Préparation du test du 09/03/2010

Durée : 15 minutes. Calculatrices interdites, formulaire du S1 autorisé. On pourra écrire seulement la réponse directement sur la feuille.

On rappelle que la fonction arcsin est la réciproque de la fonction sin restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction arcsin est définie sur l'intervalle $[-1;1]$, à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

On rappelle de plus que la dérivée de $\arcsin(x)$, pour $x \in]-1;1[$, vaut $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Donner les valeurs exactes de :
   (a) $\arcsin 0$
   (b) $\arcsin 1$
   (c) $\arcsin \frac{1}{2}$
2. Soit I l'intégrale :
$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \mathrm{d}x$$
   A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I en fonction d'une intégrale de la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
   On ne demande pas le calcul de cette dernière intégrale.
3. Soit J l'intégrale
$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$
   A l'aide du changement de variables $u = 1 - x^2$, exprimer J en fonction d'une intégrale de la fonction $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$.
   On ne demande pas le calcul de cette dernière intégrale.
4. Déterminer a et b réels tels que
$$\forall x \notin \{1,2\}, \quad \frac{2x+3}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

→ Correction en page suivante.

Correction préparation du test du 09/03/2010

1. Rappelons que $\arcsin x$ est le seul nombre réel compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, dont le sinus vaut x.

   (a) $\arcsin 0 = 0$

   (b) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

   (c) $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

2. Faisons une intégration par parties en posant :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u' & = & 1 \\ v & = & \arcsin x \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} u & = & x \\ v' & = & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right.$$

   D'où :

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

3. **Bornes :** $x = 0 \to u = 1$ et $x = \frac{1}{2} \to u = \frac{3}{4}$.

   Element différentiel : $\mathrm{d}u = -2x\mathrm{d}x$ d'où $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{2x}$.

   Intégrande : on a donc :

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$$

   Conclusion : après échange des bornes d'intégration (et compensation des signes $-$), on trouve :

$$J = \int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$$

   Remarque : on peut donc calculer

$$J = \left[\sqrt{u}\right]_{3/4}^{1} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   et en déduire :

$$I = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}$$

4. On a :

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2) + b(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(a+b)x - 2a - b}{(x-1)(x-2)}$$

   Ainsi a et b vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a + b & = & 2 \\ -2a - b & = & 3 \end{array} \right.$$

   De la première équation on tire $b = 2 - a$; en remplacant dans la deuxième on trouve $-2a - 2 + a = 3$ soit $a = -5$ et donc $b = 7$.