

Exercices Analyse 2 – Feuille 5

Calcul approché d'intégrales

Méthode des rectangles

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 + x$$

1. Calculer, à l'aide de la méthode des rectangles, une valeur approchée de

$$I = \int_{-1}^2 f(x) \, dx$$

en utilisant $n = 5$ sous-intervalles.

2. Dresser le tableau de variations de f' sur $[-1; 2]$. On pourra étudier le signe de f'' .
3. En déduire $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f'(x)| \leq M \quad \forall x \in [-1; 2]$$

4. En déduire un encadrement de I à partir de la valeur approchée trouvée au 1.
5. Donner une valeur de n pour que la méthode des rectangles à n sous-intervalles donne un encadrement de I d'amplitude 0,1.

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent avec $f(x) = 2x^3 - 5x$ et le calcul de

$$I = \int_0^1 f(x) \, dx$$

Méthode des trapèzes

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 + x$$

1. Calculer, à l'aide de la méthode des trapèzes, une valeur approchée de

$$I = \int_{-2}^1 f(x) \, dx$$

en utilisant $n = 5$ sous-intervalles.

2. Calculer $f''(x)$ et déterminer $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f''(x)| \leq K \quad \forall x \in [-2; 1]$$

3. En déduire un encadrement de I à partir de la valeur approchée trouvée au 1.
4. Donner une valeur de n pour que la méthode des trapèzes à n sous-intervalles donne un encadrement de I d'amplitude 0,1.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de déterminer un encadrement numérique de $\ln 2$.

1. Déterminer une fonction f telle que

$$\ln 2 = \int_1^2 f(x) \, dx$$

2. Calculer une valeur approchée de $\ln 2$ en utilisant la méthode des trapèzes à 5 sous-intervalles pour approcher l'intégrale de f sur $[1; 2]$.
3. Calculer $f''(x)$ et déterminer $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f''(x)| \leq K \quad \forall x \in [1; 2]$$

4. En déduire un encadrement de $\ln 2$.

Exercice 5

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée de π .

1. Vérifier que

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} \, dx$$

2. Calculer, à l'aide de la méthode des trapèzes à 10 sous-intervalles, une valeur approchée de π .