Exercices Analyse 2 – Feuille 6
Intégrales généralisées

Primitivation et passage à la limite

Exercice 1 : Bornes infinies

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes. Si c'est le cas, déterminer leur valeur.

1. $\int_1^{+\infty} e^t \, \mathrm{d}t$
2. $\int_1^{+\infty} e^{-t} \, \mathrm{d}t$
3. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$
4. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$
5. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ (on distinguera les cas : $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $\alpha < 1$)
6. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$
7. $\int_0^{+\infty} te^{-t} \, \mathrm{d}t$ (on pourra intégrer par parties)
8. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \, \mathrm{d}t$
9. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} \, \mathrm{d}t$ (on pourra intégrer par parties)

Le résultat du 5. est à retenir.

Exercice 2 : Singularités aux bornes

Même question qu'à l'exercice 1.

1. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$
2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$
3. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ (on distinguera les cas : $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $\alpha < 1$)
4. $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$
5. $\int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t$

Le résultat du 3. est à retenir.

Exercice 3 : Densités de probabilité, loi de Cauchy

Rappels : une fonction positive g, continue sauf peut-être en un nombre fini de points, telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \, \mathrm{d}t = 1$$

est appelée *densité de probabilité*. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de densité g si quelque soit $a \leq b$,

$$\mathbf{P}(X \in]a;b[) = \int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t$$

On définit alors l'espérance de X comme :

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t) \, \mathrm{d}t$$

si toutefois cette intégrale est convergente. Si ce n'est pas le cas, X n'a pas d'espérance.

1. Soit la fonction :
$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$
Vérifier que g est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant g comme densité. On dit que X suit une loi de Cauchy. La variable X a-t-elle une espérance ?

Utilisation des théorèmes de comparaison

Exercice 4

Déterminer si l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+e^t}$$

est convergente ou non. On pourra chercher à comparer la fonction intégrée à la fonction $t \mapsto e^{-t}$.

Exercice 5

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, comparer $t^3 + t^2 + 1$ avec t^3.
2. En déduire la nature (i.e. convergence ou divergence) de
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+t^2+1}$$

Exercice 6

1. Pour $t \in [0;1]$, comparer t^2 avec t.
2. En déduire la nature de
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t}$$

Exercice 7

On cherche à étudier la nature de l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^6-1}}$$

1. Soit g la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par :
$$g(t) = \frac{t^6-1}{t^4}$$
   (a) Dresser le tableau de variations de g (on pourra remarquer que $g(t) = t^2 - \frac{1}{t^4}$).
   (b) En déduire que $g(t) \geq 1$ sur $[2;+\infty[$, et comparer $t^6 - 1$ et t^4 pour $t \geq 2$.
2. En déduire la nature de l'intégrale proposée.