$

soit finalement, après développement et mise en facteur de x :

$$\frac{5x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)} \quad \forall x \notin \{1;2\}$$

D'où le système vérifié par A et B :

$$\begin{cases} A+B &= 5 \\ -2A-B &= 2 \end{cases}$$

Ce système a pour solution : $A=-7$ et $B=12$.
On a ainsi écrit la décomposition en éléments simples de la fraction considérée :

$$\frac{x^2+2x+4}{x^2-3x+2} = 1 - \frac{7}{x-1} + \frac{12}{x-2}$$

Etape 4 : écriture de la primitive On trouve alors une primitive de la fraction rationnelle en prenant une primitive de chaque terme de la somme.
Ainsi les primitives de $\dfrac{x^2+2x+4}{x^2-3x+2}$ sur tout intervalle ne contenant ni 1, ni 2 sont :

$$x - 7\ln|x-1| + 12\ln|x-2| + C \quad C \in \mathbb{R}$$

On voit l'intérêt de la décomposition en éléments simples : la fraction rationnelle est décomposée en la somme :
- d'un polynôme, qui se primitive facilement ;
- et de termes de la forme $\dfrac{k}{x-\alpha}$, dont une primitive sur tout intervalle ne contenant pas α est $k\ln|x-\alpha|$.

Exercices: Feuille 4, exercices 2 et 3.
Remarquons qu'à l'étape 2 (factorisation du dénominateur), nous avons pu écrire le dénominateur comme produit de polynômes (distincts) du premier degré car nous avons trouvé que le dénominateur possédait deux racines simples.
Nous allons voir comment traiter le cas où le dénominateur possède des racines multiples (deuxième exemple), et celui où (troisième exemple) lorsque le dénominateur possède des racines non réelles (par exemple s'il n'a pas de racine réelle).

3.3.3 Eléments de première espèce, avec facteurs répétés

Cherchons les primitives de la fonction :

$$\frac{2x}{x^2-2x+1}$$

Etape 1 : division Inutile ici car le degré du numérateur est déjà strictement inférieur à celui du dénominateur.

Etape 2 : factorisation du dénominateur Le polynôme x^2-2x+1 a pour discriminant 0, il a donc une racine réelle double ; cette racine est 1. Ainsi : $x^2-2x+1=(x-1)^2$.

Etape 3 : écriture de la décomposition en éléments simples La présence du terme carré modifie la forme de la décomposition en éléments simples : on cherche A et B constantes, telles que

$$\frac{2x}{x^2-2x+1} = \frac{2x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \quad \forall x \neq 1 \quad (*)$$

Chaque facteur $(x-\alpha)^k$ du dénominateur donne donc naissance à k termes :

$$\frac{\text{Constante}_1}{x-\alpha} + \frac{\text{Constante}_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{\text{Constante}_k}{(x-\alpha)^k}$$

L'équation $(*)$ est équivalente à :

$$\frac{2x}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)^2} \quad \forall x \neq 1 \qquad (*)$$

soit :

$$\frac{2x}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} \quad \forall x \neq 1$$

soit, après développement :

$$\frac{2x}{(x-1)^2} = \frac{Ax+B-A}{(x-1)^2} \quad \forall x \neq 1$$

D'où le système :

$$\begin{cases} A = 2 \\ B - A = 0 \end{cases}$$

D'où $A = 2$ et $B = 2$, ainsi on a la décomposition en éléments simples :

$$\frac{2x}{x^2-2x+1} = \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

Etape 4 : primitivation Une primitive de

$$\frac{2}{(x-1)^2} = 2(x-1)^{-2}$$

est :

$$2\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} = 2\frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \frac{-2}{x-1}$$

On conclut donc que les primitives de $\dfrac{2x}{x^2-2x+1}$ sur tout intervalle ne contenant pas 1 sont :

$$2\ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Exercices: Feuille 4, exercice 4.

3.3.4 Eléments de seconde espèce, sans facteur répété (cas particulier)

Cherchons les primitives de la fonction :

$$\frac{2x^2+2x+2}{(x-1)(x^2+2x+3)}$$

Etape 1 : division Inutile ici car le degré du numérateur (2) est déjà strictement inférieur à celui du dénominateur (3).

Etape 2 : factorisation du dénominateur Le polynôme x^2+2x+3 a pour discriminant -8, il n'a donc pas de racine réelle. On ne peut donc pas factoriser plus avant le dénominateur[1].

Etape 3 : écriture de la décomposition en éléments simples On cherche A, B et C constantes telles que :

$$\frac{2x^2+2x+2}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3} \quad \forall x \neq 1 \qquad (*)$$

Chaque facteur ax^2+bx+c du dénominateur (avec $b^2-4ac<0$) donne naissance à un élément simple de seconde espèce :

$$\frac{C_1x+C_2}{ax^2+bx+c}$$

[1]sans introduire de nombres complexes...

