Préparation du test du 02/02/2010

Durée : 15 minutes. Calculatrices interdites. Écrire seulement la réponse directement sur la feuille.

1. Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x}$, vérifiant $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 2$.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 3a - x & \text{si} \quad x > 1 \\ -2x & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

   Déterminer a pour que f soit continue en 1.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{x} + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   (a) f est-elle continue en 1 ?
   (b) Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   (c) Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.
   (d) Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(e) = 1$.
4. Vrai ou faux : si F est primitive sur I d'une fonction f, alors F est continue sur I.

→ **Correction en page suivante.**

Correction préparation du test du 02/02/2010

1. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme : $F(x) = \dfrac{e^{3x}}{3} + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

   Déterminons C pour que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 2$. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0 + C = C$, et ainsi $C = 2$.

   La primitive cherchée est donc : $F(x) = \dfrac{e^{3x}}{3} + 2$.
2. On a $f(1) = -2$, et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 3a - 1$. La fonction f est continue en 1 si et seulement si ces deux nombres sont égaux, ie. ssi $3a - 1 = -2$, soit encore $a = -1/3$.
3. (a) On a $f(1) = 1/1 + 1 = 2$, et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 3 \times 1 - 1 = 2$, donc f est bien continue en 1.

   (b) On primitive chacun des ≪ morceaux ≫ dans la définition de $f(x)$, pour obtenir :

   $$F(x) = \begin{cases} 3\dfrac{x^2}{2} - x + C_1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \ln x + x + C_2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   pour C_1 et C_2 deux constantes réelles.

   (c) Comme f est continue, il suffit d'après un théorème du cours de déterminer une relation entre C_1 et C_2 pour que F soit continue. La discontinuité éventuelle de F est en 1, et on a : $F(1) = \ln 1 + 1 + C_2 = 1 + C_2$, et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \dfrac{3}{2} - 1 + C_1 = \dfrac{1}{2} + C_1$. Pour que F soit continue il faut donc, et il suffit que $1 + C_2 = \dfrac{1}{2} + C_1$, soit $C_1 = \dfrac{1}{2} + C_2$. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme :

   $$F(x) = \begin{cases} 3\dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{1}{2} + C_2 & \text{si} \quad x < 1 \\ \ln x + x + C_2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   pour $C_2 \in \mathbb{R}$.

   (d) On a :

   $$F(e) = \ln e + e + C_2 = 1 + e + C_2$$

   Donc on doit avoir $1 + e + C_2 = 1$ soit $C_2 = -e$. La primitive cherchée est donc :

   $$F(x) = \begin{cases} 3\dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{1}{2} - e & \text{si} \quad x < 1 \\ \ln x + x - e & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$
4. C'est vrai puisqu'alors F est dérivable sur I, donc en particulier continue.