Préparation du test du 09/02/2010

Durée : 15 minutes. Calculatrices interdites. Écrire seulement la réponse directement sur la feuille.

1. Calculer :
   (a) $A = \int_0^1 e^{-2t}\mathrm{d}t$
   (b) $B = \int_1^2 \frac{x^2}{x^3+1}\mathrm{d}x$
2. Donner les valeurs des réels a et b pour que la fonction g définie par $g(t) = (at+b)\exp(-t)$ soit une primitive de la fonction f définie par $f(t) = (8t+4)\exp(-t)$.
3. Soit f la fonction définie sur $[0,2]$ par :
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ 2 & \text{si} \quad t \in [1,2[\end{cases}$$
   (a) Calculer $C = \int_0^2 f$.
   (b) Déterminer, en fonction de $x \in [0,2]$, la valeur de $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
4. Calculer $D = \int_{-1}^1 |t|\mathrm{d}t$.

→ **Correction en page suivante.**

Correction préparation du test du 09/02/2010

1. (a)

$$A = \left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^1 = \frac{e^{-2}}{-2} - \frac{e^0}{-2} = \frac{1-e^{-2}}{2}$$

   (b) On a :

$$\frac{x^2}{x^3+1} = \frac{1}{3}\frac{u'(x)}{u(x)}$$

   avec $u(x) = x^3 + 1$.
   D'où

$$B = \frac{1}{3}\left[\ln(1+x^3)\right]_1^2 = \frac{1}{3}(\ln 9 - \ln 2)$$

2. On a :

$$g'(t) = a\exp(-t) - (at+b)\exp(-t) = (-at+a-b)\exp(-t)$$

   Pour que g soit primitive de f il faut que $g' = f$. Pour cela il suffit que :

$$\begin{cases} -a = 8 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

   soit : $a = -8$ et $b = -12$.
   Ainsi $G(t) = (-8t-12)\exp(-t)$ est une primitive de f (ce dont on pourra s'assurer en vérifiant que $G' = f$).

3. (a)

$$\begin{aligned} C = \int_0^2 f &= \int_0^1 f + \int_1^2 f \\ &= \int_0^1 1\mathrm{d}t + \int_1^2 2\mathrm{d}t \\ &= 1 \times (1-0) + 2 \times (2-1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

   (b) i. Pour $x \in [0,1]$:

$$\int_0^x f = \int_0^x 1\mathrm{d}t = x$$

   ii. Pour $x \in [1,2]$:

$$\int_0^x f = \int_0^1 1\mathrm{d}t + \int_1^x 2\mathrm{d}t = 1 + 2 \times (x-1) = 2x - 1$$

   Remarque : on pourra vérifier que pour $x = 2$ on retrouve bien la valeur de $\int_0^2 f$ calculée précédemment.

4. Ici, nous n'allons pas essayer de trouver une primitive de $t \mapsto |t|$ mais plutôt couper l'intégrale à calculer en deux parties à l'aide de la relation de Chasles :

$$\int_{-1}^1 |t|\mathrm{d}t = \int_{-1}^0 (-t)\mathrm{d}t + \int_0^1 t\mathrm{d}t$$

   puisque

$$|t| = \begin{cases} -t & \text{si} \quad t < 0 \\ t & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

   D'où :

$$\int_{-1}^1 |t|\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = -\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1.$$