On a :

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+3} &= \frac{A(x^2+2x+3)}{(x-1)(x^2+2x+3)}+\frac{(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+3)}\\ &= \frac{(A+B)x^2+(2A+C-B)x+3A-C}{(x-1)(x^2+2x+3)}\end{aligned}$$

Donc $(*)$ équivaut à :

$$\begin{cases} A+B &= 2\\ 2A+C-B &= 2\\ 3A-C &= 2\end{cases}$$

soit, après résolution, $A=B=C=1$.
D'où la décomposition en éléments simples :

$$\frac{2x^2+2x+2}{(x-1)(x^2+2x+3)}=\frac{1}{x-1}+\frac{x+1}{x^2+2x+3}$$

Etape 4 : primitivation des éléments simples Une primitive du premier terme est $\ln|x-1|$. Pour primitiver le second terme, on remarque qu'il est de la forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=x^2+2x+3$; une primitive du second terme est donc $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|$.
Ainsi une primitive de $\frac{2x^2+2x+2}{(x-1)(x^2+2x+3)}$, sur tout intervalle ne contenant pas 1, est

$$\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|+C \quad (C\in\mathbb{R})$$

Exercices: Feuille 4, exercice 5.

Remarque : nous ne verrons pas les cas où :
– il apparaît un élément de seconde espèce qui n'est pas de la forme $k\frac{u'}{u}$;
– il apparaît un élément de seconde espèce répété (par exemple, s'il y a un facteur de la forme $(ax^2+bx+c)^2$ avec $b^2-4ac<0$ au dénominateur de la fraction rationnelle).
Ces cas peuvent être traités mais les calculs sont plus délicats.

4 Calcul approché d'intégrales

Introduction

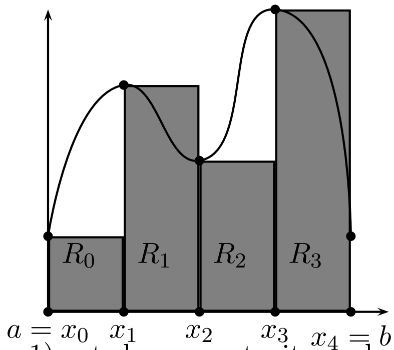
Dans certains cas, il n'est pas possible de calculer la valeur exacte de $\int_a^b f$ par recherche d'une primitive de f. Par exemple le « calcul » de la valeur exacte de $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ est impossible : la fonction $x\mapsto e^{-x^2}$ a bien des primitives, mais il a été démontré que ces primitives ne sont pas exprimables à partir des fonctions « usuelles » (fractions rationnelles, logarithme, exponentielle, sinus, cosinus...). Cependant cette intégrale apparaît dans les applications pratiques (elle est reliée aux quantiles de la loi normale centrée réduite) et on souhaiterait tout de même en avoir une valeur approchée.
Dans d'autres cas, on veut intégrer une fonction dont la primitive est exprimable mais la recherche de la primitive est trop complexe. Dans nombre de cas pratiques, connaître une valeur approchée de l'intégrale suffit et on souhaiterait disposer d'une méthode simple, systématique pour calculer de telles valeurs approchées.
Le calcul de valeurs approchées d'intégrales n'est pas qu'un pis-aller : dans certains cas la valeur exacte de l'intégrale est facile à calculer mais elle n'est d'aucune utilité pratique : imaginons que nous souhaitions construire un segment de longueur (environ) égale à $\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{x}$ cm. Il est aisé de voir que cette intégrale vaut exactement $\ln 3$, mais cela ne nous sert à rien dans notre problème, et nous préfèrerions savoir que l'intégrale vaut *environ* $1,1$.

Enfin, dans tout calcul de valeur approchée se pose le problème de la précision de l'approximation : dans notre exemple du segment de longueur $\ln 3$ cm, l'approximation proposée (1,1 cm) est suffisante si la précision requise est de l'ordre du millimètre. Si celle ci est de l'ordre du nanomètre l'erreur d'approximation est trop importante et il nous faut rechercher une valeur plus précise. Notre méthode de calcul approché doit donc également nous fournir une indication de la précision de l'approximation.
Nous allons donc voir deux méthodes de calcul approché d'intégrales, qui ne nécessitent pas la recherche d'une primitive de la fonction à intégrer et qui fournissent, en plus de la valeur approchée, une majoration de l'erreur d'approximation commise.

4.1 Méthode des rectangles

4.1.1 Description

L'idée est de revenir à la définition de l'intégrale comme aire sous la courbe de la fonction et d'approcher cette aire.
Soit à calculer $\int_a^b f$. On partage l'intervalle $[a;b]$ d'intégration en n sous-intervalles tous de même longueur. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ les extrémités de ces intervalles. On construit alors n rectangles comme suit : (illustration pour $n = 4$) :



Le $i$ème rectangle R_i ($i = 0, ..., n-1$) est donc construit sur la $i$ème sous-intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ et a comme « hauteur » $f(x_i)$.
L'idée est alors d'approcher l'aire sous la courbe de f par la somme des aires des rectangles :

$$\int_a^b f = \text{Aire sous la courbe de } f \approx \text{Aire}(R_0) + \text{Aire}(R_1) + \ldots + \text{Aire}(R_{n-1})$$

L'aire du rectangle R_i est donnée par :

$$\text{Aire}(R_i) = (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$$

Comme tous les sous-intervalles ont même longueur, la longueur de l'un d'entre eux vaut la longueur de $[a;b]$ divisée par le nombre de sous-intervalles ; cette longueur est donc égale à

$$\frac{b-a}{n}$$

Cette quantité est souvent notée h et est appelée le *pas* de la méthode. On a donc

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} \qquad \forall i = 0, \ldots, n-1$$

ainsi

$$\text{Aire}(R_i) = \frac{b-a}{n} f(x_i)$$

et donc notre formule d'approximation est, après factorisation par $\frac{b-a}{n}$:

$$\boxed{\int_a^b f \approx \frac{b-a}{n} \left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) \right)}$$

où

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

est le $i$ème point de la subdivision ($i = 0, \ldots, n$).

