Préparation du test du 07/05/2010

Calculatrices interdites, formulaire du S1 autorisé. ***Sauf pour les questions 3. c) et 4. d)****, on pourra écrire seulement la réponse directement sur la feuille.*

1. (a) Préciser les valeurs de α telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ soit convergente.

   (b) Enoncer le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives.

2. On s'intéresse à l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t \mathrm{d}t$.

   (a) Calculer, en fonction de $m \in]0;1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_m^1 \ln t \mathrm{d}t$. On pourra intégrer par parties.

   (b) Donner la nature, et le cas échéant la valeur, de $\displaystyle\int_0^1 \ln t \mathrm{d}t$.

3. On souhaite étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+t^2+1}$.

   (a) Comparer, pour tout $t \geq 1$, t^3 avec t^3+t^2+1.

   (b) Rappeler la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$.

   (c) Conclure, en rédigeant un raisonnement citant le nom du théorème utilisé après la vérification de ses hypothèses.

4. On souhaite étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t}$.

   (a) Comparer, pour tout $t \in]0;1[$, t^2 avec t.
   Pour éviter les erreurs, il est conseillé de vérifier sa réponse dans le cas où $t = 1/2$.

   (b) Comparer, pour tout $t \in]0;1[$, t^2+t avec $2t = t+t$.

   (c) Rappeler la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$.
   On admettra que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t}$ est de même nature que celle-ci.

   (d) Conclure, en rédigeant un raisonnement citant le nom du théorème utilisé après la vérification de ses hypothèses.

5. (a) Indiquer si la série $\displaystyle\left(\sum_{k\geq 1} \cos k\right)$ est convergente ou divergente.

   (b) Indiquer si la série $\displaystyle\left(\sum_{k\geq 1} \left(\frac{2k+1}{3k+2}\right)^k\right)$ est convergente ou divergente.

   (c) Indiquer si la série $\displaystyle\left(\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k!)^2}\right)$ est convergente ou divergente.

   (d) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$.

→ **Correction en page suivante.**

Correction préparation du test du 07/05/2010

1. (a) Cf. Feuille 6 exercice 2, 3. : l'intégrale est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

   (b) Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle $]a;b[$ (a et b peuvent chacun être $\pm\infty$), **toutes deux à valeurs positives**.

   1. Si $\forall x \in]a;b[\ \ f(x) \leq g(x)$ et que $\displaystyle\int_a^b g$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente.

   2. Si $\forall x \in]a;b[\ \ f(x) \geq g(x)$ et que $\displaystyle\int_a^b g$ est divergente, alors $\displaystyle\int_a^b f$ est divergente.

2. (a) Posons l'intégration par parties avec : $u'(t) = 1$, $v(t) = \ln t$.

   On a alors $u(t) = t$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t}$ donc :

$$\begin{aligned}\int_m^1 \ln t\mathrm{d}t &= -\int_m^1 t \times \frac{1}{t}\mathrm{d}t + \left[t\ln t\right]_m^1 \\ &= -\int_m^1 \mathrm{d}t - m\ln m \\ &= m - 1 - m\ln m\end{aligned}$$

   (b) Reste à prendre la limite quand $m \to 0^+$. Rappelons que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$; on conclut donc que $\displaystyle\int_m^1 \ln t\mathrm{d}t$ tend vers -1 quand m tend vers 0^+.

   Ainsi l'intégrale proposée est convergente et vaut -1.

3. (a) $t^2 + 1$ étant positif, $t^3 + t^2 + 1$ est supérieur ou égal à t^3, quelque soit $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Cette intégrale est convergente (cf. Feuille 6, exercice 1, question 5.).

   (c) On a ainsi :

$$\forall t > 1, \quad \frac{1}{t^3 + t^2 + 1} \leq \frac{1}{t^3}$$

   Par ailleurs :

   – l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ est convergente,

   – les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^3 + t^2 + 1}$ sont positives sur $[1;+\infty[$,

   donc les hypothèses du théorème de comparaison pour les intégrales sont réunies et on peut conclure que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3 + t^2 + 1}$ est convergente.

4. (a) On a $t^2 \leq t$ lorsque $t \in]0;1[$ (exemple : $(1/2)^2 = 1/4 \leq 1/2$).

   (b) Ainsi $t^2 + t \leq t + t = 2t$ pour tout $t \in]0;1[$.

   (c) Cette intégrale est divergente (cf. Feuille 6, exercice 1)

   (d) On a encore :

$$\forall t \in]0;1[, \quad \frac{1}{t^2 + t} \geq \frac{1}{2t}$$

   Par ailleurs :

   – l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t}$ est divergente,

   – les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{2t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 + t}$ sont positives sur $]0;1[$,

   donc les hypothèses du théorème de comparaison pour les intégrales sont réunies et on peut conclure que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + t}$ est divergente.

5. (a) Le terme général $u_k = \cos k$ n'a pas de limite quand $k \to +\infty$. La série n'est donc pas convergente.

   (b) On applique la règle de Cauchy ; le terme général est $u_k = \left(\dfrac{2k+1}{3k+2}\right)^k$, il est positif pour $k \geq 0$ et il vérifie :

$$(u_k)^{1/k} = \frac{2k+1}{3k+2} \to \frac{2}{3} \text{ (quotient des termes prépondérants)}$$

   Cette limite est < 1, donc la série est convergente.

   (c) On applique la règle de D'Alembert ; le terme général est $u_k = \dfrac{1}{(k!)^2}$, il est positif et il vérifie :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(k!)^2}{((k+1)!)^2} = \left(\frac{k!}{(k+1)!}\right)^2 = \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 \to 0$$

   Cette limite est < 1, donc la série est convergente.

(d) Calculons le $n$ème terme de la somme partielle de cette série :

$$S_n = \frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \ldots + \frac{1}{3^n}$$

S_n est donc la somme de $n+1$ termes d'une suite géométrique, et le premier terme dans la somme est 1. On a donc :

$$\begin{aligned} S_n &= 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) \\ &\to \frac{3}{2} \text{ quand } n \to +\infty \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}$$