Exercices Analyse 2 – Feuille 7
Séries

Exercice 1

En utilisant la condition nécessaire de convergence, la règle de d'Alembert ou la règle de Cauchy, déterminer la nature des séries dont les termes généraux suivent :

1. $\dfrac{\ln k}{2^k}$
2. e^{-k}
3. e^k
4. 1
5. $\left(\dfrac{3k+1}{2k^2+3}\right)^k$
6. $\sin k$
7. $\dfrac{(2k)!}{(k!)^2}$
8. $\dfrac{k!}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2k-1)}$
9. $\dfrac{n^2}{2^n}$
10. $2^{-\sqrt{n}}$
11. $(0,1)^{-\sqrt{n}}$

Exercice 2

On veut étudier la série de terme général $u_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

1. Décomposer u_k en éléments simples.
2. Calculer les sommes partielles de la série $\left(\sum_{k \geq 1} u_k\right)$.
3. En déduire la nature, et éventuellement la somme de cette série.

Exercice 3

Le résultat de cet exercice est à retenir.

On s'intéresse à la série géométrique de raison q : $\left(\sum_{k \geq 0} q^k\right)$.

1. Quelle est la nature de cette série quand $q = 1$?
2. (a) Pour $q \neq 1$, calculer les sommes partielles de la série.
   (b) En déduire la nature, et la somme éventuelle, de la série ; on distinguera les cas $q > 1$ et $q < 1$.
3. Retrouver la nature de la série lorsque $q \neq 1$ à l'aide du critère de Cauchy.

Exercice 4

Le résultat de cet exercice est à retenir.

On s'intéresse à la série de Riemann : $\left(\sum_{k \geq 1} \dfrac{1}{k^\alpha}\right)$.

1. Donner la nature de cette série lorsque $\alpha < 0$, et lorsque $\alpha = 0$.
2. Rappeler la nature de $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ en fonction de α.
3. A l'aide d'une comparaison série/intégrale, donner la nature de la série de Riemann en fonction de α.

Exercice 5

En utilisant un théorème de comparaison de séries, déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{|\cos k|}{2^k}$
2. $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^2+1}$; (comparer avec $1/k^2$)
3. $\displaystyle\sum_{k \geq 2} \frac{k^2}{k^3-1}$; (comparer avec $1/k$)
4. $\displaystyle\sum_{k \geq 2} \frac{k^2}{k^4-1}$
5. $\displaystyle\sum_{k \geq 3} \frac{\ln k}{k}$; (comparer avec $1/k$)

Exercice 6

On veut étudier la série : $\left(\sum_{k \geq 2} \dfrac{1}{\ln k}\right)$.

1. Soit $g(x) = \ln x - x$ pour $x \in [2; +\infty[$.
   (a) Etudier les variations de g sur $[2; +\infty[$.
   (b) En déduire le signe de g sur $[2; +\infty[$.
2. Comparer $\ln k$ avec k pour $k \geq 2$.
3. Conclure.

Exercice 7

On veut étudier la série : $\left(\sum_{k \geq 3} \dfrac{1}{(\ln k)^k}\right)$.

1. Pour $k \geq 3$, comparer $(\ln k)^k$ avec $(\ln 3)^k$.
2. Conclure.