Exemple

Calculons une valeur approchée de

$$\int_1^3 \left(x^2+1\right) \mathrm{d}x$$

à l'aide de la méthode des rectangles, en subdivisant l'intervalle d'intégration en $n=5$ intervalles.
Calculons d'abord le pas de la subdivision ; on a :

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Disposons nos calculs dans le tableau suivant :

i	h	x_i	$f(x_i)$
0		1	2
1	$+0,4$	$1,4$	$2,96$
2	$+0,4$	$1,8$	$4,24$
3	...	$2,2$	$5,84$
4	...	$2,6$	$7,76$
		Somme	$22,8$
		$\times 0,4$	$\mathbf{9,12}$

La valeur approchée donnée par la méthode des rectangles à 5 sous-intervalles est donc $9,12$.

4.1.2 Erreur d'approximation

Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, à dérivée bornée.
Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f'(x)| \leq M \qquad \forall x \in]a;b[$$

Notons

$$I = \int_a^b f$$

et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{I}_n$ la valeur approchée de I donnée par la méthode des rectangles à n sous-intervalles.

Alors on a :

$$\widetilde{I}_n - \varepsilon_n \leq I \leq \widetilde{I}_n + \varepsilon_n$$

où

$$\varepsilon_n = M\frac{(b-a)^2}{2n}$$

Appliquons ce théorème à l'exemple précédent. On a :

$$f(x) = x^2+1 \quad a=1 \quad b=3 \quad n=5 \quad \widetilde{I}_n = 9,12$$

Pour trouver M nous allons chercher le maximum de $|f'|$ sur l'intervalle $[1;3]$. On a

$$f'(x) = 2x$$

Ainsi la fonction f' atteint son maximum sur $[1;3]$ pour $x=3$ et ce maximum vaut $2 \times 3 = 6$, on peut donc prendre $M=6$.
On a donc :

$$\varepsilon_5 = 6 \times \frac{(3-1)^2}{2\times 5} = 2,4$$

on a alors un encadrement de l'intégrale :

$$9,12-2,4 \leq \int_1^3 (x^2+1)\mathrm{d}x \leq 9,12+2,4$$

soit :

$$6,72 \leq \int_1^3 (x^2+1)\mathrm{d}x \leq 11,52$$

Dans cet exemple, il est simple de calculer la valeur exacte de l'intégrale : $\dfrac{10}{3} = 10,6666...$; cette valeur se situe bien dans l'encadrement proposé.

Remarque sur le théorème : l'amplitude de l'encadrement de I vaut :

$$(\widetilde{I}_n+\varepsilon_n)-(\widetilde{I}_n-\varepsilon_n) = 2\varepsilon_n = M\frac{(b-a)^2}{n}$$

et cette quantité décroît lorsque n augmente. Cela signifie que l'encadrement est d'autant plus précis que l'on subdivise l'intervalle d'intégration en beaucoup de rectangles. Ce fait correspond bien à l'intuition : plus nos rectangles seront « fins », plus ils pourront « coller » à la courbe de f, et donc bien approcher l'aire sous la courbe.
La limite de $2\varepsilon_n$ lorsque n tend vers $+\infty$ est 0 ; ainsi $(\widetilde{I}_n)_n$ tend vers I lorsque n tend vers $+\infty$. Autrement dit on peut calculer une valeur approchée de I pour n'importe quelle précision souhaitée, il suffit de choisir n assez grand. Dans la pratique il est courant de se donner à l'avance une précision de l'encadrement, puis de chercher n pour obtenir cette précision.

4.1.3 Choix du nombre de sous-intervalles

Déterminons le n minimal pour calculer une valeur approchée de

$$\int_1^4 (2x^2+3)\mathrm{d}x$$

à une précision de 10^{-1} près, avec la méthode des rectangles à n sous-intervalles.
L'énoncé demande d'avoir un encadrement de l'intégrale d'amplitude inférieure à 10^{-1}. Cette amplitude vaut, en fonction de n :

$$M\frac{(4-1)^2}{n} = \frac{9M}{n}$$

Déterminons une valeur de M : on a $f'(x) = 4x$ donc $|f'(x)| \leq 4 \times 4 = 16$ pour tout $x \in [1;4]$.
Nous voulons donc que n soit tel que :

$$\frac{9 \times 16}{n} \leq 10^{-1}$$

soit encore :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{10^{-1}}{9 \times 16}$$

d'où :

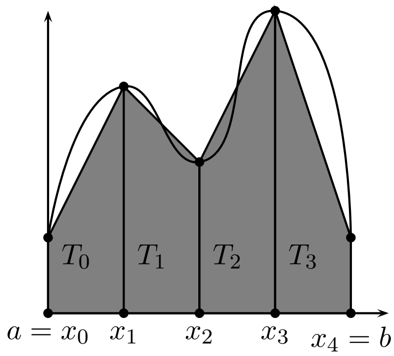
$$n \geq \frac{9 \times 16}{10^{-1}} = 10 \times 9 \times 16 = 1440$$

La méthode des rectangles requiert donc 1440 sous-intervalles pour calculer l'intégrale avec la précision souhaitée. Bien entendu, mener un tel calcul à la main serait très fastidieux : le nombre de calculs à effectuer étant une fonction croissante de n. Heureusement cette méthode de calcul approché se programme très facilement sur ordinateur...

