Exercices Analyse 2 – Feuille 3 : Intégration d'inégalités (suite), IPP et changements de variable

Exercice 1 : Intégration d'inégalités

1. (a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x = \displaystyle\int_0^x \cos t\ \mathrm{d}t$.
   (b) En déduire que $\forall x \geq 0,\ \sin x \leq x$.
2. (a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$.
   (b) Encadrer $\dfrac{1}{t}$ pour $1 \leq t \leq x$.
   (c) En déduire que $\forall x \geq 1,\ x - 1 \geq \ln x \geq \dfrac{x-1}{x}$.

Exercice 2 : Intégrations par parties

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 xe^{3x}\ \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_2^3 x^2e^{3x}\ \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\ \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_1^4 x^2\ln x\ \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\ \mathrm{d}x$

Exercice 3 : IPP et suites

1. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x\ \mathrm{d}x$.
   (a) Calculer I_0.
   (b) Exprimer I_{n+1} en fonction de n et de I_n.
   (c) Calculer I_2.
2. *Intégrale de Wallis*
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,
   $$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\ \mathrm{d}x$$
   (a) Calculer W_0 et W_1.
   (b) Montrer que quelque soit $n \in \mathbb{N}$,
   $$W_{n+2} = W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\cos^2(x)\ \mathrm{d}x$$
   (c) A l'aide d'une intégration par parties, en déduire que
   $$W_{n+2} = W_n - \frac{1}{n+1}W_{n+2}$$
   (d) Exprimer W_{n+2} en fonction de W_n et déterminer W_2 et W_3.

Exercice 4 : Calculs d'intégrales par combinaisons

1. Soient :
   $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ \mathrm{d}x \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\ \mathrm{d}x$$
   (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = J$.
   (b) Calculer $I + J$.
   (c) En déduire I et J.
2. Soient :
   $$I = \int_0^1 e^{1-t}\cos t\ \mathrm{d}t \quad J = \int_0^1 e^{1-t}\sin t\ \mathrm{d}t$$
   (a) Montrer, à l'aide d'intégrations par parties, que $I = -\cos 1 + e - J$ et que $J = -\sin 1 + I$.
   (b) En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 5 : Changements de variable

Calculer les intégrales suivantes, en effectuant le changement de variable proposé.

1. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln x}{x}\ \mathrm{d}x$; $u = \ln x$
2. $\displaystyle\int_1^{1+\frac{\pi}{2}} \sin(1+2x)\ \mathrm{d}x$; $u = 1 + 2x$
3. $\displaystyle\int_3^4 x\sqrt{x-3}\ \mathrm{d}x$; $u = x - 3$
4. $\displaystyle\int_0^1 (2-x)^{12}\ \mathrm{d}x$; $u = 2 - x$
5. $\displaystyle\int_0^1 e^{x+e^x}\ \mathrm{d}x$; $u = e^x$
6. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$; $x = \sin u$ (on pourra utiliser le résultat de l'ex. 4. 1.).

Exercice 6

1. Trouver a et b réels tels que
   $$\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\},\quad \frac{1}{u(u+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u+1}$$
2. En déduire une primitive de $\dfrac{1}{u(u+1)}$ sur $]0; +\infty[$.
3. En déduire :
   $$\int_0^{10} \frac{1}{e^x+1}\ \mathrm{d}x$$
   en effectuant le changement de variables $u = e^x$.

Exercice 7

Rappels :

1. La fonction tangente tan est une bijection
   $$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$
   Ceci permet de définir sa réciproque
   $$\tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$
   appelée fonction *arc tangente* et aussi notée arctan. La fonction arctan est caractérisée par l'identité :
   $$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[,\quad y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y$$
2. On a : $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, de sorte qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est $\arctan x$.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ après avoir effectué le changement de variables $u = e^x$.