Exercices Analyse 2 – Feuille 2 : intégrales

Exercice 1 : recherche de primitives

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $x^4 - 22x^2 - 2x + 3$
2. $\dfrac{1}{x^2}$
3. $\exp(5x)$
4. $\sin(2x)$
5. $\dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$
6. $5x\exp(x^2)$

Exercice 2 : calcul d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^5 (x^5 - 2x^4 + x - 1)\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^1 \exp(2x)\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3t)\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_1^4 \frac{3x^2+1}{(x^3+x)^2}\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_1^3 x\exp(x^2)\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$

Exercice 3 : primitives données

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln(e^x+1) - x$.
   (a) Calculer sa dérivée g'.
   (b) En déduire $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{e^x+1}\mathrm{d}x$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+3)e^{2x}$.
   (a) Déterminer deux réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax+b)e^{2x}$ soit une primitive de f.
   (b) En déduire $\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Intégrales de fonctions définies par morceaux

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[-3;3]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{3}x - 2 & \text{si} \quad x \in [-3;0] \\ x & \text{si} \quad x \in]0;3] \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{3} f$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = |2t-1|$.

1. Recopier et compléter :

$$f(t) = \begin{cases} 2t-1 & \text{si} \quad t... \\ -(2t-1) & \text{si} \quad t... \end{cases}$$

2. En déduire $\displaystyle\int_0^2 f$.

Exercice 6

1. Etudier le signe de la fonction $t \mapsto t^2 - 5t + 6$ sur $\mathbb{R}$.
2. Recopier et compléter :

$$|t^2 - 5t + 6| = \begin{cases} t^2 - 5t + 6 & \text{si} \quad t... \\ -(t^2 - 5t + 6) & \text{si} \quad t... \end{cases}$$

3. En déduire $\displaystyle\int_0^7 \left|t^2 - 5t + 6\right| \mathrm{d}t$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[0;8]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad x \in [0;3] \\ 6 & \text{si} \quad x \in]3;5] \\ -2 & \text{si} \quad x \in]5;8] \end{cases}$$

Déterminer, en fonction de $x \in [0;8]$, la valeur de $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

Indication : on traitera séparément les cas $x \in [0;3]$, $x \in]3;5]$ et $x \in]5;8]$.

Autres propriétés de l'intégrale

Exercice 8 : encadrements d'intégrales

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[1;4]$. On suppose :

$$\forall x \in [1;4] \quad -1 \leq f(x) \leq 3 \quad \text{et} \quad -2 \leq g(x) \leq 1$$

1. Encadrer $f+g$ et $2f-3g$ sur $[1;4]$.
2. Encadrer $\displaystyle\int_1^4 (f+g)$ et $\displaystyle\int_1^4 (2f-3g)$.

Exercice 9 : un autre encadrement

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que $\forall x \in [-1;2]$ on a $\dfrac{1}{5} \leq f(x) \leq 1$.
2. Montrer que $\dfrac{3}{5} \leq \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx \leq 3$.