4.2 Méthode des trapèzes

4.2.1 Description

La méthode des trapèzes est une autre méthode de calcul approché d'intégrales : cette fois ci nous utilisons un découpage en trapèzes plutôt qu'en rectangles pour approcher l'aire sous la courbe :



L'aire du trapèze i est donnée par :

$$\frac{\text{petite base} + \text{grande base}}{2} \times \text{hauteur} = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \times (x_{i+1} - x_i) = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \times \frac{b-a}{n}$$

Ainsi notre formule d'approximation par la méthode des trapèzes est :

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \ldots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)$$

soit encore :

$$\boxed{\int_a^b f \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)}$$

avec toujours :

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

Exemple

Calculons à nouveau une valeur approchée de

$$\int_1^3 \left(x^2+1\right) \mathrm{d}x$$

à l'aide cette fois ci de la méthode des trapèzes, en subdivisant l'intervalle d'intégration en $n = 5$ sous-intervalles.
Le pas est toujours égal à $h = \dfrac{3-1}{5} = 0,4$.
Disposons les calculs dans le tableau :

i	x_i	$f(x_i)$ ou $f(x_i)/2$
0	1	$\frac{2}{\mathbf{2}} = 1$
1	$1,4$	$2,96$
2	$1,8$	$4,24$
3	$2,2$	$5,84$
4	$2,6$	$7,76$
5	3	$\frac{10}{\mathbf{2}} = 5$
	Somme	$26,8$
	$\times 0,4$	$\mathbf{10,72}$

Par rapport au tableau de la méthode des rectangles, le tableau pour la méthode des trapèzes comporte une ligne supplémentaire (la dernière, pour $i = n$), et les valeurs de f calculées sont divisées par 2 pour la première et la dernière ligne.
La valeur approchée de l'intégrale donnée par la méthode des trapèzes à 5 sous-intervalles est donc $10,72$.

4.2.2 Estimation d'erreur

Nous disposons également d'un théorème donnant une majoration de l'erreur commise par la méthode des trapèzes :

Théorème Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$, deux fois dérivable sur $]a;b[$, à dérivée seconde bornée.
Soit $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f''(x)| \leq K \qquad \forall x \in]a;b[$$

Notons

$$I = \int_a^b f$$

et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{I}_n$ la valeur approchée de I donnée par la méthode des trapèzes à n sous-intervalles.

Alors on a :

$$\widetilde{I}_n - \varepsilon_n \leq I \leq \widetilde{I}_n + \varepsilon_n$$

où

$$\varepsilon_n = K\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

Appliquons ce théorème à notre exemple. On a $f(x) = x^2 + 1$ donc $f'(x) = 2x$ donc $f''(x) = 2$; on peut donc prendre $K = 2$.
On a

$$\varepsilon_n = 2\frac{(3-1)^3}{12 \times 5^2} \leq 0.06$$

Ainsi notre encadrement est :

$$10,72 - 0,06 \leq \int_1^3 (x^2+1)\mathrm{d}x \leq 10,72 + 0,06$$

soit :

$$10,66 \leq \int_1^3 (x^2+1)\mathrm{d}x \leq 10,78$$

Cet encadrement est bien plus précis que celui obtenu (pour le même n) avec la méthode des rectangles. En fait la méthode des trapèzes est *très souvent* plus précise que la méthode des rectangles, elle est donc à préférer a priori.

5 Intégrales généralisées (ou intégrales impropres)

5.1 Intégrales de la forme $\int_a^{+\infty}$ ou $\int_{-\infty}^a$

Définition Soit f une fonction définie et continue sur $[a;+\infty[$ (pour $a \in \mathbb{R}$). On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ *converge* si la limite :

$$\lim_{M\to+\infty} \int_a^M f$$

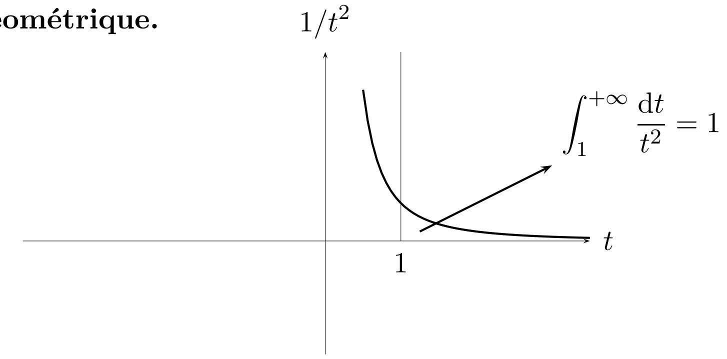
existe et est finie.
Dans ce cas on note :

