# Exercices Analyse 2 – Feuille 1 : primitives

## Dérivation

### Exercice 1

Dériver chacune de ces expressions :

1. $f_1(x) = 3x^4 + 2x^2 + 3x + 17$
2. $f_2(x) = e^{3x}$
3. $f_3(x) = e^{-x}$
4. $f_4(x) = xe^x$
5. $f_5(x) = e^{x^2}$
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{x}$
7. $f_7(x) = \sqrt{x}$
8. $f_8(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

## Primitives de fonctions définies par morceaux

### Exercice 2

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ -x+1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer toutes les primitives de $f$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer toutes les primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer la primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(-1) = 1$.
5. Déterminer la primitive $G$ de $f$ sur $\mathbb{R}^*$, telle que $G(-1) = 1$ et $G(1) = 2$.
   Existerait-il une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant ces deux conditions ?

### Exercice 3

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{a}x+1 & \text{si} & x \in [a, 0[ \\ (x-1)^2 & \text{si} & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{elsewhere.} & \end{cases}$$

où $a < 0$.

1. Déterminer, en fonction de $a$, la primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
2. Déterminer $a$ pour que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

### Exercice 4

***Une fonction n'ayant pas de primitive sur*** $\mathbb{R}$

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est discontinue en 0.
2. Trouver toutes les primitives continues de $f$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Soit $F$ une telle primitive. En étudiant le taux d'accroissement :
   $$\frac{F(h) - F(0)}{h - 0}$$
   lorsque $h > 0$, puis lorsque $h < 0$, montrer que $F$ n'est pas dérivable en 0.
4. Supposer l'existence d'une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ et aboutir à une contradiction.

### Exercice 5

***Une fonction discontinue ayant une primitive sur*** $\mathbb{R}$

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0$,
   $$-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$
   et que pour tout $x < 0$,
   $$-x \geq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x$$
   (b) En déduire que $x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers 0.
   (c) En déduire que $f(x)$ n'a pas de limite quand $x$ tend vers 0, et ainsi que $f$ n'est pas continue en 0.
2. Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$
   (a) Calculer $F'(x)$ pour $x \in ]-\infty; 0[$ et $x \in ]0; +\infty[$. Vérifier que sur ces intervalles, $F$ est une primitive de $f$.
   (b) En étudiant la limite de $\dfrac{F(h)}{h}$ lorsque $h$ tend vers 0, montrer que $F$ est dérivable en 0, que $F'(0) = 0$, et donc que $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

## Vrai ou faux ?

1. Si une fonction est la primitive d'une fonction, alors elle est continue.
2. Si une fonction est la dérivée d'une fonction, alors elle est continue.
3. Si une fonction admet une primitive, alors elle est continue.
4. Si une fonction est continue alors elle admet une primitive.
5. Soit $f$ une fonction positive définie sur un intervalle, $F$ une de ses primitives. Alors $F$ est croissante.
6. Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, admettant deux primitives $F$ et $G$ telles que $F(0) = G(0)$. Alors $F = G$.