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f$$

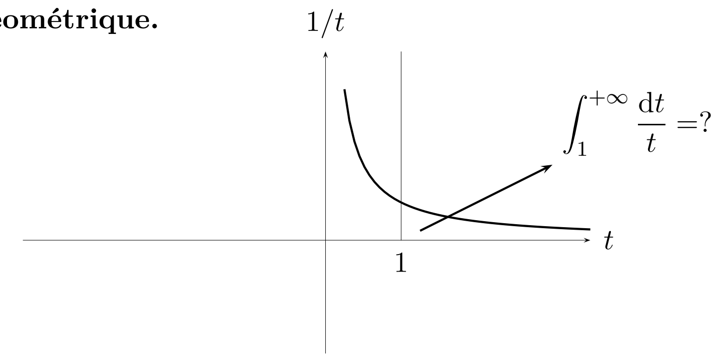
Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^{+\infty} f$ est *divergente*.

Exemples.

1. Etude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.
   On a, quelque soit $M > 1$,
$$\int_1^M \frac{\mathrm{d}}{t^2} = -\left[\frac{1}{t}\right]_1^M = 1 - \frac{1}{M}$$
   donc :
$$\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{\mathrm{d}}{t^2} = \lim_{M\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{M}\right) = 1$$
   donc l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente et vaut :
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1$$
   Interprétation géométrique.



   Notre procédé de généralisation de la notion d'intégrale a donc permis d'attribuer une « aire » finie à une région *infinie* (non bornée vers la droite) du plan, cette région étant la région comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de la fonction $t \mapsto 1/t^2$ et la droite d'équation $x = 1$.
2. Etude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.
   On a, quelque soit $M > 1$,
$$\int_1^M \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = [\ln t]_1^M = \ln M - \ln 1 = \ln M$$
   donc :
$$\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{\mathrm{d}}{t} = \lim_{M\to+\infty} (\ln M) = +\infty$$
   Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente (non convergente).
   Interprétation géométrique.



   Cette fois-ci, la région du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de $t \mapsto 1/t$ et la droite d'équation $x = 1$ est « d'aire infinie ». Cela est dû à la vitesse de décroissance vers 0 de la fonction $t \mapsto 1/t$. Elle tend vers 0 « moins vite » que $t \mapsto 1/t^2$, ce qui fait que sa courbe s'« écrase » moins au voisinage de $+\infty$.

3. Etude de $\int_0^{\infty} \cos t\mathrm{d}t$. On a, quelque soit $M > 1$,

$$\int_0^M \cos t\mathrm{d}t = [\sin t]_0^M = \sin M$$

et cette quantité n'a pas de limite quand M tend vers $+\infty$. L'intégrale $\int_0^{\infty} \cos t\mathrm{d}t$ est donc divergente également.

On a une définition analogue pour les intégrales de la forme $\int_{-\infty}^a$.

Définition Soit f une fonction définie et continue sur $]-\infty; a]$ (pour $a \in \mathbb{R}$). On dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^a f$ *converge* si la limite :

$$\lim_{M\to-\infty} \int_M^a f$$

existe et est finie.
Dans ce cas on note :

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{M\to-\infty} \int_M^a f$$

5.2 Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty}$

Définition Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. On dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est convergente si les deux intégrales :

$$\int_{-\infty}^0 f \text{ et } \int_0^{+\infty} f$$

sont convergentes.
Dans ce cas on pose :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{+\infty} f$$

Exemple. Etudions $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1. Etude de $\int_0^{\infty} te^{-t^2}\mathrm{d}t$. On a quelque soit $M > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^M te^{-t^2}\mathrm{d}t &= \left[\frac{e^{-t^2}}{-2}\right]_0^M \\ &= -\frac{1}{2}\left(e^{-M^2} - 1\right) \\ &\underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Etude de $\int_{-\infty}^0 te^{-t^2}\mathrm{d}t$.On a quelque soit $M < 0$:

$$\begin{aligned} \int_M^0 te^{-t^2}\mathrm{d}t &= \left[\frac{e^{-t^2}}{-2}\right]_M^0 \\ &= -\frac{1}{2}\left(1 - e^{-M^2}\right) \\ &\underset{M\to-\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}(1-0) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Conclusion. Les deux intégrales

$$\int_0^{\infty} te^{-t^2}\mathrm{d}t \text{ et } \int_{-\infty}^{0} te^{-t^2}\mathrm{d}t$$

sont convergentes, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\mathrm{d}t$ l'est et vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Exercices: Feuille 6, exercices 1 et 3.

5.3 Cas d'une singularité à une borne d'intégration

Exemple introductif. Peut-on donner un sens à :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \quad ?$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ n'est pas définie en 0 (on dit qu'on a une *singularité* en 0). Cependant elle est définie et continue sur tous les intervalles de la forme $[m;1]$, pour tout $m > 0$. On peut donc donner le sens suivant à l'intégrale du dessus :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \lim_{m \to 0^+} \int_m^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

sous réserve, bien sûr, que cette limite existe et soit finie.

Définition Soit f une fonction définie et continue sur $]a;b]$ (pour $a, b \in \mathbb{R}$), et sur tout intervalle de la forme $[m, b]$ (pour $m > a$). On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si

$$\lim_{m \to a^+} \int_m^b f$$

existe et est finie.
Dans ce cas on note

$$\int_a^b f = \lim_{m \to a^+} \int_m^b f$$

Définitions. On a une définition analogue si la singularité est à la borne supérieure de l'intégrale :

Définition Soit f une fonction définie et continue sur $[a;b[$ (pour $a, b \in \mathbb{R}$), et sur tout intervalle de la forme $[a, m]$ (pour $m < b$). On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si

$$\lim_{m \to b^-} \int_a^m f$$

existe et est finie.
Dans ce cas on note

$$\int_a^b f = \lim_{m \to b^-} \int_a^m f$$

Retour à l'exemple. On a, quelque soit $m > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_m^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \int_m^1 t^{-1/2}\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right]_m^1 \\
&= \left[\frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_m^1 \\
&= 2(1-m^{1/2}) \underset{m\to 0^+}{\longrightarrow} 2
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge et vaut 2.

5.4 Cas d'une singularité aux deux bornes d'intégration

Exemple introductif Cherchons à donner un sens à

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t(1-t)}$$

Ici, il y a deux singularités : en 0 et en 1.
En s'inspirant de ce qui a été fait au paragraphe 5.2, on peut « couper » l'intégrale en 2 et on se ramène à l'étude de deux intégrales :

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t(1-t)} \text{ et } \int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t(1-t)}$$

Ces deux intégrales n'ont qu'une singularité. Si ces deux intégrales sont convergentes, on pourra définir l'intégrale de départ.
Notons que la valeur 1/2 utilisée pour faire la coupure est arbitraire ; toute autre valeur strictement entre 0 et 1 donnerait le même résultat.

Définition Soit f une fonction définie et continue sur $]a;b[$ $(a, b \in \mathbb{R})$, et sur tout intervalle de la forme $[m, m']$, pour tout $m > a$ et $m' < b$.
On dit que $\displaystyle\int_a^b f$ converge si il existe $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales

$$\int_a^c f \text{ et } \int_c^b f$$

convergent.
Dans ce cas on pose

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

S'il existe $c \in]a, b[$ tel que l'une des deux intégrales

$$\int_a^c f \text{ ou } \int_c^b f$$

alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est divergente.

Retour à l'exemple. Etudions la première intégrale :

$$\int_m^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t(1-t)} = [\ln t - \ln(1-t)]_m^{1/2} \underset{m \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t(1-t)}$ ne converge pas, donc $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t(1-t)}$ non plus.

$\boxed{\text{Exercices:}}$ Feuille 6, exercice 2.

5.5 Théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions positives

Théorème Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle $]a;b[$ (a et b peuvent chacun être $\pm\infty$), **toutes deux à valeurs positives**.

1. Si $\forall x \in]a;b[\;\; f(x) \leq g(x)$ et que $\displaystyle\int_a^b g$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente.
2. Si $\forall x \in]a;b[\;\; f(x) \geq g(x)$ et que $\displaystyle\int_a^b g$ est divergente, alors $\displaystyle\int_a^b f$ est divergente.

Exemples d'application.

1. Montrons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.

   Pour $t \geq 1$, on a $t^2 \geq t$ donc $-t^2 \leq -t$ donc $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ (par croissance de la fonction exponentielle).

   Les fonctions $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sont toutes deux positives (car une exponentielle est toujours positive).

   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}$ (cf. Feuille 6, exercice 1, 2.) est convergente, donc par le point 1. du théorème, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}$ l'est aussi.

2. Montrons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{t^2}\mathrm{d}t$ est divergente.

   Remarquons que pour $t \leq 1$, $e^{t^2} \geq e$. Par ailleurs :

   $$\int_1^M e\mathrm{d}t = e(M-1) \to +\infty \text{ quand } M \to +\infty$$

   donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e\mathrm{d}t$ est divergente.

   Par ailleurs e et e^{t^2} sont positifs donc, par le point 2. du théorème, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{t^2}\mathrm{d}t$ est divergente.

$\boxed{\text{Exercices:}}$ Feuille 6, exercices 4 à 7.

6 Séries numériques

6.1 Introduction

Cherchons à donner un sens à la somme suivante :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

C'est la somme d'un nombre infini de réels.

Considérons, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme dite *partielle*, des $n+1$ premiers termes :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

On remarque que S_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison 1/2. On a donc :

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

Nous avons donc :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots \text{ " = " } \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2$$

En réécrivant ce qu'il y a au-dessus avec la notation $\sum$, on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

6.2 Notion de série

Définition Soit $(u_k)_{k \geq k_0}$ une suite numérique. La suite des *sommes partielles* associée à (u_k) est la suite $(S_n)_{n \geq k_0}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=k_0}^{n} u_k$$

Si la limite de $(S_n)_n$ existe et est finie, on dit alors que la *série de terme général* u_k est *convergente* et on note alors :

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

On dit aussi que $\lim S_n$ est la *somme* de la série $\left(\sum_{k \geq k_0} u_k\right)$.

Si la limite de (S_n) n'existe pas ou est infinie, on dit que la série de terme général u_k est *divergente*.

Remarque On pourra observer l'analogie entre série convergente :

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=k_0}^{n} u_k$$

et intégrale généralisée convergente :

$$\int_a^{\infty} f = \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f$$

Remarque On peut montrer que le caractère convergent ou divergent de la série ne dépend pas de l'indice de départ k_0. Lorsque l'on s'intéresse seulement à la convergence ou à la divergence de la série on peut donc l'omettre. Par contre la somme de la série dépend de k_0.

Exemples.

1. Reprenons la série de l'introduction : on a $k_0 = 0$, son terme général est $\frac{1}{2^k}$; nous avons vu que cette série est convergente, et que sa somme vaut 2.

2. Etudions maintenant la somme infinie :

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$$

Son terme général est $u_k = (-1)^k$ (en effet, $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = -1$...).
La suite des sommes partielles vaut :

$$S_n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Ainsi S_n vaut alternativement $0, 1, 0, 1, 0, \dots$, et n'a donc pas de limite quand n tend vers $+\infty$.
La série $\left(\sum_k (-1)^k\right)$ est donc divergente et notre procédé ne permet pas d'attribuer de valeur à $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$.

3. Considérons la série : $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$. Cette fois ci $k_0 = 1$ (le terme général de la série n'étant pas défini pour $k = 0$) et la suite des sommes partielles vaut :

$$\begin{aligned} S_n &= \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \dots + \ln\frac{n+1}{n} \\ &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \ln 5 - \ln 4 + \dots + \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= \ln(n+1) \text{ après une simplification massive !} \end{aligned}$$

Et donc $S_n \to +\infty$ et la série est donc divergente.

6.3 Critères de convergence

6.3.1 Condition nécessaire de convergence

Théorème Si la série de terme général u_k converge alors $\lim u_k$ existe et vaut 0.

Ce théorème est très souvent utilisé sous sa forme contraposée, pour démontrer qu'une série ne converge pas :

Théorème Si $\lim u_k$ n'existe pas ou ne vaut pas 0, alors la série de terme général u_k est divergente.

Exemples.

1. $\left(\sum_k \cos k\right)$ est divergente, car la limite de son terme général $u_k = \cos k$ n'existe pas.
2. $\left(\sum_k \left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)$ est divergente, car son terme général $u_k = 1 + \frac{1}{k}$ tend vers 1 et non vers 0.

Remarque Ce théorème ne peut pas s'utiliser pour montrer qu'une série converge.
Par exemple, nous avons vu que la série de terme général $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ est divergente. Pourtant :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \longrightarrow \ln 1 = 0$$

son terme général tend vers 0.

Ce test est le premier à effectuer quand on nous demande d'étudier la nature (convergence ou divergence) d'une série. Il permet de conclure dans certains cas de divergence.

6.3.2 Règle de D'Alembert

Théorème Soit une suite (u_k) **positive** telle que $\ell = \lim \dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ existe.

1. Si $\ell < 1$ alors la série de terme général u_k converge.
2. Si $\ell > 1$ alors la série de terme général u_k diverge.
3. Si $\ell = 1$ alors on ne peut rien conclure : la série de terme général u_k peut converger ou diverger.

Exemples.

1. Série de terme général $u_k = \dfrac{1}{k!}$.
   Déjà $k! \to +\infty$ donc $u_k \to 0$, mais cela ne suffit pas à conclure.
   On a :
   $$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{1}{(k+1)!}\frac{k!}{1} = \frac{(k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to \ell = 0$$
   donc $\ell < 1$ et donc la série converge.
2. Série de terme général $u_k = \dfrac{1}{k}$.
   Déjà $u_k \to 0$, mais cela ne suffit pas à conclure sur la nature de la série. Tentons d'utiliser la règle de D'Alembert :
   $$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} \to \ell = 1$$
   la règle de D'Alembert ne permet donc pas de conclure... Nous verrons plus tard (6.4) la nature de cette série.

6.3.3 Règle de Cauchy

Théorème Soit une suite (u_k) **positive** telle que $\ell = \lim (u_k)^{1/k}$ existe.

1. Si $\ell < 1$ alors la série de terme général u_k converge.
2. Si $\ell > 1$ alors la série de terme général u_k diverge.
3. Si $\ell = 1$ alors on ne peut rien conclure : la série de terme général u_k peut converger ou diverger.

Exemples. La règle de Cauchy est facile à utiliser lorsque le terme général de la suite contient des puissances.

1. Etude de $\left(\sum_k \left(\dfrac{2k+1}{3k+1}\right)^k\right)$.
   On a $u_k = \left(\dfrac{2k+1}{3k+1}\right)^k$ donc
   $$(u_k)^{1/k} = \frac{2k+1}{3k+1} \to \ell = \frac{2}{3} < 1$$
   Par ailleurs le terme général est positif donc on peut appliquer la règle de Cauchy : la série converge.
2. Etude de $\left(\sum_k \left(\dfrac{5k+2}{3k+1}\right)^k\right)$.

On a :

$$(u_k)^{1/k} = \frac{5k+2}{3k+1} \to \ell = \frac{5}{3} > 1$$

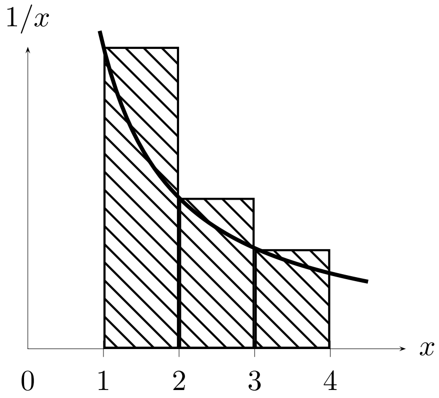
Par ailleurs le terme général est positif donc on peut appliquer la règle de Cauchy : la série diverge.

$\boxed{\text{Exercices:}}$ Feuille 7, exercices 1 à 3.

6.4 Comparaison série/intégrale

Introduction

Etude de $\left(\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}\right)$



Dans le schéma ci-dessus, considérons l'aire d'un rectangle hachuré : la hauteur du $k$ème rectangle vaut $1/k$, sa largeur vaut 1. Son aire vaut donc $1/k$. La somme des n rectangles hachurés vaut donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, c'est le $n$ème terme de la suite des sommes partielles de la série à étudier.
Maintenant nous voyons que l'aire de la région hachurée est plus grande que l'aire sous la courbe de la fonction $x \mapsto 1/x$ située entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = n + 1$. Cette dernière aire vaut $\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$. On a donc, quelque soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Or :

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(n+1) \to +\infty$$

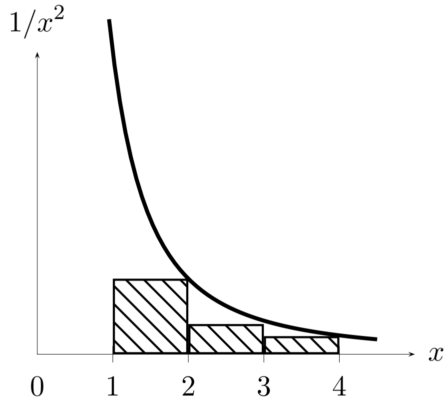
et donc la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_n$ n'est pas majorée. Elle n'est donc pas convergente[2].

La série $\left(\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}\right)$ n'est donc pas convergente. L'idée a été ici de comparer la suite des sommes partielles de la série à étudier avec l'aire sous la courbe d'une fonction (donc une intégrale).

[2] car une suite convergente est bornée

Voyons une autre application de cette idée :

Etude de $\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}\right)$



L'aire du $k$ème rectangle hachuré vaut $1/(k+1)^2$. L'aire de la région hachurée vaut donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^2}$. On retrouve, comme précédemment, la somme partielle de la série à étudier.
Cette fois ci, l'aire de la région hachurée est inférieure à l'aire sous la courbe de la fonction $x \mapsto 1/x^2$ située entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = n$. Comme la fonction $x \mapsto 1/x^2$ est positive, cette aire est-elle même inférieure à l'aire de la région (infinie) située sous la courbe de cette fonction et à droite de la droite d'équation $x = 1$. Ainsi :

$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^2} \leq \int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

Or un calcul simple nous donne :

$$\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$$

et donc la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^2}$ est majorée (par 1).

Par ailleurs,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+2)^2} \geq 0$$

et donc (S_n) est croissante.

La suite (S_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente. Ainsi la série $\left(\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k^2}\right)$ est convergente.

Généralisation L'idée vue précédemment dans deux cas particuliers (comparaison d'une série et d'une intégrale) se généralise et donne naissance au théorème suivant :

Théorème Soit $k_0 \in \mathbb{N}$, $f : [k_0; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, **décroissante** et à **valeurs positives**. On a alors :

1. L'intégrale $\int_{k_0}^{+\infty} f$ est convergente si et seulement si la série $\left(\sum_{k=k_0}^{+\infty} f(k)\right)$ est convergente.
2. L'intégrale $\int_{k_0}^{+\infty} f$ est divergente si et seulement si la série $\left(\sum_{k=k_0}^{+\infty} f(k)\right)$ est divergente.

Nous avons précédemment illustré ce théorème avec : $k_0 = 1$, $f(x) = 1/x$ puis $k_0 = 2$ et $f(x) = 1/x^2$.

Exercices: Feuille 7, exercice 4.

6.5 Comparaison de séries à termes positifs

Ce théorème est l'analogue du théorème donné en 5.5 pour les séries :

Théorème Soient deux suites **positives** (u_k) et (v_k).

1. Si $\forall k,\ \ u_k \leq v_k$ et que $\left(\sum_k v_k\right)$ est convergente, alors $\left(\sum_k u_k\right)$ l'est aussi.
2. Si $\forall k,\ \ u_k \leq v_k$ et que $\left(\sum_k u_k\right)$ est divergente, alors $\left(\sum_k v_k\right)$ l'est aussi.

Exemple d'application. On a, quelque soit k, $|\sin k| \leq 1$ donc $\dfrac{|\sin k|}{k^2} \leq \dfrac{1}{k^2}$.
Par ailleurs, $\dfrac{|\sin k|}{k^2}$ et $\dfrac{1}{k^2}$ sont tous deux positifs quelque soit $k \geq 1$, et nous avons vu que la série $\left(\sum_k \dfrac{1}{k^2}\right)$ est convergente. Par le théorème de comparaison, la série $\left(\sum_k \dfrac{|\sin k|}{k^2}\right)$ est donc convergente.

Exercices: Feuille 7, exercices 5 à 7.